

問題 2 解答

[1] $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x \sim Gx \vdash \forall x \sim Fx$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x \sim Gx$	A
1	(3) $Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
2	(4) $\sim Ga$	2 $\forall E$
1,2	(5) $\sim Fa$	3,4 MT
1,2	(6) $\forall x \sim Fx$	5 $\forall I$

[2] $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \sim Hx \vdash \forall x \sim Fx$

1	(1) $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\forall x \sim Hx$	A
1	(3) $(Fa \vee Ga) \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
2	(4) $\sim Ha$	2 $\forall E$
1,2	(5) $\sim(Fa \vee Ga)$	3,4 MT
1,2	(6) $\sim Fa \ \& \ \sim Ga$	5 De M.
1,2	(7) $\sim Fa$	6 $\&E$
1,2	(8) $\forall x \sim Fx$	7 $\forall I$

[3] $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx), \forall x Fx, \forall x(Hx \vee Gx) \vdash \forall x(Fx \ \& \ Hx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	A
2	(2) $\forall x Fx$	A
3	(3) $\forall x(Hx \vee Gx)$	A
1	(4) $Fa \rightarrow \sim Ga$	1 $\forall E$
2	(5) Fa	2 $\forall E$
3	(6) $Ha \vee Ga$	3 $\forall E$
1,2	(7) $\sim Ga$	4,5 MP
1,2,3	(8) Ha	6,7 MTP
1,2,3	(9) $Fa \ \& \ Ha$	5,8 $\&I$
1,2,3	(10) $\forall x(Fx \ \& \ Hx)$	9 $\forall I$

[4] $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall x(\sim Gx \rightarrow \sim Hx) \vdash \forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\forall x(\sim Gx \rightarrow \sim Hx)$	A
3	(3) $\forall x Fx$	A
1	(4) $Fa \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
2	(5) $\sim Ga \rightarrow \sim Ha$	2 $\forall E$
3	(6) Fa	3 $\forall E$
1,3	(7) Ha	4,6 MP
1,3	(8) $\sim \sim Ha$	7 DNI
1,2,3	(9) $\sim \sim Ga$	5,8 MT
1,2,3	(10) Ga	9 DNE
1,2,3	(11) $\forall x Gx$	10 $\forall I$
1,2	(12) $\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$	3-11 CP

[5] $\forall x(Fx \rightarrow \sim Hx), \forall x(Gx \vee Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Hx)$	A
2	(2) $\forall x(Gx \vee Hx)$	A
3	(3) Fa	A
1	(4) $Fa \rightarrow \sim Ha$	1 $\forall E$
2	(5) $Ga \vee Ha$	2 $\forall E$
1,3	(6) $\sim Ha$	3,4 MP
1,2,3	(7) Ga	5,6 MTP
1,2	(8) $Fa \rightarrow Ga$	3-7 CP
1,2	(9) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	8 $\forall I$

[6] $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \sim Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \sim Hx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x(Gx \rightarrow \sim Hx)$	A
3	(3) Fa	A
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
2	(5) $Ga \rightarrow \sim Ha$	2 $\forall E$
1,3	(6) Ga	3,4 MP
1,2,3	(7) $\sim Ha$	5,6 MP
1,2	(8) $Fa \rightarrow \sim Ha$	3-7 CP
1,2	(9) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Hx)$	8 $\forall I$

[7] $\forall x((Fx \& Gx) \rightarrow Hx) \vdash \forall xFx \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow Hx)$

1	(1) $\forall x((Fx \& Gx) \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\forall xFx$	A
3	(3) Ga	A
1	(4) $(Fa \& Ga) \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
2	(5) Fa	2 $\forall E$
2,3	(6) $Fa \& Ga$	3,5 $\&I$
1,2,3	(7) Ha	4,6 MP
1,2	(8) $Ga \rightarrow Ha$	3-7 CP
1,2	(9) $\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	8 $\forall I$
1	(10) $\forall xFx \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow Hx)$	2-9 CP

