論理 1 レポート　解答

I.

(1) $((\sim P \to Q) \to (P \,\&\, R)) \leftrightarrow \sim((P \vee \sim Q) \,\&\, R)$

$((\sim\top \to \top) \to (\top \,\&\, \bot)) \leftrightarrow \sim((\top \vee \sim\top) \,\&\, \bot)$

$(\top \to \bot) \leftrightarrow \sim\bot$

$\bot \leftrightarrow \top$

$\bot$

よって与えられた式は偽である.

(2) $\sim(P \,\&\, (\sim R \vee S)) \vee ((Q \vee S) \to (P \to U))$

$\sim(\top \,\&\, (\sim\bot \vee S)) \vee ((\top \vee S) \to (\top \to U))$

$\sim(\top \,\&\, (\top \vee S)) \vee ((\top \vee S) \to (\top \to U))$

$\sim(\top \,\&\, \top) \vee (\top \to U)$

$\sim\top \vee U$

$\bot \vee U$

U

$\top \quad \bot$

よって与えられた式の真偽は不明であり，同じ真理値を持つ簡単な式は U である.

(3) $((\sim R \vee S) \to U) \,\&\, \sim((\sim Q \,\&\, S) \vee U)$

$((\sim\bot \vee S) \to U) \,\&\, \sim((\sim\top \,\&\, S) \vee U)$

$((\top \vee S) \to U) \,\&\, \sim((\bot \,\&\, S) \vee U)$

$(\top \to U) \,\&\, \sim(\bot \vee U)$

$U \,\&\, \sim U$

$\bot$

よって与えられた式は偽である.

(4) $((P \,\&\, Q) \to (R \vee S)) \to ((Q \leftrightarrow U) \to \sim(S \to R))$

$((\top \,\&\, \top) \to (\bot \vee S)) \to ((\top \leftrightarrow U) \to \sim(S \to \bot))$

$(\top \to S) \to (U \to \sim\sim S)$

$S \to (U \to S)$

$\top \to (U \to \top) \qquad\qquad \bot \to (U \to \bot)$

$\top \to \top \qquad\qquad \top$

$\top$

よって与えられた式は真である.

II.

(1) 与えられた推論は妥当である.

真理表による証明

P	Q	R	$\sim R$	$P \to \sim R$ (仮定 1)	$Q \,\&\, \sim R$	$\sim(Q \,\&\, \sim R)$ (仮定 2)	$Q \vee R$	$\sim P$	$(Q \vee R) \to \sim P$ (結論)	
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	✓
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	✓
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	✓
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	✓

背理法による証明

[1] 仮定 1 $= P \to \sim R = \top$

[2] 仮定 2 $= \sim(Q \,\&\, \sim R) = \top$

[3] 結論 $= (Q \vee R) \to \sim P = \bot$

と仮定する．このとき[3]より

[4] $Q \vee R = \top$

[5] $P = \top$

[1], [5]より $\sim R = \top$．したがって

[6] $R = \bot$

[4], [6]より

[7] $Q = \top$
したがって仮定 2 = $\sim(\top \& \sim\bot) = \sim(\top \& \top) = \sim\top = \bot$．これは[2]と矛盾する．したがって[1], [2], [3]がすべて成り立つことはありえない．

(2) 与えられた推論は不妥当である．$P = \top$, $Q = \top$, $R = \bot$, $S = \top$のとき，すべての仮定が真であり，結論が偽である．

(3) 与えられた推論は妥当である．このことは次の条件文の真理値分析によって示される．

$$[(\sim P \to R) \& \sim(Q \& R) \& \sim(P \vee \sim Q)] \to [(P \& Q) \leftrightarrow R]$$

$$[(\sim\top \to R) \& \sim(Q \& R) \& \sim(\top \vee \sim Q)] \to [(\top \& Q) \leftrightarrow R]$$
$$[(\bot \to R) \& \sim(Q \& R) \& \sim(\top \vee \sim Q)] \to [(\top \& Q) \leftrightarrow R]$$
$$[\top \& \sim(Q \& R) \& \sim\top] \to [Q \leftrightarrow R]$$
$$[\top \& \sim(Q \& R) \& \bot] \to [Q \leftrightarrow R]$$
$$\bot \to [Q \leftrightarrow R]$$
$$\top$$

$$[(\sim\bot \to R) \& \sim(Q \& R) \& \sim(\bot \vee \sim Q)] \to [(\bot \& Q) \leftrightarrow R]$$
$$[(\top \to R) \& \sim(Q \& R) \& \sim\sim Q] \to [\bot \leftrightarrow R]$$
$$[R \& \sim(Q \& R) \& Q] \to [\bot \leftrightarrow R]$$

$$[\top \& \sim(Q \& \top) \& Q] \to [\bot \leftrightarrow \top]$$
$$[\sim Q \& Q] \to [\bot \leftrightarrow \top]$$
$$\bot \to \bot$$
$$\top$$

$$[\bot \& \sim(Q \& \bot) \& Q] \to [\bot \leftrightarrow \bot]$$
$$\bot \to \top$$
$$\top$$

