コマの運動

－剛体の力学の例題－

H. N.

2013 年 11 月 4 日

1.　基礎方程式

剛体の力学の運動方程式は Euler の方程式で表されるが，ここでは物理学的直観から，次の保存量に関する方程式から出発しよう。

(1)　全エネルギーの保存

$$A{\omega_1}^2 + B{\omega_2}^2 + C{\omega_3}^2 + 2mgh\cos\theta = 2T_0 \tag{1}$$

(2)　角運動量の鉛直方向成分の保存

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = K \tag{2}$$

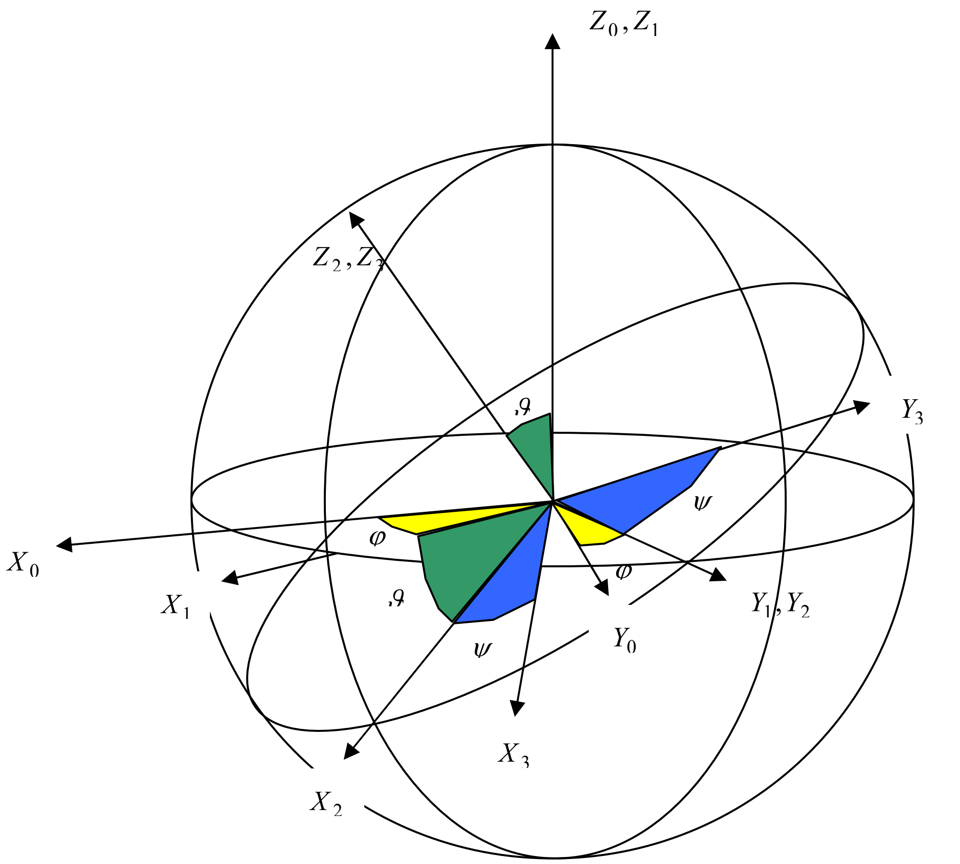
(3)　コマの自転回転数の保存

$$\omega_3 = const. \tag{3}$$

ここに，A, B, C はコマの慣性モーメント，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は回転数，$mgh\cos\theta$ は重心の位置エネルギー，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はコマの軸と固定軸の方向余弦である。これらの詳細は後述する。

2.　Euler の角

コマの方向を定義する Euler の角について示しておこう。(X_0, Y_0, Z_0)が実験室に固定した座標系，(X_3, Y_3, Z_3)はコマに固定した座標系である。



3.　回転ベクトル ω の成分

回転ベクトル$\boldsymbol{\omega}$の地球に固定した座標系(X_0, Y_0, Z_0)に対する成分と，コマに固定した座標系(ξ, η, ς)に対する成分は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi \\ \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{5}$$

