標準形

1. 選言標準形

リテラル　命題変項 ($P, Q, R, \ldots$) およびそれらの否定 ($\sim P, \sim Q, \sim R, \ldots$) は**リテラル** (literal) と呼ばれる．

選言標準形　リテラルの連言のみを選言肢とする選言文の形式は，**選言標準形** (disjunctive normal form, DNF) と呼ばれる．また，選言標準形の選言肢（これはリテラルの連言である）は**連言節**と呼ばれる．（なお，連言肢を 1 つしか持たない連言節や，連言節を 1 つしか持たない選言標準形も認めることにする．）

選言標準形の例　$(P \,\&\, Q) \vee (\sim P \,\&\, Q \,\&\, \sim R)$, $(P \,\&\, Q \,\&\, \sim R) \vee (Q \,\&\, \sim R \,\&\, S) \vee (\sim P \,\&\, R \,\&\, S)$, $P \,\&\, Q \,\&\, \sim R$, $P \vee Q$, $\sim P$

いかなる論理式も，それと同値な選言標準形に変形することができる．

与えられた論理式を選言標準形に変形するためには，次の操作を順次実行すればよい：

(i) 条件記号および相互条件記号の消去：$\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ を $\sim\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ によって置き換える．また，$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}$ を$(\sim\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \,\&\, (\sim\mathrm{B} \vee \mathrm{A})$（または$(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}) \vee (\sim\mathrm{A} \,\&\, \sim\mathrm{B})$）によって置き換える．（この段階で二重否定が現れたら，それを除去する．）

(ii) ド・モルガンの法則を用いて，連言文や選言文の前に位置する否定記号を消去する．なお，ここで用いられるド・モルガンの法則は次のとおりである：

$$\sim(\mathrm{A}_1 \,\&\, \mathrm{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{A}_n) \dashv\vDash \sim\mathrm{A}_1 \vee \sim\mathrm{A}_2 \vee \ldots \vee \sim\mathrm{A}_n$$
$$\sim(\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2 \vee \ldots \vee \mathrm{A}_n) \dashv\vDash \sim\mathrm{A}_1 \,\&\, \sim\mathrm{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \sim\mathrm{A}_n$$

（この段階で二重否定が現れたら，それを除去する．）

(iii) 分配法則を適用して，連言がリテラルのみを結ぶ形に変形する．ここで用いられる分配法則は次のとおりである：

$$\mathrm{A} \,\&\, (\mathrm{B}_1 \vee \mathrm{B}_2 \vee \ldots \vee \mathrm{B}_n) \dashv\vDash (\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}_1) \vee (\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}_2) \vee \ldots \vee (\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}_n)$$
$$(\mathrm{B}_1 \vee \mathrm{B}_2 \vee \ldots \vee \mathrm{B}_n) \,\&\, \mathrm{A} \dashv\vDash (\mathrm{B}_1 \,\&\, \mathrm{A}) \vee (\mathrm{B}_2 \,\&\, \mathrm{A}) \vee \ldots \vee (\mathrm{B}_n \,\&\, \mathrm{A})$$

(iv) 不必要なカッコ（すなわち，選言文である部分式を囲むカッコ）を除去する．

* この段階で選言標準形が得られるが，さらに次の操作を行うと，より簡潔な選言標準形が得られる．

(v) (a) 連言節内の重複するリテラルを 1 つを残して除去する．(b) 連言節内のリテラルをアルファベット順に並べ換える．(c) 重複する連言節を 1 つを残して除去する．(d) 恒偽である連言節を除去する（この操作は，真理値分析において選言文から選言肢としての⊥を除去する操作に対応する）．ただし，すべての連言節が恒偽である場合には，1 つの連言節を残しておく．

例 1　論理式 $(\sim P \vee (Q \,\&\, \sim R)) \to \sim(R \to (\sim P \,\&\, Q))$ を選言標準形に同値変形する過程は次のとおりである：

