

問題 10 解答

[1] $\sim(P \vee Q), \sim P \rightarrow (R \rightarrow S), \sim R \rightarrow Q \vdash S$

| | | |
|-------|--|---------|
| 1 | (1) $\sim(P \vee Q)$ | A |
| 2 | (2) $\sim P \rightarrow (R \rightarrow S)$ | A |
| 3 | (3) $\sim R \rightarrow Q$ | A |
| 1 | (4) $\sim P \& \sim Q$ | 1 De M. |
| 1 | (5) $\sim P$ | 4 &E |
| 1 | (6) $\sim Q$ | 4 &E |
| 1,2 | (7) $R \rightarrow S$ | 2,5 MP |
| 1,3 | (8) $\sim \sim R$ | 3,6 MT |
| 1,3 | (9) R | 8 DNE |
| 1,2,3 | (10) S | 7,9 MP |

[2] $P \rightarrow R, Q \rightarrow \sim(R \& S) \vdash (P \& Q) \rightarrow \sim S$

| | | |
|-------|------------------------------------|---------|
| 1 | (1) $P \rightarrow R$ | A |
| 2 | (2) $Q \rightarrow \sim(R \& S)$ | A |
| 3 | (3) $P \& Q$ | A |
| 3 | (4) P | 3 &E |
| 3 | (5) Q | 3 &E |
| 1,3 | (6) R | 1,4 MP |
| 2,3 | (7) $\sim(R \& S)$ | 2,5 MP |
| 2,3 | (8) $\sim R \vee \sim S$ | De M. |
| 1,3 | (9) $\sim \sim R$ | 6 DNI |
| 1,2,3 | (10) $\sim S$ | 8,9 MTP |
| 1,2 | (11) $(P \& Q) \rightarrow \sim S$ | 3-10 CP |

[3] $S \vee (Q \rightarrow P), \sim P \rightarrow (Q \vee S) \vdash P \vee S$

| | | |
|-------|-------------------------------------|----------|
| 1 | (1) $S \vee (Q \rightarrow P)$ | A |
| 2 | (2) $\sim P \rightarrow (Q \vee S)$ | A |
| 3 | (3) $\sim(P \vee S)$ | A |
| 3 | (4) $\sim P \& \sim S$ | 3 De M. |
| 3 | (5) $\sim P$ | 4 &E |
| 3 | (6) $\sim S$ | 4 &E |
| 1,3 | (7) $Q \rightarrow P$ | 1,6 MTP |
| 2,3 | (8) $Q \vee S$ | 2,5 MP |
| 2,3 | (9) Q | 6,8 MTP |
| 1,2,3 | (10) P | 7,9 MP |
| 1,2,3 | (11) $P \& \sim P$ | 5,10 &I |
| 1,2 | (12) $\sim \sim(P \vee S)$ | 3-11 RAA |
| 1,2 | (13) $P \vee S$ | 12 DNE |

[別解]

| | | |
|---------|-------------------------------------|---------|
| 1 | (1) $S \vee (Q \rightarrow P)$ | A |
| 2 | (2) $\sim P \rightarrow (Q \vee S)$ | A |
| 3 | (3) $\sim P$ | A |
| 4 | (4) $\sim S$ | A |
| 2,3 | (5) $Q \vee S$ | 2,3 MP |
| 1,4 | (6) $Q \rightarrow P$ | 1,4 MTP |
| 2,3,4 | (7) Q | 4,5 MTP |
| 1,2,3,4 | (8) P | 6,7 MP |
| 1,2,3,4 | (9) $P \& \sim P$ | 3,8 &I |
| 1,2,3 | (10) $\sim \sim S$ | 4-9 RAA |
| 1,2,3 | (11) S | 10 DNE |
| 1,2 | (12) $\sim P \rightarrow S$ | 3-11 CP |
| 1,2 | (13) $P \vee S$ | 12 CD |