また，Z_0軸と(ξ, η, ς)軸のなす角度は次のようになる（上記の方向余弦)。

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{6}$$

4.　基礎方程式の変形

(5)式を(1)式に代入すると，基礎方程式は次のように変形される。

(1) 全エネルギー保存の式

$$A\left(\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi\right)^2 + B\left(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi\right)^2 + C\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 + 2mgh\cos\theta = 2T_0$$

変形すると，

$$\begin{aligned} &A\left(\dot{\vartheta}^2\sin^2\psi - 2\dot{\vartheta}\sin\psi\cdot\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\cos^2\psi\right) \\ &+ B\left(\dot{\vartheta}^2\cos^2\psi + 2\dot{\vartheta}\cos\psi\cdot\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi\right) \\ &+ C\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 + 2mgh\cos\theta = 2T_0 \end{aligned}$$

ここで，軸対称コマを仮定すると，$A = B$とおいて，

$$\begin{aligned} &A\left(\dot{\vartheta}^2\sin^2\psi + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\cos^2\psi\right) \\ &+ A\left(\dot{\vartheta}^2\cos^2\psi + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi\right) \\ &+ C\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 + 2mgh\cos\theta = 2_0 \end{aligned}$$

また，$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}$であったから，

$$A\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) + C\omega_3{}^2 + 2mgh\cos\theta = 2T_0$$

すなわち，

$$\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta = \frac{2T_0 - C\omega_3{}^2}{A} - \frac{2mgh\cos\theta}{A} \tag{7}$$

(2) 角運動量の鉛直方向成分の保存の式

(5)および(6)式を用いると，(2)式は次のように変形される。

$$A(\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi)(-\sin\vartheta\cos\psi) + B(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi)(\sin\vartheta\sin\psi) + C\omega_3\cos\vartheta = K$$

これを展開すると

$$\begin{aligned} &A(-\dot{\vartheta}\sin\psi\cdot\sin\vartheta\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi\cdot\sin\vartheta\cos\psi) \\ &+ A(\dot{\vartheta}\cos\psi\cdot\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi\cdot\sin\vartheta\sin\psi) + C\omega_3\cos\vartheta = K \end{aligned}$$

したがって

$$A\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + C\omega_3\cos\vartheta = K$$

すなわち，

$$\dot{\varphi}\sin^2\vartheta = \frac{K}{A} - \frac{C}{A}\omega_3\cos\vartheta \qquad (8)$$

(3) コマの自転回転数の保存

この式はそのまま用いる。

$$\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} = \omega_3 \qquad (9)$$

5.　方程式の変形

基礎方程式(7)，(8)，(9)式をさらに変形して，解の状況を考えてみよう。

基礎方程式を再度書く。

$$\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta = \frac{2T_0 - C{\omega_3}^2}{A} - \frac{2mgh\cos\theta}{A}, \qquad (19)$$

$$\dot{\varphi}\sin^2\vartheta = \frac{K}{A} - \frac{C}{A}\omega_3\cos\vartheta, \qquad (20)$$

$$\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} = \omega_3 \qquad (21)$$

そこで，(19)式を時間で微分すると，

$$2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\varphi}^2\cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = \frac{2mgh\sin\theta}{A}\dot{\vartheta}$$

$$\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{mgh\sin\theta}{A}\dot{\vartheta} \qquad (22)$$

また，(20)式を時間で微分すると，

$$\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\varphi}\cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = \frac{C}{A}\omega_3\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} \qquad (23)$$

(23)式に $\dot{\varphi}$ を乗じて(22)式から引くと，

$$\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} - \dot{\vartheta}\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{mgh\sin\theta}{A}\dot{\vartheta} - \frac{C}{A}\omega_3\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$$

すなわち，

$$\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{mgh}{A}\sin\theta - \frac{C}{A}\omega_3\dot{\varphi}\sin\vartheta$$

または

$$\ddot{\vartheta} = \left(\dot{\varphi}^2\cos\vartheta - \frac{C}{A}\omega_3\dot{\varphi} + \frac{mgh}{A}\right)\sin\vartheta \qquad (24)$$