$\sim(\sim P \vee (Q \,\&\, \sim R)) \vee \sim(\sim R \vee (\sim P \,\&\, Q))$	［→の消去］
$(\sim\sim P \,\&\, \sim(Q \,\&\, \sim R)) \vee (\sim\sim R \,\&\, \sim(\sim P \,\&\, Q))$	［ド・モルガンの法則］
$(\sim\sim P \,\&\, (\sim Q \vee \sim\sim R)) \vee (\sim\sim R \,\&\, (\sim\sim P \vee \sim Q))$	［ド・モルガンの法則］
$(P \,\&\, (\sim Q \vee R)) \vee (R \,\&\, (P \vee \sim Q))$	［二重否定の除去］
$((P \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R)) \vee ((R \,\&\, P) \vee (R \,\&\, \sim Q))$	［分配法則］
$(P \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R) \vee (R \,\&\, P) \vee (R \,\&\, \sim Q)$	［カッコの除去］
$(P \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R) \vee (P \,\&\, R) \vee (\sim Q \,\&\, R)$	［リテラルの並べ換え］
$(P \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R) \vee (\sim Q \,\&\, R)$	［重複する連言節の除去］

例 2　論理式 $(P \vee Q) \,\&\, (Q \to R)$ を選言標準形に同値変形する過程は次のとおりである：

$(P \vee Q) \,\&\, (\sim Q \vee R)$	［→の消去］
$((P \vee Q) \,\&\, \sim Q) \vee ((P \vee Q) \,\&\, R)$	［分配法則］
$((P \,\&\, \sim Q) \vee (Q \,\&\, \sim Q)) \vee ((P \,\&\, R) \vee (Q \,\&\, R))$	［分配法則］
$(P \,\&\, \sim Q) \vee (Q \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R) \vee (Q \,\&\, R)$	［カッコの除去］
$(P \,\&\, \sim Q) \vee (P \,\&\, R) \vee (Q \,\&\, R)$	［恒偽である連言節の除去］

* 上の変形過程の 2 行目においては，$P \vee Q$ をひとまとまりとして分配が行われている．

問題 1　次の論理式を選言標準形に変形せよ：$S \to \sim((P \to Q) \to R)$

選言標準形と恒偽性　選言標準形が恒偽であるのは，その連言節のすべてが恒偽であるときであり，またそのときに限られる．ところで，連言節が恒偽であるのは，そこに相矛盾するリテラルの組が現れる（すなわち，命題変項とその否定がともに現れる）ときであり，またそのときに限られる．したがって，選言標準形が恒偽であるのは，そのすべての連言節に相矛盾するリテラルの組が現れるときであり，またそのときに限られる．（あるいは，上の(v)(d)の操作を適用済みである場合には，相矛盾するリテラルを含む 1 つの連言節に還元されるときであり，またそのときに限られる.）この規準を用いると，任意の式をそれと同値な選言標準形に変形することによって，それが恒偽か恒偽でないか（恒偽か整合的か）を判定することができる.

2. 完全選言標準形

ある論理式が選言標準形であり，そこに現れるすべての命題変項が，そのすべての連言節に現れる場合，その式は**完全選言標準形** (canonical disjunctive normal form) であると言われる.

完全選言標準形の例

$$(P \,\&\, Q \,\&\, {\sim}R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, {\sim}R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, {\sim}R)$$
$$(P \,\&\, Q \,\&\, {\sim}R \,\&\, S) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R \,\&\, {\sim}S) \lor ({\sim}P \,\&\, Q \,\&\, {\sim}R \,\&\, S) \lor ({\sim}P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R \,\&\, {\sim}S)$$

任意の選言標準形は完全選言標準形に同値変形することができる.

例　前節の例 1 で得られた連言標準形

$$(P \,\&\, {\sim}Q) \lor (P \,\&\, R) \lor ({\sim}Q \,\&\, R)$$

は完全選言標準形ではない. まず, 第 1 の連言節 $P \,\&\, {\sim}Q$ には R が現れていない. しかし, この連言節は $(P \,\&\, {\sim}Q) \,\&\, (R \lor {\sim}R)$ と同値である．これに分配法則を適用して不必要なカッコを除去すると，次のように同値変形できる : $(P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, {\sim}R)$．したがって，第 1 の連言節をこの式で置き換えれば，R の欠如を補うことができる．次に，第 2 の連言節 $P \,\&\, R$ には Q が現れていないが，この連言節は $(P \,\&\, R) \,\&\, (Q \lor {\sim}Q)$ と同値である．これに分配法則を適用して不必要なカッコを除去し，さらにリテラルをアルファベット順に並べ換えると，次のように同値変形できる : $(P \,\&\, Q \,\&\, R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R)$．このようにして，第 2 の連言節における Q の欠如を補うことができる．同様の操作を第 3 の連言節にも施すと，次の式が得られる：

$$((P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, {\sim}R)) \lor ((P \,\&\, Q \,\&\, R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R)) \lor ((P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R) \lor ({\sim}P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R))$$

