

## 派生規則と対応する連式番号

### 1. ド・モルガンの法則 (De M.)

$\sim(A \vee B) \vdash \sim A \& \sim B$  (9-[2])

$\sim(A \& B) \vdash \sim A \vee \sim B$  (9-[1])

### 2. 排中律 (LEM)

$\vdash A \vee \sim A$  (7-[5])

### 3. 条件文の否定 (NC)

$\sim(A \rightarrow B) \vdash A \& \sim B$  (9-[5])

### 4. 条件-選言 (CD)

$A \rightarrow B \vdash \sim A \vee B$  (9-[3])

$\sim A \rightarrow B \vdash A \vee B$  (9-[4])

### 5. ex falso quodlibet (EFQ)

$A \& \sim A \vdash B$  (7-[16])

$\perp \vdash B$

(これに対応する連式は 7-[16] の証明における  $P \& \sim P$  を  $\perp$  に変えることによって得られる.)

### 6. 実質含意のパラドクス (PMI)

$\sim A \vdash A \rightarrow B$

(これに対応する連式は EFQ を用いることによって容易に得られる.)

### 7. 対偶の法則 (Trans.)

$A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow \sim A$  (3-[1])

### 8. 仮言三段論法 (HS)

$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$  (3-[3])

### 9. 交換法則 (Com.)

$A \& B \vdash B \& A$  (4-[1])

$A \vee B \vdash B \vee A$  (6-[3])

### 10. 結合法則 (Assoc.)

$A \& (B \& C) \vdash (A \& B) \& C$  (4-[8])

$A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$  (6-[7])

### 11. 分配法則 (Dist.)

$A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$  (6-[6])

$A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$  (6-[7])

MT, DNI, MTP, SCD に対応する連式は他の原始規則 (A, MP, DNE, CP, &I, &E,  $\vee$ I,  $\vee$ E, RAA) から導くことができる.

否定式 MT

$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $\sim Q$	A
3	(3) $P$	A
1,3	(4) $Q$	1,3 MP
1,2,3	(5) $Q \& \sim Q$	2,4 &I
1,2	(6) $\sim P$	3-5 RAA

二重否定導入 DNI

$P \vdash \sim\sim P$ 

1	(1) $P$	A
2	(2) $\sim P$	A
1,2	(3) $P \& \sim P$	1,2 &I
1	(4) $\sim\sim P$	2-3 RAA
1	(6) $Q$	5 DNE

否定肯定式 MTP

 $P \vee Q, \sim P \vdash Q$ 

1	(1) $P \vee Q$	A
2	(2) $\sim P$	A
3	(3) $P$	A
2,3	(4) $P \& \sim P$	2,3 &I
2,3	(5) $Q$	4 EFQ
6	(6) $Q$	A
1,2	(7) $Q$	1,3-5,6-6 $\vee E$

(5 行目で EFQ が用いられているが, EFQ に対応する連式自体は MT, DNI, MTP, SCD 以外の原始規則によって導かれている.)

単純構成的両刀論法 SCD

 $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \vdash R$ 

1	(1) $P \vee Q$	A
2	(2) $P \rightarrow R$	A
3	(3) $Q \rightarrow R$	A
4	(4) $P$	A
2,4	(5) $R$	2,4 MP
6	(6) $Q$	A
3,6	(7) $R$	3,6 MP
1,2,3	(8) $R$	1,4-5,6-7 $\vee E$

以上により, 必要な原始規則は A, MP, DNE, CP, &I, &E,  $\vee I$ ,  $\vee E$ , RAA のみであることが示された.

なお, DNE を LEM と EFQ で置き換えることによって, 同じ証明力を持つ自然演繹の体系が得られる.

LEM と EFQ を用いた DNE の証明.

1	(1) $\sim\sim P$	A
	(2) $P \vee \sim P$	LEM
3	(3) $P$	A
4	(4) $\sim P$	A
1,4	(5) $\sim P \& \sim\sim P$	1,4 &I
1,4	(6) $P$	5 EFQ
1	(8) $P$	2,3-3,4-6 $\vee E$