[4] $(P \vee Q) \rightarrow V, S \rightarrow P, Q \vee \sim U, S \vee U \vdash V$

| | | |
|---|--------------------------------|---|
| 1 | (1) $(P \vee Q) \rightarrow V$ | A |
| 2 | (2) $S \rightarrow P$ | A |
| 3 | (3) $Q \vee \sim U$ | A |

| | | |
|---------|-----------------|---------------------|
| 4 | (4) $S \vee U$ | A |
| 5 | (5) Q | A |
| 5 | (6) $P \vee Q$ | 5 \vee I |
| 1,5 | (7) V | 1,6 MP |
| 8 | (8) $\sim U$ | A |
| 4,8 | (9) S | 4,8 MTP |
| 2,4,8 | (10) P | 2,9 MP |
| 2,4,8 | (11) $P \vee Q$ | 10 \vee I |
| 2,4,8 | (12) V | 1,11 MP |
| 1,2,3,4 | (13) V | 3,5-7,8-12 \vee E |

[別解]

| | | |
|-----------|--------------------------------|----------|
| 1 | (1) $(P \vee Q) \rightarrow V$ | A |
| 2 | (2) $S \rightarrow P$ | A |
| 3 | (3) $Q \vee \sim U$ | A |
| 4 | (4) $S \vee U$ | A |
| 5 | (5) $\sim V$ | A |
| 1,5 | (6) $\sim(P \vee Q)$ | 1,5 MT |
| 1,5 | (7) $\sim P \& \sim Q$ | 6 De M. |
| 1,5 | (8) $\sim P$ | 7 &E |
| 1,5 | (9) $\sim Q$ | 7 &E |
| 1,2,5 | (10) $\sim S$ | 2,8 MT |
| 1,2,4,5 | (11) U | 4,10 MTP |
| 1,2,4,5 | (12) $\sim \sim U$ | 11 DNI |
| 1,2,3,4,5 | (13) Q | 3,12 MTP |
| 1,2,3,4,5 | (14) $Q \& \sim Q$ | 9,13 &I |
| 1,2,3,4 | (15) $\sim \sim V$ | 5-14 RAA |
| 1,2,3,4 | (16) V | 15 DNE |

[5] $\sim(P \vee Q) \rightarrow (R \rightarrow S), Q \rightarrow P \vdash R \rightarrow (P \vee S)$

| | | |
|---------|--|----------|
| 1 | (1) $\sim(P \vee Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$ | A |
| 2 | (2) $Q \rightarrow P$ | A |
| 3 | (3) R | A |
| 4 | (4) $\sim(P \vee S)$ | A |
| 4 | (5) $\sim P \& \sim S$ | 4 De M. |
| 4 | (6) $\sim P$ | 5 &E |
| 4 | (7) $\sim S$ | 5 &E |
| 2,4 | (8) $\sim Q$ | 2,6 MT |
| 2,4 | (9) $\sim P \& \sim Q$ | 6,8 &I |
| 2,4 | (10) $\sim(P \vee Q)$ | 9 De M. |
| 1,2,4 | (11) $R \rightarrow S$ | 1,10 MP |
| 1,2,3,4 | (12) S | 3,11 MP |
| 1,2,3,4 | (13) $S \& \sim S$ | 7,12 &I |
| 1,2,3 | (14) $\sim \sim(P \vee S)$ | 4-13 RAA |
| 1,2,3 | (15) $P \vee S$ | 14 DN |
| 1,2 | (16) $R \rightarrow (P \vee S)$ | 3-15 CP |

[6] $(P \& \sim Q) \rightarrow S, \sim P \rightarrow (Q \vee \sim R) \vdash \sim(Q \vee S) \rightarrow \sim R$

| | | |
|-------|--|----------|
| 1 | (1) $(P \& \sim Q) \rightarrow S$ | A |
| 2 | (2) $\sim P \rightarrow (Q \vee \sim R)$ | A |
| 3 | (3) $\sim(Q \vee S)$ | A |
| 3 | (4) $\sim Q \& \sim S$ | 3 De M. |
| 3 | (5) $\sim Q$ | 4 &E |
| 3 | (6) $\sim S$ | 4 &E |
| 1,3 | (7) $\sim(P \& \sim Q)$ | 1,6 MT |
| 1,3 | (8) $\sim P \vee \sim \sim Q$ | 7 De M. |
| 3 | (9) $\sim \sim \sim Q$ | 5 DNI |
| 1,3 | (10) $\sim P$ | 8,9 MTP |
| 1,2,3 | (11) $Q \vee \sim R$ | 2,10 MP |
| 1,2,3 | (11) $\sim R$ | 5,11 MTP |
| 1,2 | (12) $\sim(Q \vee S) \rightarrow \sim R$ | 3-11 CP |