(4) 与えられた推論は妥当である．

背理法による証明
[1] 仮定 1 = $\sim P \to (Q \to (R \vee S)) = \top$
[2] 仮定 2 = $\sim(Q \& \sim S) \to (P \vee R) = \top$
[3] 仮定 3 = $\sim Q \to \sim P = \top$
[4] 結論 = $(P \& Q) \vee R = \bot$
と仮定する．このとき[4]より
[5] $P \& Q = \bot$　かつ　[6] $R = \bot$
[5]より(i) $P = \bot$または(ii) $Q = \bot$.
(i)の場合．[2], [6]により仮定 2 = $\sim(Q \& \sim S) \to (\bot \vee \bot) = \sim(Q \& \sim S) \to \bot = \top$．ゆえに$\sim(Q \& \sim S) = \bot$だから $Q \& \sim S = \top$．ゆえに $Q = \top$かつ $S = \bot$．したがってこの場合 $P = \bot$, $Q = \top$, $R = \bot$, $S = \bot$．ゆえに仮定 1 = $\sim\bot \to (\top \to (\bot \vee \bot)) = \top \to (\top \to (\bot \vee \bot)) = \top \to (\top \to \bot) = \top \to \bot = \bot$．これは[1]と矛盾する．
(ii)の場合. [3]により仮定 3 = $\sim\bot \to \sim P = \top \to \sim P = \top$. ゆえに$\sim P = \top$だから $P = \bot$. したがって仮定 2 = $\sim(\bot \& \sim S) \to (\bot \vee \bot) = \sim\bot \to (\bot \vee \bot) = \top \to \bot = \bot$．これは[2]と矛盾する．
以上により，[1], [2], [3], [4]のすべてが成り立つことはありえない．

クワインの方法による証明
$P = \top$のとき

$$[\{\sim P \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (P \vee R)\} \& \{\sim Q \to \sim P\}] \to [(P \& Q) \vee R]$$
$$[\{\sim\top \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (\top \vee R)\} \& \{\sim Q \to \sim\top\}] \to [(\top \& Q) \vee R]$$
$$[\{\bot \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (\top \vee R)\} \& \{\sim Q \to \bot\}] \to [(\top \& Q) \vee R]$$
$$[\top \& \{\sim(Q \& \sim S) \to \top\} \& \sim\sim Q] \to [Q \vee R]$$
$$[\top \& \{\sim(Q \& \sim S) \to \top\} \& Q] \to [Q \vee R]$$
$$[\top \& \top \& Q] \to [Q \vee R]$$
$$Q \to [Q \vee R]$$

$$\top \to [\top \vee R]$$
$$\top \to \top$$
$$\top$$

$$\bot \to [\bot \vee R]$$
$$\top$$

$P = \bot$のとき

$$[\{\sim P \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (P \vee R)\} \& \{\sim Q \to \sim P\}] \to [(P \& Q) \vee R]$$
$$[\{\sim\bot \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (\bot \vee R)\} \& \{\sim Q \to \sim\bot\}] \to [(\bot \& Q) \vee R]$$
$$[\{\top \to (Q \to (R \vee S))\} \& \{\sim(Q \& \sim S) \to (\bot \vee R)\} \& \{\sim Q \to \top\}] \to [(\bot \& Q) \vee R]$$
$$[(Q \to (R \vee S)) \& \{\sim(Q \& \sim S) \to R\} \& \top\}] \to [\bot \vee R]$$
$$[(Q \to (R \vee S)) \& \sim(Q \& \sim S) \to R\}] \to R$$

$$[(Q \to (\top \vee S)) \& \sim(Q \& \sim S) \to \top\}] \to \top$$
$$\top$$

$$[(Q \to (\bot \vee S)) \& \sim(Q \& \sim S) \to \bot\}] \to \bot$$
$$[(Q \to S) \& \sim\sim(Q \& \sim S)] \to \bot$$
$$\sim[(Q \to S) \& (Q \& \sim S)]$$

$$\sim[(\top \to S) \& (\top \& \sim S)]$$
$$\sim[S \& \sim S]$$
$$\sim\bot$$
$$\top$$

$$\sim[(\bot \to S) \& (\bot \& \sim S)]$$
$$\sim[\top \& \bot]$$
$$\sim\bot$$
$$\top$$

III. 命題変項を次の意味で用いると，一郎，二郎，三郎の証言は以下のように記号化される．

P: 一郎は無罪である．
Q: 二郎は無罪である．

R: 三郎は無罪である．

一郎の証言：$\sim Q \,\&\, R$
二郎の証言：$\sim P \to \sim R$
三郎の証言：$R \,\&\, (\sim P \vee \sim Q)$

これらの論理式の真理表は以下のようになる．

							一郎の証言	二郎の証言	三郎の証言
P	Q	R	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim R$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim Q \,\&\, R$	$\sim P \to \sim R$	$R \,\&\, (\sim P \vee \sim Q)$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥

(1) 一郎の証言が三郎の証言を含意する．［≪一郎の証言が真であり，かつ三郎の証言が偽である≫行は存在しない．］
(2) 一郎と三郎が偽りの証言をしている．［全員が無罪であるのは，真理表の 1 行目に相当する．］
(3) 一郎と三郎が無罪で，二郎が有罪である．［全員の証言が真であるのは，真理表の 3 行目に対応する．］
(4) 二郎が無罪で，一郎と三郎が有罪である．［無罪の人が真実を語り，有罪の人が虚偽を語っているのは，真理表の 6 行目に対応する．］