

問題 4

[1] $\sim\forall xFx \dashv\vdash \exists x\sim Fx$ (i) $\sim\forall xFx \vdash \exists x\sim Fx$

1	(1) $\sim\forall xFx$	A
2	(2) $\sim\exists x\sim Fx$	A
3	(3) $\sim Fa$	A
3	(4) $\exists x\sim Fx$	3 $\exists I$
2,3	(5) $\exists x\sim Fx \ \& \ \sim\exists x\sim Fx$	2,4 $\&I$
2	(6) $\sim\sim Fa$	3-5 RAA
2	(7) Fa	6 DNE
2	(8) $\forall xFx$	7 $\forall I$
1,2	(9) $\forall xFx \ \& \ \sim\forall xFx$	1,8 $\&I$
1	(10) $\sim\sim\exists x\sim Fx$	2-9 RAA
1	(11) $\exists x\sim Fx$	10 DNE

(ii) $\exists x\sim Fx \vdash \sim\forall xFx$

1	(1) $\exists x\sim Fx$	A
2	(2) $\forall xFx$	A
3	(3) $\sim Fa$	A
2	(4) Fa	2 $\forall E$
2,3	(5) $Fa \ \& \ \sim Fa$	3,4 $\&I$
3	(6) $\sim\forall xFx$	2-5 RAA
1	(7) $\sim\forall xFx$	1,3-6 $\exists E$

[2] $\sim\exists xFx \dashv\vdash \forall x\sim Fx$ (i) $\sim\exists xFx \vdash \forall x\sim Fx$

1	(1) $\sim\exists xFx$	A
2	(2) Fa	A
2	(3) $\exists xFx$	2 $\exists I$
1,2	(4) $\exists xFx \ \& \ \sim\exists xFx$	1,3 $\&I$
1	(5) $\sim Fa$	2-4 RAA
1	(6) $\forall x\sim Fx$	5 $\forall I$

(ii) $\forall x\sim Fx \vdash \sim\exists xFx$

1	(1) $\forall x\sim Fx$	A
2	(2) $\exists xFx$	A
3	(3) Fa	A
1	(4) $\sim Fa$	1 $\forall E$
1,3	(5) $Fa \ \& \ \sim Fa$	3,4 $\&I$
3	(6) $\sim\forall x\sim Fx$	1-5 RAA
1,3	(7) $\forall x\sim Fx \ \& \ \sim\forall x\sim Fx$	1,6 $\&I$
1,2	(8) $\forall x\sim Fx \ \& \ \sim\forall x\sim Fx$	2,3-7 $\exists E$
1	(9) $\sim\exists xFx$	2-8 RAA

[3] $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \dashv\vdash \sim\exists x(Fx \ \& \ Gx)$ (i) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \sim\exists x(Fx \ \& \ Gx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	A
2	(2) $\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	A
3	(3) $Fa \ \& \ Ga$	A
1	(4) $Fa \rightarrow \sim Ga$	1 $\forall E$
3	(5) Fa	3 $\&E$
1,3	(6) $\sim Ga$	4,5 MP
3	(7) Ga	3 $\&E$

1,3	(8) $Ga \& \sim Ga$	6,7 &I
3	(9) $\sim \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1-8 RAA
1,3	(10) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \& \sim \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	1,9 &I
1,2	(11) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \& \sim \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	2,3-10 $\exists E$
1	(12) $\sim \exists x(Fx \& Gx)$	2-11 RAA
(ii) $\sim \exists x(Fx \& Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$		
1	(1) $\sim \exists x(Fx \& Gx)$	A
2	(2) Fa	A
3	(3) Ga	A
2,3	(4) $Fa \& Ga$	2,3 &I
2,3	(5) $\exists x(Fx \& Gx)$	4 $\exists I$
1,2,3	(6) $\exists x(Fx \& Gx) \& \sim \exists x(Fx \& Gx)$	1,5 &I
1,2	(7) $\sim Ga$	3-6 RAA
1	(8) $Fa \rightarrow \sim Ga$	2-7 CP
1	(9) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	8 $\forall I$