となる。

6.　歳差運動

(24)式をもちいて，コマの運動が純粋な歳差運動となる条件を求めよう。（φ に関する運動は歳差(precession)，ϑ に関する運動は章動(nutation)とよぶ。）

純粋な歳差運動では，$\vartheta = const.$ でなければならないから，(24)式の右辺はゼロとなる。したがって，

$$\dot{\varphi}^2 \cos\vartheta - \frac{C}{A}\omega_3\dot{\varphi} + \frac{mgh}{A} = 0 \tag{25}$$

これを $\dot{\varphi}$ について解くと，

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\dfrac{C}{A}\omega_3 \pm \sqrt{\left(\dfrac{C}{A}\omega_3\right)^2 - 4\cos\vartheta \cdot \dfrac{mgh}{A}}}{2\cos\vartheta} \\ &= \frac{C\omega_3 \pm \sqrt{C^2{\omega_3}^2 - 4mghA\cos\vartheta}}{2A\cos\vartheta} \\ &= \frac{C\omega_3}{2A\cos\vartheta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mghA\cos\vartheta}{C^2{\omega_3}^2}}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

物理的に根号の中は負にはなれないから，

$$1 - \frac{4mghA\cos\vartheta}{C^2{\omega_3}^2} \geq 0$$

すなわち，

$${\omega_3}^2 \geq \frac{4mghA\cos\vartheta}{C^2}\text{。}$$

コマの運動では $\cos\vartheta > 0$ を考えているから，

$$\omega_3 \geq \frac{2}{C}\sqrt{mghA\cos\vartheta} \tag{27}$$

となる。

コマの自転回転数 ω_3 が大きいとき，より正確には，$\dfrac{4mghA\cos\vartheta}{C^2{\omega_3}^2} << 1$ のとき，(26)式の平方根を展開して最初の 2 項を取ると，

$$\dot{\varphi} = \frac{C\omega_3}{2A\cos\vartheta}\left\{1 \pm \left(1 - \frac{2mghA\cos\vartheta}{C^2{\omega_3}^2}\right)\right\} \tag{28}$$

となり，次の二つの解が得られる。すなわち，複号の負と正に応じて，

(1) ゆっくりした歳差運動（負の複号をとる）

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{C\omega_3}{2A\cos\vartheta}\frac{2mghA\cos\vartheta}{C^2{\omega_3}^2} \\ &= \frac{mgh}{C\omega_3}\end{aligned} . \tag{29}$$

(2) はやい歳差運動（正の複号をとる）

$$\dot{\varphi} = \frac{C\omega_3}{2A\cos\vartheta}\cdot 2 \\ = \frac{C\omega_3}{A\cos\vartheta} \tag{30}$$

7.　ゆっくりした歳差運動と微小な章動の組み合わせ

コマが速い回転をしているとき，ゆっくりした歳差運動と微小な章動が観測される。このばあいには，(23)式および(24)式において，$\dot{\varphi}$および$\dot{\vartheta}$の高次の項を無視すると方程式が得られる。すなわち，

$$\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\varphi}\cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = \frac{C}{A}\omega_3\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} \tag{23}$$

より，

$$\ddot{\varphi}\sin\vartheta = \frac{C}{A}\omega_3\dot{\vartheta} \tag{31}$$

また，

$$\ddot{\vartheta} = \left(\dot{\varphi}^2\cos\vartheta - \frac{C}{A}\omega_3\dot{\varphi} + \frac{mgh}{A}\right)\sin\vartheta \tag{24}$$

より，

$$\ddot{\vartheta} = \left(\frac{mgh}{A} - \frac{C}{A}\omega_3\dot{\varphi}\right)\sin\vartheta \tag{32}$$

である。いま，

$$\omega_P = \frac{mgh}{C\omega_3}, \tag{33}$$

$$\omega_C = \frac{C\omega_3}{A} \tag{34}$$

を定義すると，(31)式と(32)式は，

$$\ddot{\varphi}\sin\vartheta = \omega_C\dot{\vartheta}, \tag{35}$$

$$\ddot{\vartheta} = \left(\frac{mgh}{C\omega_3}\frac{C\omega_3}{A} - \frac{C\omega_3}{A}\dot{\varphi}\right)\sin\vartheta \\ = \omega_C\left(\omega_P - \dot{\varphi}\right)\sin\vartheta \tag{36}$$

