

自然演繹の手引き

1. 仮定および仮定から導かれた式の使用法

1.1 条件文 $A \rightarrow B$

- (a) A を導き, $A \rightarrow B$ とあわせて肯定式 **MP** を使用して B を得る.
- (b) $\sim B$ を導き, $A \rightarrow B$ とあわせて否定式 **MT** を使用して $\sim A$ を得る.

1.2 連言文 $A \& B$

連言除去**&E**を用いて, A および B を導く.

1.3 選言文 $A \vee B$

- (a) 選言肢の否定 $\sim A$ (または $\sim B$)を導き, $A \vee B$ とあわせて否定肯定式 **MTP** を使用して B (または A)を得る.
- (b) 導くべき式が C である場合, 《 A を仮定すると C が導ける》こと, および, 《 B を仮定すると C が導ける》ことを示し, これらを $A \vee B$ とあわせて選言除去 **$\vee E$** を使用して C を得る.
- (b') 導くべき式が C である場合, 条件文 $A \rightarrow C$ および $B \rightarrow C$ を導き, これらを $A \vee B$ とあわせて単純構成的両刀論法 **SCD** を使用して C を得る.

1.4 双条件文 $A \leftrightarrow B$

定義による書き換え **Df. \leftrightarrow** を用いて $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ を導き, 連言除去**&E**を使用して $A \rightarrow B$ および $B \rightarrow A$ を得る.

2. 導くべき式の形式による演繹の方針の立て方

2.1 導くべき式が連言文 $A \& B$ である場合

A および B をそれぞれ導き, 連言導入**&I**を使用する.

2.2 導くべき式が条件文 $A \rightarrow B$ である場合

A を仮定して B を導き, 条件的証明 **CP** を使用する. (なお, すでに B が得られている場合は, 直ちに **CP** を使用して $A \rightarrow B$ を得ることができる.)

2.3 導くべき式が否定文 $\sim A$ である場合

A を仮定して矛盾を導き, 背理法 **RAA** を使用する.

2.4 導くべき式が選言文 $A \vee B$ である場合

- (a) A または B を導いてから選言導入 **$\vee I$** を使用する. ただし, 最終的な結論(すなわち連式の右辺)を導く最後の段階でこの方針が有効である場合はまれである.
 - (b) $\sim(A \vee B)$ を仮定して矛盾を導き, 背理法 **RAA** を使用して $\sim\sim(A \vee B)$ を導いてから二重否定除去の規則 **DNE** を使用する. (この際, 派生規則であるド・モルガンの法則 **De M.**を用いると演繹が短縮できる.) これは以下の **2.6(a)**の特殊ケースとも考えられる.
 - (c) まず $\sim A$ を仮定して B を導き, 条件的証明 **CP** を用いて $\sim A \rightarrow B$ を導く. これに対して派生規則である条件選言 **CD** を使用する.
- *なお, 選言文を導くためには以下の **2.6(b)**の方針に従う場合が有効であることも多い. すなわち, 仮定あるいは仮定から導かれた式のひとつが $A \vee B$ であり, 導くべき結論が **D \vee E** である場合, 《 A を仮定すると **D \vee E** が導ける》こと, および《 B を仮定すると **D \vee E** が導ける》ことを示し, $A \vee B$ とあわせて選言除去 **$\vee E$** を使用するのである.

2.5 導くべき式が双条件文 $A \leftrightarrow B$ である場合

$A \rightarrow B$ および $B \rightarrow A$ を導き，連言導入 $\&I$ を用いて $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ を導いてから定義による書き換え $Df.\leftrightarrow$ を用いる．

2.6 上のいずれも有効でない場合

- (a) 導くべき式 A の否定 $\sim A$ を仮定して矛盾を導き，背理法 RAA を使用して $\sim\sim A$ を導いてから二重否定除去の規則 DNE を使用する．
- (b) 仮定または仮定から得られた式のひとつが選言文 $A \vee B$ であり，導くべき式が C である場合，「 A を仮定すると C が導ける」こと，および，「 B を仮定すると C が導ける」ことを示し，選言除去 $\vee E$ を使用する．
- (c) 導くべき式が C である場合，適切な形の排中律 $A \vee \sim A$ を導入し，「 A を仮定すると C が導ける」こと，および，「 $\sim A$ を仮定すると C が導ける」ことを示し，選言除去 $\vee E$ を使用する．