[4] $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Gx \rightarrow Fx)$

(i) $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Gx \rightarrow Fx)$

1	(1) $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	A
1	(2) $Fa \leftrightarrow Ga$	1 $\forall E$
1	(3) $(Fa \rightarrow Ga) \& (Ga \rightarrow Fa)$	2 Df. \leftrightarrow
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	3 &E
1	(5) $Ga \rightarrow Fa$	3 &E
1	(6) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	4 $\forall I$
1	(7) $\forall x(Gx \rightarrow Fx)$	5 $\forall I$
1	(8) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Gx \rightarrow Fx)$	6,7 &I

(ii) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Gx \rightarrow Fx) \vdash \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \& \forall x(Gx \rightarrow Fx)$	A
1	(2) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1 &E
1	(3) $\forall x(Gx \rightarrow Fx)$	1 &E
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	2 $\forall E$
1	(5) $Ga \rightarrow Fa$	3 $\forall E$
1	(6) $(Fa \rightarrow Ga) \& (Ga \rightarrow Fa)$	4,5 &I
1	(7) $Fa \leftrightarrow Ga$	6 Df. \leftrightarrow
1	(8) $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	7 $\forall I$

[5] $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \forall xFx \leftrightarrow \forall xGx$

1	(1) $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	A
1	(2) $Fa \leftrightarrow Ga$	1 $\forall E$
1	(3) $(Fa \rightarrow Ga) \& (Ga \rightarrow Fa)$	2 Df. \leftrightarrow
1	(4) $Fa \rightarrow Ga$	3 &E
1	(5) $Ga \rightarrow Fa$	3 &E
6	(6) $\forall xF$	A
6	(7) Fa	6 $\forall E$
1,6	(8) Ga	4,7 MP
1,6	(9) $\forall xGx$	8 $\forall I$
1	(10) $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	6-9 CP
11	(11) $\forall xGx$	A
11	(12) Ga	11 $\forall E$
1,11	(13) Fa	5,12 MP
1,11	(14) $\forall xFx$	13 $\forall I$
1	(15) $\forall xGx \rightarrow \forall xFx$	11-14 CP

- 1 (16) $(\forall xFx \rightarrow \forall xGx) \& (\forall xGx \rightarrow \forall xFx)$ 10,15 &I
 1 (17) $\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx$ 16 Df. \leftrightarrow

[6] $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash \exists xFx \leftrightarrow \exists xGx$

- 1 (1) $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$ A
 2 (2) $\exists xFx$ A
 3 (3) Fa A
 1 (4) $Fa \leftrightarrow Ga$ 1 $\forall E$
 1 (5) $(Fa \rightarrow Ga) \& (Ga \rightarrow Fa)$ 4 Df. \leftrightarrow
 1 (6) $Fa \rightarrow Ga$ 5 &E
 1,3 (7) Ga 3,6 MP
 1,3 (8) $\exists xGx$ 7 $\exists I$
 1,2 (9) $\exists xGx$ 2,3-8 $\exists E$
 1 (10) $\exists xFx \rightarrow \exists xGx$ 2-9 CP
 11 (11) $\exists xGx$ A
 12 (12) Ga A
 1 (13) $Ga \rightarrow Fa$ 5 &E
 1,12 (14) Fa 12,13 MP
 1,12 (15) $\exists xFx$ 14 $\exists I$
 1,11 (16) $\exists xFx$ 11,12-15 $\exists E$
 1 (17) $\exists xGx \rightarrow \exists xFx$ 11-16 CP
 1 (18) $(\exists xFx \rightarrow \exists xGx) \& (\exists xGx \rightarrow \exists xFx)$ 10,17 &I
 1 (19) $\exists xFx \leftrightarrow \exists xGx$ 18 Df. \leftrightarrow