ここから不必要なカッコを除去し，重複する連言節を 1 つを残して除去すると，次の完全選言標準形が得られる：

(1)　$(P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R) \lor (P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, {\sim}R) \lor (P \,\&\, Q \,\&\, R) \lor ({\sim}P \,\&\, {\sim}Q \,\&\, R)$

完全選言標準形と真理表　完全選言標準形からは，それが命題変項に対するどのような真理値割り当てのもとで真になるかを容易に読み取ることができる．なぜなら，選言標準形が真であるのは，その連言節の少なくとも 1 つが真であるときであり，そのときに限られる．そして完全選言標準形の連言節が命題変項に対する真理値のどのような割り当てのもとで真となるかは直ちに明らかである．例えば，(1)の第 1，第 2，第 3，第 4 の連言節のそれぞれを真にする P, Q, R に対する真理値の割り当ては，$\langle \mathrm{T}, \bot, \mathrm{T} \rangle$, $\langle \mathrm{T}, \bot, \bot \rangle$, $\langle \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T} \rangle$, $\langle \bot, \bot, \mathrm{T} \rangle$ であり，それらのみである．したがって(1)が真になるのは, P, Q, R がこれらのいずれかの真理値の組み合わせをとるときであり, かつそのとき限られる．そして，これらの割り当てはそれぞれ真理表の 3 行目，4 行目，1 行目，7 行目に対応する．したがって，(1)の真理表は，これらの行で T，これら以外の行で⊥を示すものであり，またそれが例 1 のもとの論理式の真理表に他ならない.

完全選言標準形と恒真性　完全選言標準形の 1 つの選言節は，その標準形を真にする命題変項への真理値の割り当ての 1 つに対応するという事実を考えると，次のことが分かる：n 個の命題変項を含む完全選言標準形（重複する連言節は除去されているものとする）が恒真であるのは，それが 2^n 個の連言節を持つときであり，かつそのときに限られる.

問題 2　例 1 の論理式 $({\sim}P \lor (Q \,\&\, {\sim}R)) \to {\sim}(R \to ({\sim}P \,\&\, Q))$ の真理表を直接作成するか，またはクワインの方法を用いてその真理値分析を行うことにより，(1)から読み取られる真理条件がこの式の真理条件と一致していることを確認せよ.

問題 3　次の論理式を完全選言標準形に同値変形することにより，それが恒真であるか否かを判定せよ：
(1) $((P \to Q)\,\&\,P) \to Q$　(2) $((P \to Q)\,\&\,{\sim}P) \to {\sim}Q$

3. 連言標準形

連言標準形　リテラルの選言のみを連言肢とする連言文の形式は，**連言標準形** (conjunctive normal form, CNF) と呼ばれる．また，連言標準形の連言肢（これはリテラルの選言である）は**選言節**と呼ばれる．（なお，選言肢を 1 つしか持たない選言節や，選言節を 1 つしか持たない連言標準形も認めることにする．）

連言標準形の例　$(P \lor Q)\,\&\,({\sim}P \lor Q \lor {\sim}R)$, $(P \lor Q \lor {\sim}R)\,\&\,(Q \lor {\sim}R \lor S)\,\&\,({\sim}P \lor R \lor S)$, $P \lor Q \lor {\sim}R$, $P\,\&\,Q$, ${\sim}P$

いかなる論理式も，それと同値な連言標準形に変形することができる．

与えられた論理式を連言標準形に変形するためには，次の操作を順次実行すればよい：

(i)［$\to, \leftrightarrow$ の消去］(ii)［ド・モルガンの法則の適用］は選言標準形の場合と同じ．
(iii) 分配法則を適用して，選言がリテラルのみを結ぶ形に変形する．ここで用いられる分配法則は次のとおりである：
$\mathrm{A} \lor (\mathrm{B}_1\,\&\,\mathrm{B}_2\,\&\ldots\&\,\mathrm{B}_n) \dashv\vDash (\mathrm{A} \lor \mathrm{B}_1)\,\&\,(\mathrm{A} \lor \mathrm{B}_2)\,\&\ldots\&\,(\mathrm{A} \lor \mathrm{B}_n)$
$(\mathrm{B}_1\,\&\,\mathrm{B}_2\,\&\ldots\&\,\mathrm{B}_n) \lor \mathrm{A} \dashv\vDash (\mathrm{B}_1 \lor \mathrm{A})\,\&\,(\mathrm{B}_2 \lor \mathrm{A})\,\&\ldots\&\,(\mathrm{B}_n \lor \mathrm{A})$
(iv) 不必要なカッコ（すなわち，連言文である部分式を囲むカッコ）を除去する．

