

派生規則としての $\exists I$ と $\exists E$

$\exists x(\dots x \dots)$ を $\sim \forall x \sim (\dots x \dots)$ によって定義すれば, $\exists I$ および $\exists E$ を派生規則として導くことができる.

1. $\exists I$ の導出

$\exists I$ は次の規則と考えることができる:

$\exists I$ もし $X \vdash Fa$ ならば $X \vdash \exists xFx$

$X \vdash Fa$ と仮定する. このとき,

X	(1) Fa	$X \vdash Fa$ による
2	(2) $\forall x \sim Fx$	A
2	(3) $\sim Fa$	2 $\forall E$
$X \cup \{2\}$	(4) $Fa \ \& \ \sim Fa$	1,3 $\&I$
X	(5) $\sim \forall x \sim Fx$	2-4 RAA

すなわち,

$X \vdash \sim \forall x \sim Fx$

したがって, 定義により

$X \vdash \exists xFx$

以上により $\exists I$ が成り立つことが示された.

2. $\exists E$ の導出

$\exists E$ は単純化された形では次の規則と考えることができる:

$\exists E^*$ もし $X \cup \{Fa\} \vdash C$ ならば $X \cup \{\exists xFx\} \vdash C$
 a は C にも X にも含まれる仮定にも現れないものとする.

$X \cup \{Fa\} \vdash C$ と仮定する. このとき,

1	(1) Fa	A
	\vdots	
$X \cup \{1\}$	(2) C	$X \cup \{Fa\} \vdash C$ による
X	(3) $Fa \rightarrow C$	1-2 CP
X	(4) $\sim C \rightarrow \sim Fa$	3 $Trans.$
5	(5) $\sim C$	A
$X \cup \{5\}$	(6) $\sim Fa$	4,5 MP
$X \cup \{5\}$	(7) $\forall x \sim Fx$	6 $\forall I$
X	(8) $\sim C \rightarrow \forall x \sim Fx$	5-7 CP
X	(9) $\sim \forall x \sim Fx \rightarrow \sim \sim C$	8 $Trans.$
10	(10) $\sim \forall x \sim Fx$	A
$X \cup \{10\}$	(11) $\sim \sim C$	9,10 MP
$X \cup \{10\}$	(12) C	11 DNE

すなわち,

$X \cup \{\sim \forall x \sim Fx\} \vdash C$

したがって、定義により

$X \cup \{\exists x Fx\} \vdash C$

以上により $\exists E^*$ が成り立つことが示された。(なお、上の演繹において仮定の集合 $X \cup \{5\}$ に含まれる仮定には a は現れない。したがって、7行目における $\forall I$ の適用は適切である。)

補足 $\exists E$ はより一般的には次の規則と考えられる：

$\exists E$ もし $X \cup \{Fa\} \vdash C$ かつ $Y \vdash \exists x Fx$ ならば $X \cup Y \vdash C$
 a は C にも X にも含まれる仮定にも現れないものとする。

これは上の $\exists E^*$ から導くことができる。すなわち、 $X \cup \{Fa\} \vdash C$ かつ $Y \vdash \exists x Fx$ と仮定する。このとき

1	(1) $\exists x Fx$	A
2	(2) Fa	A
	\vdots	
$X \cup \{2\}$	(3) C	$X \cup \{Fa\} \vdash C$ による
$X \cup \{1\}$	(4) C	1,2-3 $\exists E^*$
X	(5) $\exists x Fx \rightarrow C$	1-4 CP
Y	(6) $\exists x Fx$	$Y \vdash \exists x Fx$ による
$X \cup Y$	(7) C	5,6 MP

すなわち、 $X \cup Y \vdash C$ 。以上により一般的な形で $\exists E$ が成り立つことが示された。