[8] $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(\sim Hx \rightarrow Fx) \vdash \forall x(Gx \vee Hx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x(\sim Hx \rightarrow Fx)$	A
3	(3) $\sim(Ga \vee Ha)$	A
3	(4) $\sim Ga \& \sim Ha$	3 De M.
3	(5) $\sim Ga$	4 $\&E$
3	(6) $\sim Ha$	4 $\&E$
2	(7) $\sim Ha \rightarrow Fa$	2 $\forall E$
2,3	(8) Fa	6,7 MP
1	(9) $Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
1,2,3	(10) Ga	8,9 MP
1,2,3	(11) $Ga \& \sim Ga$	5,10 $\&I$
1,2	(12) $\sim\sim(Ga \vee Ha)$	3-11 RAA
1,2	(13) $Ga \vee Ha$	12 DNE
1,2	(14) $\forall x(Gx \vee Hx)$	13 $\forall I$

[別解]

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x(\sim Hx \rightarrow Fx)$	A
1	(3) $Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
2	(4) $\sim Ha \rightarrow Fa$	2 $\forall E$
	(5) $Fa \vee \sim Fa$	LEM
6	(6) Fa	A
1,6	(7) Ga	3,6 MP
1,6	(8) $Ga \vee Ha$	7 $\vee I$
9	(9) $\sim Fa$	A
2,9	(10) $\sim\sim Ha$	4,9 MT
2,9	(11) Ha	10 DNE
2,9	(12) $Ga \vee Ha$	11 $\vee I$
1,2	(13) $Ga \vee Ha$	5,6-8,9-12 $\vee E$

1,2 (14) $\forall x(Gx \vee Hx)$ 13 $\forall I$

[9] $\forall x(Fx \& Gx) \dashv\vdash \forall xFx \& \forall xGx$

(i) $\forall x(Fx \& Gx) \vdash \forall xFx \& \forall xGx$

1	(1) $\forall x(Fx \& Gx)$	A
1	(2) $Fa \& Ga$	1 $\forall E$
1	(3) Fa	4 $\&E$
1	(4) Ga	4 $\&E$
1	(5) $\forall xFx$	3 $\forall I$
1	(6) $\forall xGx$	4 $\forall I$
1	(7) $\forall xFx \& \forall xGx$	5,6 $\&I$

(ii) $\forall xFx \& \forall xGx \vdash \forall x(Fx \& Gx)$

1	(1) $\forall xFx \& \forall xGx$	A
1	(2) $\forall xFx$	1 $\&E$
1	(3) $\forall xGx$	1 $\&E$
1	(4) Fa	2 $\forall E$
1	(5) Ga	3 $\forall E$
1	(6) $Fa \& Ga$	4,5 $\&I$
1	(7) $\forall x(Fx \& Gx)$	6 $\forall I$

[10] $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall x(Gx \rightarrow Ix) \vdash \forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow (Hx \vee Ix))$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	A
2	(2) $\forall x(Gx \rightarrow Ix)$	A
3	(3) $Fa \vee Ga$	A
1	(4) $Fa \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
2	(5) $Ga \rightarrow Ia$	2 $\forall E$
6	(6) Fa	A
1,6	(7) Ha	4,6 MP
1,6	(8) $Ha \vee Ia$	7 $\vee I$
1	(9) $Fa \rightarrow (Ha \vee Ia)$	6-8 CP
10	(10) Ga	A
2,10	(11) Ia	5,10 MP
2,10	(12) $Ha \vee Ia$	11 $\vee I$
2	(13) $Ga \rightarrow (Ha \vee Ia)$	10-12 CP
1,2,3	(14) $Ha \vee Ia$	3,9,13 SCD
1,2	(15) $(Fa \vee Ga) \rightarrow (Ha \vee Ia)$	3-14 CP
1,2	(16) $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow (Hx \vee Ix))$	16 $\forall I$

[11] $\forall xFx \vee \forall xGx \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$