と書かれる。そこで，(35)式を時間で微分した

$$\dddot{\varphi}\sin\vartheta + \ddot{\varphi}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = \omega_C\ddot{\vartheta},$$

に(36)式を代入すると，

$$\dddot{\varphi}\sin\vartheta + \ddot{\varphi}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = \omega_C{}^2\left(\omega_P - \dot{\varphi}\right)\sin\vartheta$$

となり，ここで高次の項（左辺第 2 項）を切り捨てると，

$$\dddot{\varphi}\sin\vartheta = \omega_C{}^2\left(\omega_P - \dot{\varphi}\right)\sin\vartheta$$

整理して，

$$\dddot{\varphi} + \omega_C{}^2\dot{\varphi} = \omega_C{}^2\omega_P$$

$$\frac{d^2\dot{\varphi}}{dt^2}+{\omega_C}^2\dot{\varphi}={\omega_C}^2\omega_P \tag{37}$$

が得られる。これは，$\dot{\varphi}$について積分できて

$$\dot{\varphi}=\omega_P+a\cos(\omega_C t+\alpha) \tag{38}$$

が一般解となる。$t=0$における初期条件を

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=\omega_0, \\ \varphi=0, \\ \dot{\vartheta}=0, \\ \vartheta=\vartheta_0\end{cases} \tag{39}$$

とすると，積分定数がさだまり，下記の式が得られる。

$$\dot{\varphi}=\omega_P-(\omega_P-\omega_0)\cos(\omega_C t) \tag{40}$$

これを再度積分すると，

$$\varphi=\omega_P t-\frac{\omega_P-\omega_0}{\omega_C}\sin(\omega_C t) \tag{41}$$

さらに，ϑについては，(40)式を時間について微分したものを(35)式に代入して，

$$\omega_C(\omega_P-\omega_0)\sin(\omega_C t)\sin\vartheta=\omega_C\dot{\vartheta},$$

より，

$$\dot{\vartheta}=(\omega_P-\omega_0)\sin(\omega_C t)\sin\vartheta \tag{42}$$

となる。そして，ω_Pとω_0はともに微小量であるから，$\sin\vartheta=\sin\vartheta_0$と近似することができるので，(42)式は積分できて，

$$\vartheta=\vartheta_0+\frac{\omega_P-\omega_0}{\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t) \tag{43}$$