[7] $\forall x(P \rightarrow Fx) \dashv\vdash P \rightarrow \forall xFx$

(i) $\forall x(P \rightarrow Fx) \vdash P \rightarrow \forall xFx$

- 1 (1) $\forall x(P \rightarrow Fx)$ A
 2 (2) P A
 1 (3) $P \rightarrow Fa$ 1 $\forall E$
 1,2 (4) Fa MP
 1,2 (5) $\forall xFx$ 4 $\forall I$
 1 (6) $P \rightarrow \forall xFx$ 2-5 CP

(ii) $P \rightarrow \forall xFx \vdash \forall x(P \rightarrow Fx)$

- 1 (1) $P \rightarrow \forall xFx$ A
 2 (2) P A
 1,2 (3) $\forall xFx$ 1,2 MP
 1,2 (4) Fa 3 $\forall E$
 1 (5) $P \rightarrow Fa$ 2-4 CP
 1 (6) $\forall x(P \rightarrow Fx)$ 5 $\forall I$

[8] $\exists x(P \rightarrow Fx) \dashv\vdash P \rightarrow \exists xFx$

(i) $\exists x(P \rightarrow Fx) \vdash P \rightarrow \exists xFx$

- 1 (1) $\exists x(P \rightarrow Fx)$ A
 2 (2) P A
 3 (3) $P \rightarrow Fa$ A
 2,3 (4) Fa 2,3 MP
 2,3 (5) $\exists xFx$ 4 $\exists I$
 1,2 (6) $\exists xFx$ 1,3-5 $\exists E$
 1 (7) $P \rightarrow \exists xFx$ 2-6 CP

(ii) $P \rightarrow \exists xFx \vdash \exists x(P \rightarrow Fx)$

- 1 (1) $P \rightarrow \exists xFx$ A
 (2) $P \vee \sim P$ LEM

3	(3) P	A
1,3	(4) $\exists xFx$	1,3 MP
5	(5) Fa	A
5	(6) $P \rightarrow Fa$	-5 CP
5	(7) $\exists x(P \rightarrow Fx)$	6 \exists I
1,3	(8) $\exists x(P \rightarrow Fx)$	4,5-7 \exists E
9	(9) $\sim P$	A
9	(10) $P \rightarrow Fa$	9 PMI
9	(11) $\exists x(P \rightarrow Fx)$	10 \exists I
1	(12) $\exists x(P \rightarrow Fx)$	2,3-8,9-11 \vee E

[9] $\forall x(P \& Fx) \dashv\vdash P \& \forall xFx$

(i) $\forall x(P \& Fx) \vdash P \& \forall xFx$

1	(1) $\forall x(P \& Fx)$	A
1	(2) $P \& Fa$	1 \vee E
1	(3) P	2 $\&$ E
1	(4) Fa	2 $\&$ E
1	(5) $\forall xFx$	4 \forall I
1	(6) $P \& \forall xFx$	3,5 $\&$ I

(ii) $P \& \forall xFx \vdash \forall x(P \& Fx)$

1	(1) $P \& \forall xFx$	A
1	(2) P	1 $\&$ E
1	(3) $\forall xFx$	1 $\&$ E
1	(4) Fa	3 \vee E
1	(5) $P \& Fa$	2,4 $\&$ I
1	(6) $\forall x(P \& Fx)$	5 \forall I

[10] $\exists x(P \& Fx) \dashv\vdash P \& \exists xFx$

(i) $\exists x(P \& Fx) \vdash P \& \exists xFx$

1	(1) $\exists x(P \& Fx)$	A
2	(2) $P \& Fa$	A
2	(3) P	2 $\&$ E
2	(4) Fa	2 $\&$ E
2	(5) $\exists xFx$	4 \exists I
2	(6) $P \& \exists xFx$	3,5 $\&$ I
1	(7) $P \& \exists xFx$	1,2-6 \exists E