* この段階で連言標準形が得られるが，さらに次の操作を行うと，より簡潔な連言標準形が得られる．

(v) (a) 選言節内の重複するリテラルを 1 つを残して除去する．(b) 選言節内のリテラルをアルファベット順に並べ換える．(c) 重複する選言節を 1 つを残して除去する．(d) 恒真である選言節を除去する（この操作は，真理値分析において連言文から連言肢としての T を除去する操作に対応する）．ただし，すべての選言節が恒真である場合には，1 つの選言節を残しておく．

例 3　論理式 $P \to {\sim}(Q \to {\sim}R)$ を連言標準形に同値変形する過程は次のとおりである：

${\sim}P \lor {\sim}({\sim}Q \lor {\sim}R)$	［→の消去］
${\sim}P \lor ({\sim}{\sim}Q\,\&\,{\sim}{\sim}R)$	［ド・モルガンの法則］
${\sim}P \lor (Q\,\&\,R)$	［二重否定の除去］
$({\sim}P \lor Q)\,\&\,({\sim}P \lor R)$	［分配法則］

例 4　論理式 $(P \to Q) \to (Q \to R)$ を連言標準形に同値変形する過程は次のとおりである：

${\sim}({\sim}P \lor Q) \lor ({\sim}Q \lor R)$	［→の消去］
$({\sim}{\sim}P\,\&\,{\sim}Q) \lor ({\sim}Q \lor R)$	［ド・モルガンの法則］
$(P\,\&\,{\sim}Q) \lor ({\sim}Q \lor R)$	［二重否定の除去］
$(P \lor ({\sim}Q \lor R))\,\&\,({\sim}Q \lor ({\sim}Q \lor R))$	［分配法則］
$(P \lor {\sim}Q \lor R)\,\&\,({\sim}Q \lor {\sim}Q \lor R)$	［カッコの除去］
$(P \lor {\sim}Q \lor R)\,\&\,({\sim}Q \lor R)$	［重複するリテラルの除去］

* なお，この式は ${\sim}Q \lor R$ と同値である（吸収律 $\mathrm{A} \dashv\vDash \mathrm{A}\,\&\,(\mathrm{A} \lor \mathrm{B})$ を用いて同値変形）．

問題 4　次の論理式を連言標準形に変形せよ：$S \to {\sim}((P \to Q) \to R)$

連言標準形と恒真性　連言標準形が恒真であるのは，その選言節のすべてが恒真であるときであり，またそのときに限られる．ところで，選言節が恒真であるのは，そこに相矛盾するリテラルの組が現れる（すなわち，命題変項とその否定がともに現れる）ときであり，またそのときに限られる．したがって，連言標準形が恒真であるのは，そのすべての選言節に相矛盾するリテラルの組が現れるときであり，またそのときに限られる．（あるいは，上の(v)(d)の操作を適用済みである場合には，相矛盾するリテラルを含む 1 つの選言節に還元されるときであり，またそのときに限られる．）この規準を用いると，任意の式をそれと同値な連言標準形に変形することによって，それが恒真か否かを判定することができる．

4. 完全連言標準形

ある論理式が連言標準形であり，そこに現れるすべての命題変項が，そのすべての選言節に現れる場合，その式は**完全連言標準形** (canonical conjunctive normal form) であると言われる．

完全連言標準形の例

$(P \vee Q \vee {\sim}R) \,\&\, (P \vee {\sim}Q \vee {\sim}R) \,\&\, (P \vee {\sim}Q \vee {\sim}R)$
$(P \vee Q \vee {\sim}R \vee S) \,\&\, (P \vee {\sim}Q \vee R \vee {\sim}S) \,\&\, ({\sim}P \vee Q \vee {\sim}R \vee S) \,\&\, ({\sim}P \vee {\sim}Q \vee R \vee {\sim}S)$

任意の連言標準形は完全連言標準形に同値変形することができる.