が得られる。以上がゆっくりした歳差運動と微小な章動が組み合わさったばあいである。

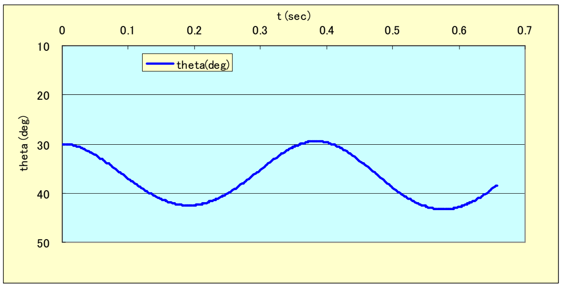
さて，この近似解を数値計算（シミュレーション）と比較しよう。

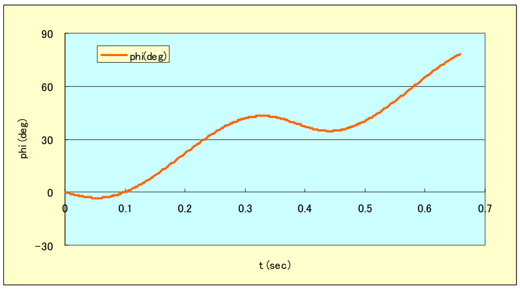
(1) $\omega_0=-\omega_P$のとき。

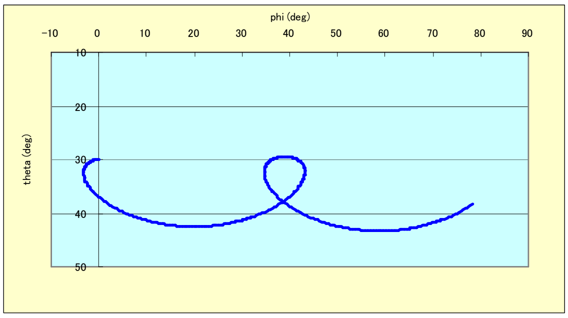
(41)式と(43)式は

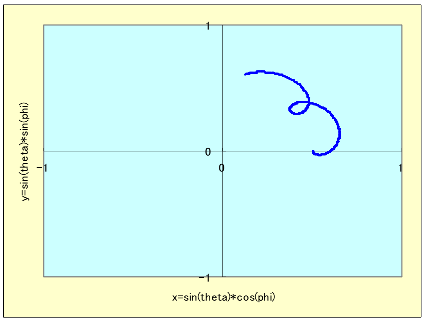
$$\varphi=\omega_P t-\frac{2\omega_P}{\omega_C}\sin(\omega_C t)\,,\quad \vartheta=\vartheta_0+\frac{2\omega_P}{\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t)\,.$$

これに対するシミュレーション結果((24)式を数値的に積分したもの)は以下のとおりである。



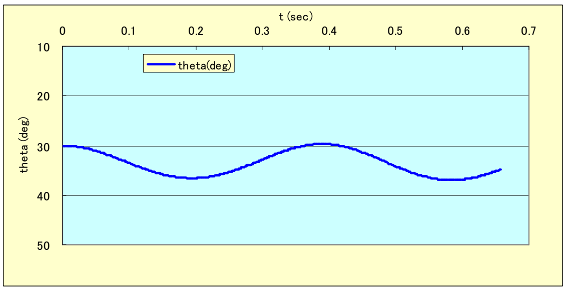


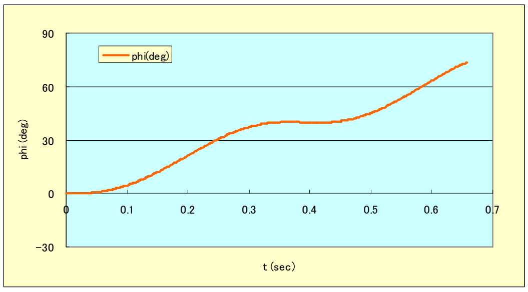


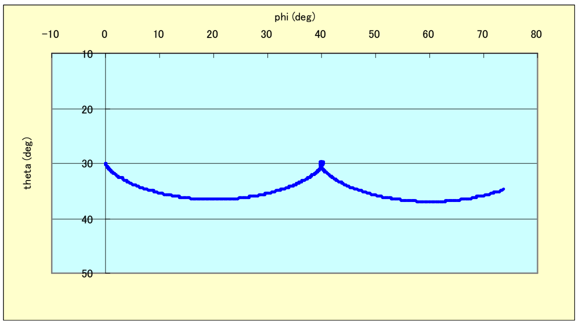


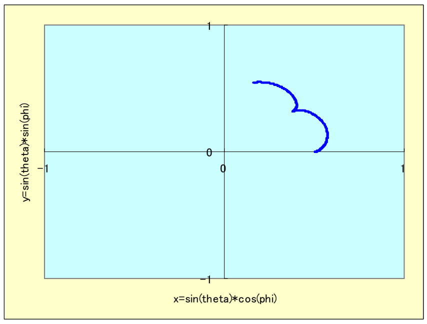
(2) $\omega_0 = 0$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t - \frac{\omega_P}{\omega_C}\sin(\omega_C t)\,,\quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{\omega_P}{\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t)$$



