

問題 1 解答

[1] $Fa, \forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash Ga$

1	(1) Fa	A
2	(2) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3) $Fa \rightarrow Ga$	2 $\forall E$
1,2	(4) Ga	1,3 MP

[2] $Ga, \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \sim Fa$

1	(1) Ga	A
2	(2) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	A
2	(3) $Fa \rightarrow \sim Ga$	2 $\forall E$
1	(4) $\sim \sim Ga$	1 DNI
1,2	(5) $\sim Fa$	3,4 MT

[3] $\sim Fb, \forall x(Gx \rightarrow Fx) \vdash \sim Gb$

1	(1) $\sim Fb$	A
2	(2) $\forall x(Gx \rightarrow Fx)$	A
2	(3) $Gb \rightarrow Fb$	2 $\forall E$
1,2	(4) $\sim Gb$	1,3 MT

[4] $\forall x((Fx \& Gx) \rightarrow Hx), \sim Hb, Fb \vdash \sim Gb$

1	(1) $\forall x((Fx \& Gx) \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\sim Hb$	A
3	(3) Fb	A
1	(4) $(Fb \& Gb) \rightarrow Hb$	1 $\forall E$
1,2	(5) $\sim (Fb \& Gb)$	2,4 MT
1,2	(6) $\sim Fb \vee \sim Gb$	5 De M.
3	(7) $\sim \sim Fb$	3 DNI
1,2,3	(8) $\sim Gb$	6,7 MTP

[5] $\forall x(Fx \rightarrow (\sim Gx \vee Hx)), Fa, Ga \vdash Ha$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow (\sim Gx \vee Hx))$	A
2	(2) Fa	A
3	(3) Ga	A
1	(4) $Fa \rightarrow (\sim Ga \vee Ha)$	1 $\forall E$
1,2	(5) $\sim Ga \vee Ha$	2,4 MT
3	(6) $\sim \sim Ga$	3 DNI
1,2,3	(7) Ha	5,6 MTP

[6] $\forall x((Fx \& \sim Gx) \rightarrow Hx), Fa, \sim Ha \vdash Ga$

1	(1) $\forall x((Fx \& \sim Gx) \rightarrow Hx)$	A
2	(2) Fa	A
3	(3) $\sim Ha$	A
1	(4) $(Fa \& \sim Ga) \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
1,3	(5) $\sim (Fa \& \sim Ga)$	3,4 MT
1,3	(6) $\sim Fa \vee \sim \sim Ga$	5 De M.
2	(7) $\sim \sim Fa$	2 DNI
1,2,3	(8) $\sim \sim Ga$	6,7 MTP
1,2,3	(9) Ga	8 DNE

[7] $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow Fx) \vdash Ga \vee \sim Ha$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x(Hx \rightarrow Fx)$	A

3	(3) $\sim(Ga \vee \sim Ha)$	A
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
2	(5) $Ha \rightarrow Fa$	2 $\forall E$
3	(6) $\sim Ga \ \& \ \sim \sim Ha$	3 De M.
3	(7) $\sim Ga$	6 $\&E$
3	(8) $\sim \sim Ha$	6 $\&E$
1,3	(9) $\sim Fa$	4,7 MT
1,2,3	(10) $\sim Ha$	5,9 MT
1,2,3	(11) $\sim Ha \ \& \ \sim \sim Ha$	8,10 $\&I$
1,2	(12) $\sim \sim(Ga \vee \sim Ha)$	3-11 RAA
1,2	(13) $Ga \vee \sim Ha$	12 DNE

11行目は次と入れ替えることができる：

1,2,3	(11) \perp	8,10 $\sim E$
-------	--------------	---------------

[8] $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall x(Hx \rightarrow \sim Gx) \vdash \forall xFx \rightarrow \sim \forall xGx$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\forall x(Hx \rightarrow \sim Gx)$	A
3	(3) $\forall xFx$	A
4	(4) $\forall xGx$	A
1	(5) $Fa \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
2	(6) $Ha \rightarrow \sim Ga$	2 $\forall E$
3	(7) Fa	3 $\forall E$
4	(8) Ga	4 $\forall E$
1,3	(9) Ha	5,7 MP
1,2,3	(10) $\sim Ga$	6,9 MP
1,2,3,4	(11) $Ga \ \& \ \sim Ga$	8,10 $\&I$
1,2,3	(12) $\sim \forall xGx$	4,11 RAA
1,2	(13) $\forall xFx \rightarrow \sim \forall xGx$	3-12 CP