1	(1) $\forall xFx \vee \forall xGx$	A
2	(2) $\forall xFx$	A
2	(3) Fa	2 $\forall E$
2	(4) $Fa \vee Ga$	3 $\vee I$
2	(5) $\forall x(Fx \vee Gx)$	4 $\forall I$
6	(6) $\forall xGx$	A
6	(7) Ga	6 $\forall E$
6	(8) $Fa \vee Ga$	7 $\vee I$
6	(9) $\forall x(Fx \vee Gx)$	8 $\forall I$
1	(10) $\forall x(Fx \vee Gx)$	1,2-5,6-9 $\vee E$

[12] $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \& Hx)) \dashv\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Fx \rightarrow Hx)$

(i) $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \& Hx)) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Fx \rightarrow Hx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \& Hx))$	A
---	--	---

2	(2) Fa	A
1	(3) $Fa \rightarrow (Ga \ \& \ Ha)$	1 $\forall E$
1,2	(4) $Ga \ \& \ Ha$	2,3 MP
1,2	(5) Ga	4 $\&E$
1	(6) $Fa \rightarrow Ga$	2-5 CP
1	(7) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	6 $\forall I$
1,2	(8) Ha	4 $\&E$
1	(9) $Fa \rightarrow Ha$	2-8 CP
1	(10) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	9 $\forall I$
1	(11) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \ \& \ \forall x(Fx \rightarrow Hx)$	7,10 $\&I$
(ii) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \ \& \ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow (Gx \ \& \ Hx))$		
1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \ \& \ \forall x(Fx \rightarrow Hx)$	A
2	(2) Fa	A
1	(3) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1 $\&E$
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	3 $\forall E$
1,2	(5) Ga	2,4 MP
1	(6) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	1 $\&E$
1	(7) $Fa \rightarrow Ha$	6 $\forall E$
1,2	(8) Ha	2,7 MP
1,2	(9) $Ga \ \& \ Ha$	5,8 $\&I$
1,2	(10) $\forall x(Gx \ \& \ Hx)$	9 $\forall I$
[13] $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx) \dashv\vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \& \ \forall x(Gx \rightarrow Hx)$		
(i) $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \& \ \forall x(Gx \rightarrow Hx)$		
1	(1) $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$	A
1	(2) $(Fa \vee Ga) \rightarrow Ha$	1 $\forall E$
3	(3) Fa	A
3	(4) $Fa \vee Ga$	3 $\vee I$
1,3	(5) Ha	2,4 MP
1	(6) $Fa \rightarrow Ha$	3-5 CP
1	(7) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	6 $\forall I$
8	(8) Ga	A
8	(9) $Fa \vee Ga$	8 $\vee I$
1,8	(10) Ha	2,9 MP
1	(11) $Ga \rightarrow Ha$	8-10 CP
1	(12) $\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	11 $\forall I$
1	(13) $\forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \& \ \forall x(Gx \rightarrow Hx)$	7,11 $\&I$
(ii) $\forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \& \ \forall x(Gx \rightarrow Hx) \vdash \forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$		
1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \& \ \forall x(Gx \rightarrow Hx)$	A
1	(2) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	1 $\&E$
1	(3) $\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	1 $\&E$
4	(4) $Fa \vee Ga$	A
1	(5) $Fa \rightarrow Ha$	2 $\forall E$
1	(6) $Ga \rightarrow Ha$	3 $\forall E$
1,4	(7) Ha	4,5,6 SCD
1	(8) $(Fa \vee Ga) \rightarrow Ha$	4-7 CP
1	(9) $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$	8 $\forall I$
[14] $\forall x(Fx \rightarrow \forall xGx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \forall x(Gx \vee Hx))$		
1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow \forall xGx)$	A
2	(2) Fa	A
1	(3) $Fa \rightarrow \forall xGx$	1 $\forall E$
1,2	(4) $\forall xGx$	2,3 MP

1,2	(5) Gb	4 $\forall E$
1,2	(6) $Gb \vee Hb$	5 $\vee I$
1,2	(7) $\forall x(Gx \vee Hx)$	6 $\forall I$
1	(8) $Fa \rightarrow \forall x(Gx \vee Hx)$	2-7 CP
1	(9) $\forall x(Fx \rightarrow \forall x(Gx \vee Hx))$	8 $\forall I$