例　前節の例 3 で得られた連言標準形

$({\sim}P \vee Q) \,\&\, ({\sim}P \vee R)$

は完全連言標準形ではない．まず，第 1 の選言節${\sim}P \vee Q$ には R が現れていない．しかし，この選言節は $({\sim}P \vee Q) \vee (R \,\&\, {\sim}R)$ と同値である．これに分配法則を適用して不必要なカッコを除去すると，次のように同値変形できる：$({\sim}P \vee Q \vee R) \,\&\, ({\sim}P \vee Q \vee {\sim}R)$. したがって，第 1 の選言節をこの式で置き換えれば，R の欠如を補うことができる．次に，第 2 の選言節${\sim}P \vee R$ には Q が現れていないが，この選言節は $({\sim}P \vee R) \vee (Q \,\&\, {\sim}Q)$ と同値である．これに分配法則を適用して不必要なカッコを除去し，さらにリテラルをアルファベット順に並べ換えると，次のように同値変形できる：$({\sim}P \vee Q \vee R) \,\&\, ({\sim}P \vee {\sim}Q \vee R)$. 第 2 の選言節をこの式で置き換えれば，$Q$ の欠如を補うことができる．これらの置き換えを行うと，次の式が得られる：

$(({\sim}P \vee Q \vee R) \,\&\, ({\sim}P \vee Q \vee {\sim}R)) \,\&\, (({\sim}P \vee Q \vee R) \,\&\, ({\sim}P \vee {\sim}Q \vee R))$

ここから不必要なカッコを除去し，さらに重複する選言節を 1 つを残して除去すると，次の完全連言標準形が得られる：

(2)　　$({\sim}P \vee Q \vee R) \,\&\, ({\sim}P \vee Q \vee {\sim}R) \,\&\, ({\sim}P \vee {\sim}Q \vee R)$

完全連言標準形と真理表　完全連言標準形からは，それが命題変項に対するどのような真理値割り当てのもとで偽になるかを容易に読み取ることができる．なぜなら，連言標準形が偽になるのは，その選言節の少なくとも 1 つが偽であるときであり，そのときに限られる．そして完全連言標準形の選言節が命題変項に対する真理値のどのような割り当てのもとで偽となるかは直ちに明らかである．例えば，(2)の第 1，第 2，第 3 の選言節のそれぞれを偽にする P, Q, R に対する真理値の割り当ては，<T, ⊥, ⊥>, <T, ⊥, T>, <T, T, ⊥> であり，これらのみである．したがって(2)が偽になるのは，P, Q, R がこれらのいずれかの真理値の組み合わせをとるときであり，かつそのとき限られる．そして，これらの割り当てはそれぞれ真理表の 4 行目，3 行目，2 行目に対応する．したがって，(2)の真理表は，これらの行で⊥，これら以外の行で T を示すものであり，またそれが例 3 のもとの論理式の真理表に他ならない．

完全連言標準形と恒偽性　完全連言標準形の 1 つの選言節は，その標準形を偽にする命題変項への真理値の割り当ての 1 つに対応するという事実を考えると，次のことが分かる：n 個の命題変項を含む完全連言標準形（重複する選言節は除去されているものとする）が恒偽であるのは，それが 2^n 個の選言節を持つときであり，かつそのときに限られる．

問題 5　例 3 の論理式 $P \rightarrow {\sim}(Q \rightarrow {\sim}R)$ の真理表を直接作成するか，またはクワインの方法を用いてその真理値分析を行うことにより，(2)がこの式が偽になる正しい条件を与えていることを確認せよ．

標準形　解答

問題 1　次の論理式を選言標準形に変形せよ：$S \to \sim((P \to Q) \to R)$

$S \to \sim((P \to Q) \to R)$
$\sim S \vee \sim((\sim P \vee Q) \to R)$
$\sim S \vee \sim(\sim(\sim P \vee Q) \vee R)$
$\sim S \vee (\sim\sim(\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim R)$
$\sim S \vee ((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim R)$
$\sim S \vee ((\sim P \mathbin{\&} \sim R) \vee (Q \mathbin{\&} \sim R))$
$\sim S \vee (\sim P \mathbin{\&} \sim R) \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)$

問題 2

$(\sim P \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\sim P \mathbin{\&} Q))$

P	Q	R	$\sim P$	$\sim R$	$Q \mathbin{\&} \sim R$	$\sim P \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)$	$\sim P \mathbin{\&} Q$	$R \to (\sim P \mathbin{\&} Q)$	$\sim(R \to (\sim P \mathbin{\&} Q))$	$(\sim P \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\sim P \mathbin{\&} Q))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$