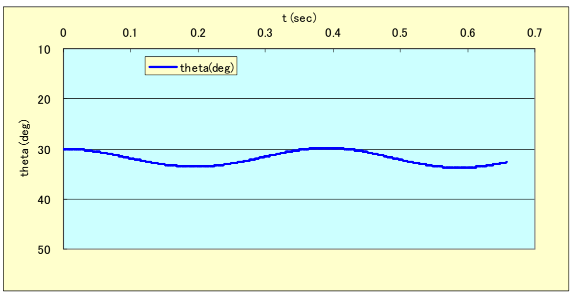


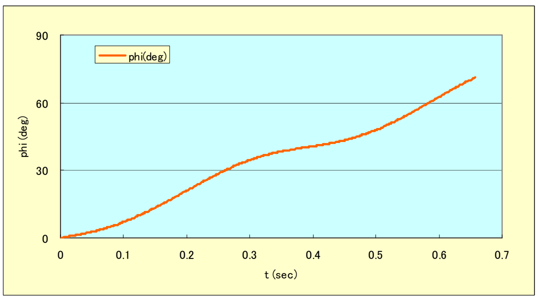


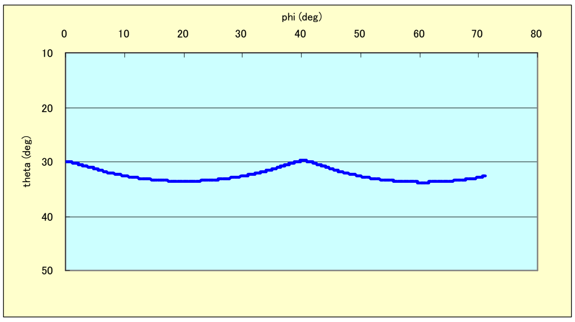


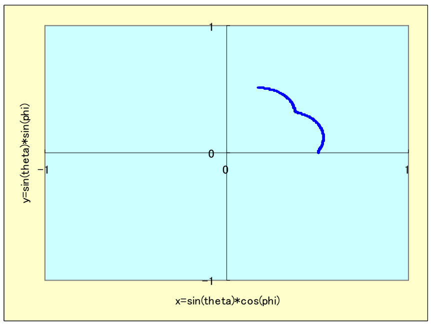
(3) $\omega_0 = (1/2)\omega_P$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t - \frac{\omega_P}{2\omega_C}\sin(\omega_C t)\,,\quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{\omega_P}{2\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t)$$



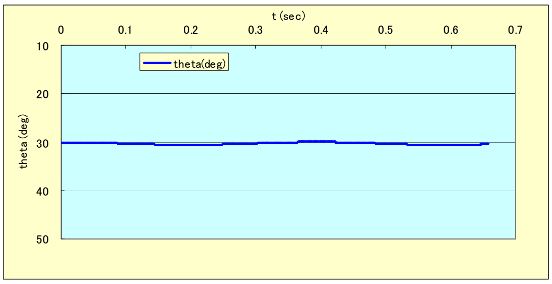


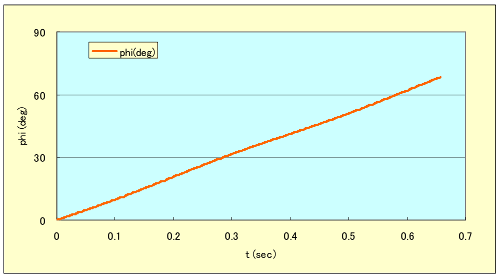


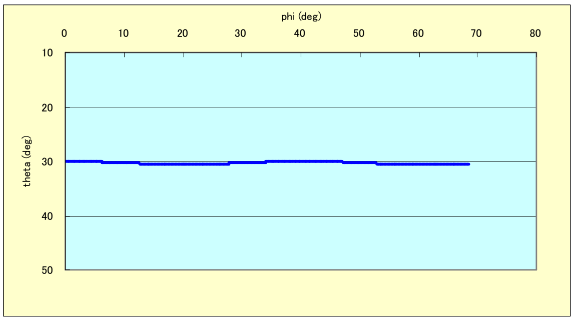


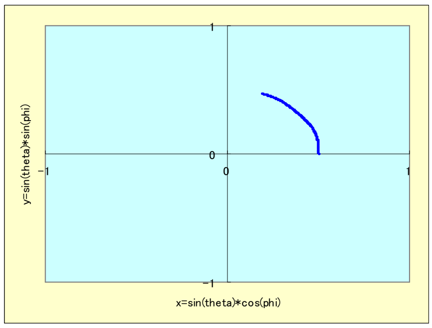
(4) $\omega_0 = \omega_P$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t\,, \quad \vartheta = \vartheta_0$$