[7] $\sim P \rightarrow \sim R, Q \vee S \vdash \sim(P \& Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$

| | | |
|---------|---|---------|
| 1 | (1) $\sim P \rightarrow \sim R$ | A |
| 2 | (2) $Q \vee S$ | A |
| 3 | (3) $\sim(P \& Q)$ | A |
| 4 | (4) R | A |
| 4 | (5) $\sim\sim R$ | 4 DNI |
| 1,4 | (6) $\sim\sim P$ | 1,5 MTP |
| 3 | (7) $\sim P \vee \sim Q$ | 3 De M. |
| 1,3,4 | (8) $\sim Q$ | 6,7 MTP |
| 1,2,3,4 | (9) S | 2,8 MTP |
| 1,2,3 | (10) $R \rightarrow S$ | 4-9 CP |
| 1,2 | (11) $\sim(P \& Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$ | 3-10 CP |

[8] $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S)), \sim(Q \& \sim S) \rightarrow (P \vee R),$
 $\sim Q \rightarrow \sim P \vdash (P \& Q) \vee R$

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | (1) $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S))$ | A |
| 2 | (2) $\sim(Q \& \sim S) \rightarrow (P \vee R)$ | A |
| 3 | (3) $\sim Q \rightarrow \sim P$ | A |
| 4 | (4) $\sim((P \& Q) \vee R)$ | A |
| 4 | (5) $\sim(P \& Q) \& \sim R$ | 4 De M. |
| 5 | (6) P | A |
| 5 | (7) $\sim\sim P$ | 6 DNI |
| 3,5 | (8) $\sim\sim Q$ | 3,7 MT |
| 3,5 | (9) Q | 8 DNE |
| 3,5 | (10) $P \& Q$ | 6,9 &I |
| 4 | (11) $\sim(P \& Q)$ | 5 &E |
| 3,4,5 | (12) $(P \& Q) \& \sim(P \& Q)$ | 10,11 &I |
| 3,4 | (13) $\sim P$ | 6-12 RAA |
| 1,3,4 | (14) $Q \rightarrow (R \vee S)$ | 1,13 MP |
| 15 | (15) $Q \& \sim S$ | A |
| 15 | (16) Q | 15 &E |
| 15 | (17) $\sim S$ | 15 &E |
| 1,3,4,15 | (18) $R \vee S$ | 14,16 MP |
| 1,3,4,15 | (19) R | 17,18 MTP |
| 4 | (20) $\sim R$ | 5 &E |
| 1,3,4,15 | (21) $R \& \sim R$ | 19,20 &I |
| 1,3,4 | (22) $\sim(Q \& \sim S)$ | 15-21 RAA |
| 1,2,3,4 | (23) $P \vee R$ | 2,22 MP |
| 1,2,3,4 | (24) P | 20,23 MTP |
| 1,2,3,4 | (25) $P \& \sim P$ | 13,24 &I |
| 1,2,3 | (26) $\sim\sim((P \& Q) \vee R)$ | 4-25 RAA |
| 1,2,3 | (27) $(P \& Q) \vee R$ | 26 DNE |

[9] $\sim(P \& \sim Q) \vee (\sim R \rightarrow S), \sim S \& \sim Q,$

$U \rightarrow (\sim S \rightarrow (\sim R \vee P)) \vdash (P \leftrightarrow \sim R) \rightarrow \sim U$

| | | |
|--------|--|-------------------------|
| 1 | (1) $\sim(P \& \sim Q) \vee (\sim R \rightarrow S)$ | A |
| 2 | (2) $\sim S \& \sim Q$ | A |
| 3 | (3) $U \rightarrow (\sim S \rightarrow (\sim R \vee P))$ | A |
| 4 | (4) $P \leftrightarrow \sim R$ | A |
| 5 | (5) U | A |
| 4 | (6) $(P \rightarrow \sim R) \& (\sim R \rightarrow P)$ | 4 Df. \leftrightarrow |
| 4 | (7) $P \rightarrow \sim R$ | 6 &E |
| 4 | (8) $\sim R \rightarrow P$ | 6 &E |
| 3,5 | (9) $\sim S \rightarrow (\sim R \vee P)$ | 3,5 MP |
| 2 | (10) $\sim S$ | 2 &E |
| 2 | (11) $\sim Q$ | 2 &E |
| 12 | (12) P | A |
| 2,12 | (13) $P \& \sim Q$ | 11,12 &I |
| 2,12 | (14) $\sim\sim(P \& \sim Q)$ | 13 DNI |
| 1,2,12 | (15) $\sim R \rightarrow S$ | 1,14 MTP |
| 4,12 | (16) $\sim R$ | 7,12 MP |