$(\sim P \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\sim P \mathbin{\&} Q))$

$(\sim\top \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\sim\top \mathbin{\&} Q))$
$(\bot \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\bot \mathbin{\&} Q))$
$(Q \mathbin{\&} \sim R) \to \sim(R \to \bot)$
$(Q \mathbin{\&} \sim R) \to \sim\sim R$
$(Q \mathbin{\&} \sim R) \to R$
$(\top \mathbin{\&} \sim R) \to R$　　$(\bot \mathbin{\&} \sim R) \to R$
$\sim R \to R$　　$\bot \to R$
$\sim\top \to \top$　$\sim\bot \to \bot$　$\top$
$\bot \to \top$　$\top \to \bot$
$\top$　$\bot$

$(\sim\bot \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\sim\bot \mathbin{\&} Q))$
$(\top \vee (Q \mathbin{\&} \sim R)) \to \sim(R \to (\top \mathbin{\&} Q))$
$\top \to \sim(R \to Q)$
$\sim(R \to Q)$
$\sim(R \to \top)$　　$\sim(R \to \bot)$
$\sim\top$　　$\sim\sim R$
$\bot$　　R
$\top$　$\bot$

問題 3　次の論理式を完全選言標準形に同値変形することにより，それが恒真であるか否かを判定せよ：
(1) $((P \to Q) \mathbin{\&} P) \to Q$　(2) $((P \to Q) \mathbin{\&} \sim P) \to \sim Q$

(1) $((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} P) \to Q$
$\sim((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} P) \vee Q$
$(\sim(\sim P \vee Q) \vee \sim P) \vee Q$
$((\sim\sim P \mathbin{\&} \sim Q) \vee \sim P) \vee Q$
$((P \mathbin{\&} \sim Q) \vee \sim P) \vee Q$
$(P \mathbin{\&} \sim Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} (Q \vee \sim Q)) \vee ((P \vee \sim P) \mathbin{\&} Q)$
$(P \mathbin{\&} \sim Q) \vee ((\sim P \mathbin{\&} Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} \sim Q)) \vee ((P \mathbin{\&} Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} Q))$
$(P \mathbin{\&} \sim Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} \sim Q) \vee (P \mathbin{\&} Q)$

この完全選言標準形は 2^2 個の連言節を持つので，もとの式は恒真である．

(2) $((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim P) \to \sim Q$
$\sim((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim P) \vee \sim Q$
$(\sim(\sim P \vee Q) \vee \sim\sim P) \vee \sim Q$
$((\sim\sim P \mathbin{\&} \sim Q) \vee \sim\sim P) \vee \sim Q$
$((P \mathbin{\&} \sim Q) \vee P) \vee \sim Q$
$(P \mathbin{\&} \sim Q) \vee P \vee \sim Q$
$(P \mathbin{\&} \sim Q) \vee (P \mathbin{\&} (Q \vee \sim Q)) \vee ((P \vee \sim P) \mathbin{\&} \sim Q)$
$(P \mathbin{\&} Q) \vee (P \mathbin{\&} \sim Q) \vee (\sim P \mathbin{\&} \sim Q)$

この完全選言標準形は 2^2 個の連言節を持たないから，もとの式は恒真ではない．

問題 4　次の論理式を連言標準形に変形せよ：$S \to \sim((P \to Q) \to R)$

$S \to \sim((P \to Q) \to R)$
$\sim S \vee \sim((\sim P \vee Q) \to R)$
$\sim S \vee \sim(\sim(\sim P \vee Q) \vee R)$
$\sim S \vee (\sim\sim(\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim R)$
$\sim S \vee ((\sim P \vee Q) \mathbin{\&} \sim R)$
$(\sim S \vee (\sim P \vee Q)) \mathbin{\&} (\sim S \vee \sim R)$
$(\sim S \vee \sim P \vee Q) \mathbin{\&} (\sim S \vee \sim R)$
$(\sim P \vee Q \vee \sim S) \mathbin{\&} (\sim R \vee \sim S)$

問題 5

$P \to \sim(Q \to \sim R)$

P	Q	R	$\sim R$	$Q \to \sim R$	$\sim(Q \to \sim R)$	$P \to \sim(Q \to \sim R)$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