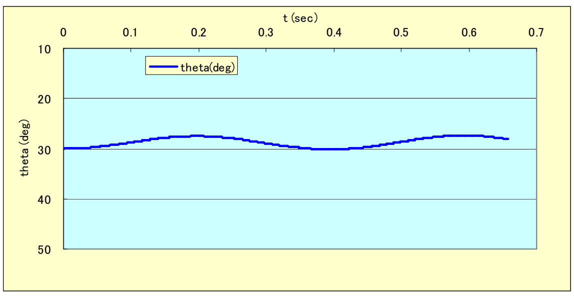


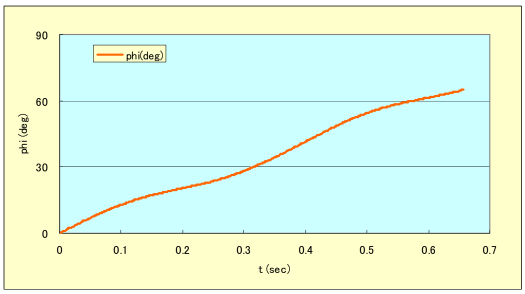


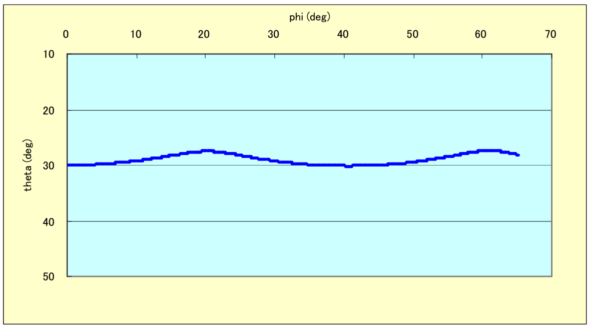


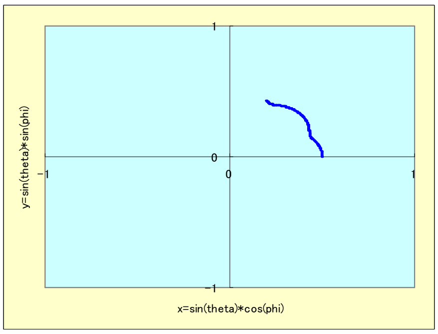
(5) $\omega_0 = (3/2)\omega_P$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t + \frac{\omega_P}{2\omega_C}\sin(\omega_C t)\,, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{\omega_P}{2\omega_C}\sin\vartheta_0 (1 - \cos\omega_C t)$$