1,2,4,12 (17) S

1,2,4,12 (18) $S \& \sim S$

1,2,4 (19) $\sim P$

2,3,5 (20) $\sim R \vee P$

1,2,3,4,5 (21) $\sim R$

1,2,3,4,5 (22) P

1,2,3,4,5 (23) $P \& \sim P$

1,2,3,4 (24) $\sim U$

1,2,3 (25) $(P \leftrightarrow \sim R) \rightarrow \sim U$

15,16 MP

10,17 &I

12-18 RAA

9,10 MP

19,20 MTP

8,21 MP

19,22 &I

5-23 RAA

4-24 CP

[10] $P \leftrightarrow Q \vdash (P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$

(i) $P \leftrightarrow Q \vdash (P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$

| | | |
|------|--|--------------------------|
| 1 | (1) $P \leftrightarrow Q$ | A |
| 1 | (2) $(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ | 1 Df. \leftrightarrow |
| 1 | (3) $P \rightarrow Q$ | 2 &E |
| 1 | (4) $Q \rightarrow P$ | 2 &E |
| | (5) $P \vee \sim P$ | LEM |
| 6 | (6) P | A |
| 1,6 | (7) Q | 3,6 MP |
| 1,6 | (8) $P \& Q$ | 6,7 &I |
| 1,6 | (9) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$ | 8 vI |
| 10 | (10) $\sim P$ | A |
| 1,10 | (11) $\sim Q$ | 4,10 MT |
| 1,10 | (12) $\sim P \& \sim Q$ | 10,11 &I |
| 1,10 | (13) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$ | 12 vI |
| 1 | (14) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$ | 5,6-9,10-13 vE |
| | (ii) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q) \vdash P \leftrightarrow Q$ | |
| 1 | (1) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$ | A |
| 2 | (2) $P \& Q$ | A |
| 2 | (3) Q | 2 &E |
| 2 | (4) $P \rightarrow Q$ | -3 CP |
| 2 | (5) P | 2 &E |
| 2 | (6) $Q \rightarrow P$ | -5 CP |
| 2 | (7) $(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ | 4,6 &I |
| 2 | (8) $P \leftrightarrow Q$ | 7 Df. \leftrightarrow |
| 9 | (9) $\sim P \& \sim Q$ | A |
| 9 | (10) $\sim P$ | 9 &E |
| 9 | (11) $P \rightarrow Q$ | 10 PMI |
| 9 | (12) $\sim Q$ | 9 &E |
| 9 | (13) $Q \rightarrow P$ | 12 PMI |
| 9 | (14) $(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ | 11,13 &I |
| 9 | (15) $P \leftrightarrow Q$ | 14 Df. \leftrightarrow |
| 1 | (16) $P \leftrightarrow Q$ | 1,2-8,9-15 vE |

[別解]

(ii) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q) \vdash P \leftrightarrow Q$

| | | |
|------|--|----------|
| 1 | (1) $(P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$ | A |
| 2 | (2) P | A |
| 3 | (3) $\sim P \& \sim Q$ | A |
| 3 | (4) $\sim P$ | 3 &E |
| 2,3 | (5) $P \& \sim P$ | 2,4 &I |
| 2 | (6) $\sim(\sim P \& \sim Q)$ | 3-5 RAA |
| 1,2 | (7) $P \& Q$ | 1,6 MTP |
| 1,2 | (8) Q | 7 &E |
| 1 | (9) $P \rightarrow Q$ | 2-8 CP |
| 10 | (10) Q | A |
| 3 | (11) $\sim Q$ | 3 &E |
| 3,10 | (12) $Q \& \sim Q$ | 10,11 &I |
| 10 | (13) $\sim(\sim P \& \sim Q)$ | 3-12 RAA |
| 1,10 | (14) $P \& Q$ | 1,13 MTP |
| 1,10 | (15) P | 14 &E |

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 1 | (16) $Q \rightarrow P$ | 10-15 CP |
| 1 | (17) $(P \rightarrow Q) \ \& \ (Q \rightarrow P)$ | 9,16 &I |
| 1 | (18) $P \leftrightarrow Q$ | 17 Df. \leftrightarrow |