(ii) $P \& \exists xFx \vdash \exists x(P \& Fx)$

1	(1) $P \& \exists xFx$	A
1	(2) P	1 $\&$ E
1	(3) $\exists xFx$	1 $\&$ E
4	(4) Fa	A
1,4	(5) $P \& Fa$	2,4 $\&$ I
1,4	(6) $\exists x(P \& Fx)$	5 \exists I
1	(7) $\exists x(P \& Fx)$	3,4-6 \exists E

[11] $\forall x(P \vee Fx) \dashv\vdash P \vee \forall xFx$

(i) $\forall x(P \vee Fx) \vdash P \vee \forall xFx$

1	(1) $\forall x(P \vee Fx)$	A
2	(2) $\sim(P \vee \forall xFx)$	A
2	(3) $\sim P \& \sim \forall xFx$	2 De M.
2	(4) $\sim P$	3 $\&$ E

2	(5) $\sim \forall xFx$	3 &E
1	(6) $P \vee Fa$	1 \vee E
1,2	(7) Fa	4,6 MTP
1,2	(8) $\forall xFx$	7 \forall I
1,2	(9) $\forall xFx \& \sim \forall xFx$	5,8 &I
1	(10) $\sim \sim (P \vee \forall xFx)$	2-9 RAA
1	(11) $P \vee \forall xFx$	10 DNE

[別解 1]

(i) $\forall x(P \vee Fx) \vdash P \vee \forall xFx$		
1	(1) $\forall x(P \vee Fx)$	A
	(2) $P \vee \sim P$	LEM
3	(3) P	A
3	(4) $P \vee \forall xFx$	3 \vee I
5	(5) $\sim P$	A
1	(6) $P \vee Fa$	1 \vee E
1,5	(7) Fa	5,6 MTP
1,5	(8) $\forall xFx$	7 \forall I
1,5	(9) $P \vee \forall xFx$	8 \vee I
1	(10) $P \vee \forall xFx$	2,3-4,5-9 \vee E

[別解 2]

(i) $\forall x(P \vee Fx) \vdash P \vee \forall xFx$		
1	(1) $\forall x(P \vee Fx)$	A
2	(2) $\sim P$	A
1	(3) $P \vee Fa$	1 \vee E
1,2	(4) Fa	2,3 MTP
1	(5) $\forall xFx$	4 \forall I
1	(6) $\sim P \rightarrow \forall xFx$	2-4 CP
1	(7) $P \vee \forall xFx$	6 CD
(ii) $P \vee \forall xFx \vdash \forall x(P \vee Fx)$		
1	(1) $P \vee \forall xFx$	A
2	(2) P	A
2	(3) $P \vee Fa$	2 \vee I
2	(4) $\forall x(P \vee Fx)$	3 \forall I
5	(5) $\forall xFx$	A
5	(6) Fa	5 \forall E
5	(7) $P \vee Fa$	6 \vee I
5	(8) $\forall x(P \vee Fx)$	7 \forall I
1	(9) $\forall x(P \vee Fx)$	1,2-4,5-8 \vee E

[12] $\exists x(P \vee Fx) \dashv \vdash P \vee \exists xFx$

(i) $\exists x(P \vee Fx) \vdash P \vee \exists xFx$		
1	(1) $\exists x(P \vee Fx)$	A
2	(2) $P \vee Fa$	A
3	(3) P	A
3	(4) $P \vee \exists xFx$	3 \vee I
5	(5) Fa	A
5	(6) $\exists xFx$	5 \exists I
5	(7) $P \vee \exists xFx$	6 \vee I
2	(8) $P \vee \exists xFx$	2,3-4,5-7 \vee E