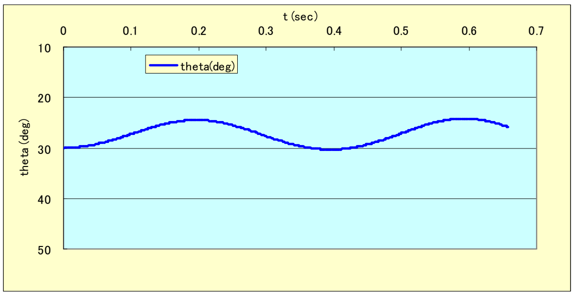


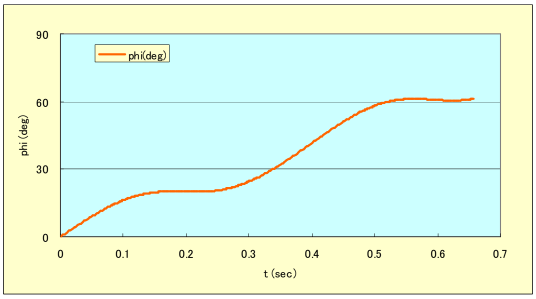


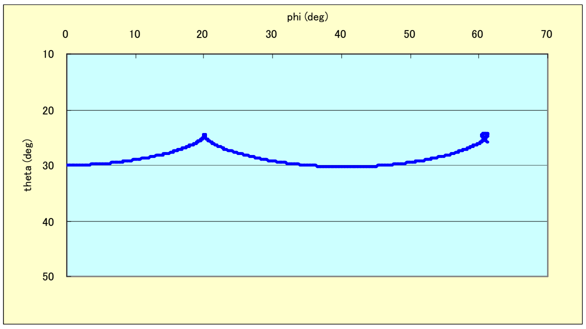


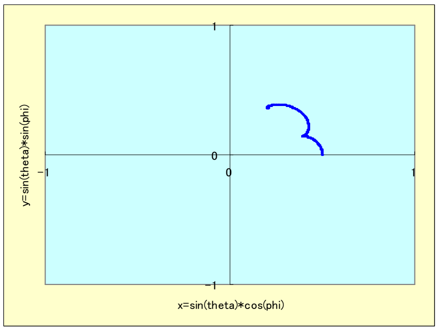
(6) $\omega_0 = 2\omega_P$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t + \frac{\omega_P}{\omega_C}\sin(\omega_C t)\,,\quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{\omega_P}{\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t)$$



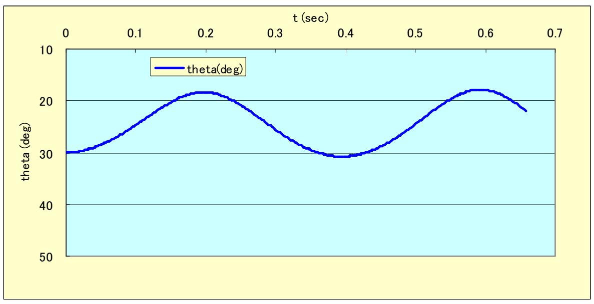


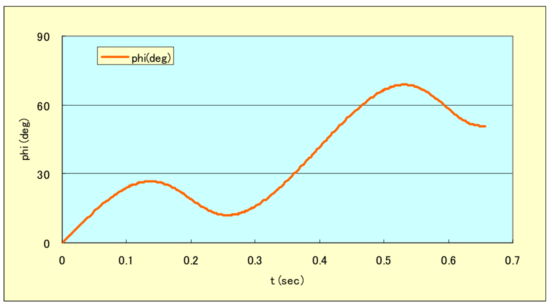


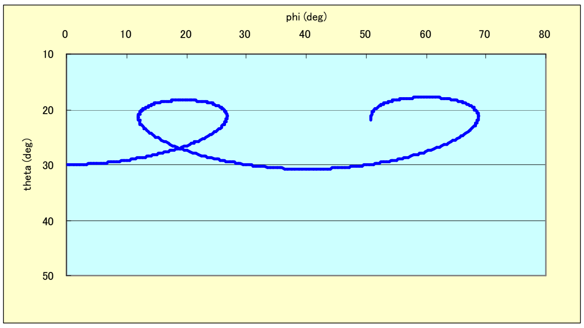


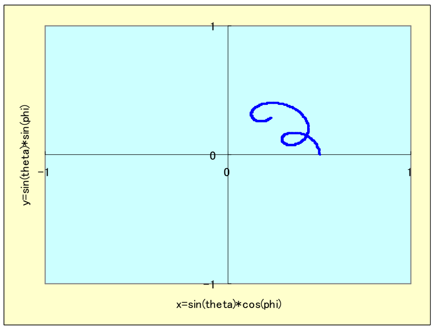
(7) $\omega_0 = 3\omega_P$ のとき。

$$\varphi = \omega_P t + \frac{2\omega_P}{\omega_C}\sin(\omega_C t)\,,\quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{2\omega_P}{\omega_C}\sin\vartheta_0(1-\cos\omega_C t)$$









$(\omega_P - \omega_0)$ の符号により，θ の上限と下限が決まる。

とくに $\omega_0 = \omega_P$ のときには，章動のない歳差運動となる。