1	(9) $P \vee \exists xFx$	1,2-8 $\exists E$
(ii) $P \vee \exists xFx \vdash \exists x(P \vee Fx)$		
1	(1) $P \vee \exists xFx$	A
2	(2) P	A
2	(3) $P \vee Fa$	2 $\vee I$
2	(4) $\exists x(P \vee Fx)$	3 $\exists I$
5	(5) $\exists xFx$	A
6	(6) Fa	A
6	(7) $P \vee Fa$	6 $\vee I$
6	(8) $\exists x(P \vee Fx)$	7 $\exists I$
5	(9) $\exists x(P \vee Fx)$	5,6-8 $\exists E$
1	(10) $\exists x(P \vee Fx)$	1,2-4,5-9 $\vee E$

[13] $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P$

(i) $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2) $\exists xFx$	A
3	(3) Fa	A
1	(4) $Fa \rightarrow P$	1 $\forall E$
1,3	(5) P	3,4 MP
1,2	(6) P	2,3-5 $\exists E$
1	(7) $\exists xFx \rightarrow P$	2-6 CP

(ii) $\exists xFx \rightarrow P \vdash \forall x(Fx \rightarrow P)$

1	(1) $\exists xFx \rightarrow P$	A
2	(2) Fa	A
2	(3) $\exists xFx$	$\exists I$
1,2	(4) P	1,3 MP
1	(5) $Fa \rightarrow P$	2-4 CP
1	(6) $\forall x(Fx \rightarrow P)$	5 $\forall I$

[14] $\exists x(Fx \rightarrow P) \vdash \forall xFx \rightarrow P$

(i) $\exists x(Fx \rightarrow P) \vdash \forall xFx \rightarrow P$

1	(1) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2) $Fa \rightarrow P$	A
3	(3) $\forall xFx$	A
3	(4) Fa	3 $\forall E$
2,3	(5) P	2,4 MP
2	(6) $\forall xFx \rightarrow P$	3-5 CP
1	(7) $\forall xFx \rightarrow P$	1,2-6 $\exists E$

(ii) $\forall xFx \rightarrow P \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

1	(1) $\forall xFx \rightarrow P$	A
2	(2) $\sim \exists x(Fx \rightarrow P)$	A
3	(3) $Fa \rightarrow P$	A
3	(4) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	3 $\exists I$
2,3	(5) $\exists x(Fx \rightarrow P) \& \sim \exists x(Fx \rightarrow P)$	2,4 &I
2	(6) $\sim(Fa \rightarrow P)$	3-5 RAA
2	(7) $Fa \& \sim P$	6 NC
2	(8) Fa	7 &E
2	(9) $\forall xFx$	8 $\forall I$
1,2	(10) P	1,9 MP
2	(11) $\sim P$	7 &E
1,2	(12) $P \& \sim P$	10,11 &I

1	(13) $\sim\sim\exists x(Fx \rightarrow P)$	2-12 RAA
1	(14) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	13 DNE

[別解]

(ii) $\forall xFx \rightarrow P \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

1	(1) $\forall xFx \rightarrow P$	A
	(2) $P \vee \sim P$	LEM
3	(3) P	A
3	(4) $Fa \rightarrow P$	-3 CP
3	(5) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	4 $\exists I$
6	(6) $\sim P$	A
1,6	(7) $\sim\forall xFx$	1,6 MT
8	(8) $\sim\exists x(Fx \rightarrow P)$	A
9	(9) $\sim Fa$	A
9	(10) $Fa \rightarrow P$	9 PMI
9	(11) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	10 $\exists I$
8,9	(12) $\exists x(Fx \rightarrow P) \& \sim\exists x(Fx \rightarrow P)$	8,11 &I
8	(13) $\sim\sim Fa$	9-12 RAA
8	(14) Fa	13 DNE
8	(15) $\forall xFx$	14 $\forall I$
1,6,8	(16) $\forall xFx \& \sim\forall xFx$	7,15 &I
1,6	(17) $\sim\sim\exists x(Fx \rightarrow P)$	8-16 RAA
1,6	(18) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	17 DNE
1	(19) $\exists x(Fx \rightarrow P)$	2,3-5,6-18 $\vee E$