

問題 5 解答

[1] $\exists xFx \rightarrow \exists xGx \vdash \exists x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1) $\exists xFx \rightarrow \exists xGx$	A
2	(2) $\sim \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3) $\forall x \sim (Fx \rightarrow Gx)$	2 QN
2	(4) $\sim (Fa \rightarrow Ga)$	3 $\forall E$
2	(5) $Fa \ \& \ \sim Ga$	4 NC
2	(6) Fa	5 $\&E$
2	(7) $\exists xFx$	6 $\exists I$
1,2	(8) $\exists xGx$	1,7 MP
2	(9) $\sim Ga$	5 $\&E$
2	(10) $\forall x \sim Gx$	9 $\forall I$
2	(11) $\sim \exists xGx$	10 QN
1,2	(12) $\exists xGx \ \& \ \sim \exists xGx$	8,11 $\&I$
1	(13) $\sim \sim \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-12 RAA
1	(14) $\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	13 DNE

[2] $\forall xFx \rightarrow \forall xGx \vdash \exists x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1) $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	A
2	(2) $\sim \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3) $\forall x \sim (Fx \rightarrow Gx)$	2 QN
2	(4) $\sim (Fa \rightarrow Ga)$	3 $\forall E$
2	(5) $Fa \ \& \ \sim Ga$	4 NC
2	(6) Fa	5 $\&E$
2	(7) $\forall xFx$	6 $\forall I$
1,2	(8) $\forall xGx$	1,7 MP
1,2	(9) Ga	8 $\forall E$
2	(10) $\sim Ga$	5 $\&E$
1,2	(11) $Ga \ \& \ \sim Ga$	9,10 $\&I$
1	(12) $\sim \sim \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-11 RAA
1	(13) $\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	12 DNE

[3] $\exists xFx \rightarrow \forall xGx, \forall x(Gx \vee Hx) \rightarrow \forall xJx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Jx)$

1	(1) $\exists xFx \rightarrow \forall xGx$	A
2	(2) $\forall x(Gx \vee Hx) \rightarrow \forall xJx$	A
3	(3) Fa	A
3	(4) $\exists xFx$	3 $\exists I$
1,3	(5) $\forall xGx$	1,4 MP
1,3	(6) Gb	5 $\forall E$
1,3	(7) $Gb \vee Hb$	6 $\vee I$
1,3	(8) $\forall x(Gx \vee Hx)$	7 $\forall I$
1,2,3	(9) $\forall xJx$	2,8 MP
1,2,3	(10) Ja	9 $\forall I$
1,2	(11) $Fa \rightarrow Ja$	3-10 CP
1,2	(12) $\forall x(Fx \rightarrow Jx)$	11 $\forall I$

[4] $\forall xFx \rightarrow \forall xGx \vdash \exists x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1) $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	A
2	(2) $\sim \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3) $\forall x \sim (Fx \rightarrow Gx)$	2 QN
2	(4) $\sim (Fa \rightarrow Ga)$	3 $\forall E$
2	(5) $Fa \ \& \ \sim Ga$	4 NC
2	(6) Fa	5 $\&E$
2	(7) $\sim Ga$	5 $\&E$
2	(8) $\forall xFx$	6 $\forall I$
1,2	(9) $\forall xGx$	1,8 MP

1,2	(10) Ga	9 $\forall E$
1,2	(11) \perp	7,10 E
1,2	(12) $\sim\sim\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-11 RAA
1,2	(13) $\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	12 DNE

[5] $\exists xFx \rightarrow \exists xGx \vdash \exists x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1) $\exists xFx \rightarrow \exists xGx$	A
2	(2) $\sim\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3) $\forall x\sim(Fx \rightarrow Gx)$	2 QN
2	(4) $\sim(Fa \rightarrow Ga)$	3 $\forall E$
2	(5) $Fa \& \sim Ga$	4 NC
2	(6) Fa	5 &I
2	(7) $\sim Ga$	5 &I
2	(8) $\exists xFx$	6 $\exists I$
1,2	(9) $\exists xGx$	1,8 MP
2	(10) $\forall x\sim Gx$	7 $\forall I$
2	(11) $\sim\exists xGx$	10 QN
1,2	(12) \perp	9,11 $\sim E$
1,2	(13) $\sim\sim\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-12 RAA
1,2	(14) $\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	13 DNE

[6] $\forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Fx), \exists xGx, \forall x(Fx \rightarrow \forall xHx) \vdash \forall xFx$

1	(1) $\forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Fx)$	A
2	(2) $\exists xGx$	A
3	(3) $\forall x(Fx \rightarrow \forall xHx)$	A
4	(4) $\sim\exists xFx$	A
4	(5) $\forall x\sim Fx$	4 QN
4	(6) $\sim Fa$	5 $\forall I$
1	(7) $(Ga \vee Ha) \rightarrow Fa$	1 $\forall E$
1,4	(8) $\sim(Ga \vee Ha)$	6,7 MT
1,4	(9) $\sim Ga \& \sim Ha$	8 De M.
1,4	(10) $\sim Ga$	9 &E
1,4	(11) $\forall x\sim Gx$	10 $\forall I$
1,4	(12) $\sim\exists xGx$	11 QN
1,2,4	(13) \perp	2,12 $\sim E$
1,2	(14) $\sim\sim\exists xFx$	4-13 RAA
1,2	(15) $\exists xFx$	14 DNE
16	(16) Fb	A
3	(17) $Fb \rightarrow \forall xHx$	1 $\forall E$
3,16	(18) $\forall xHx$	16,17 MP
3,16	(19) Hc	18 $\forall E$
3,16	(20) $Gc \vee Hc$	19 $\vee I$
1	(21) $(Gc \vee Hc) \rightarrow Fc$	1 $\forall E$
1,3,16	(22) Fc	20,21 MP
1,3,16	(23) $\forall xFx$	22 $\forall I$
1,2,3	(24) $\forall xFx$	15,16-23 $\exists E$

[別解]

1	(1) $\forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Fx)$	A
2	(2) $\exists xGx$	A
3	(3) $\forall x(Fx \rightarrow \forall xHx)$	A
4	(4) $\sim\forall xFx$	A
4	(5) $\exists x\sim Fx$	4 QN
6	(6) $\sim Fa$	A
1	(7) $(Ga \vee Ha) \rightarrow Fa$	1 $\forall E$
1,6	(8) $\sim(Ga \vee Ha)$	6,7 MT
1,6	(9) $\sim Ga \& \sim Ha$	8 De M.

10	(10) Fb	A
3	(11) $Fb \rightarrow \forall xHx$	3 $\forall E$
3,10	(12) $\forall xHx$	10,11 MP
3,10	(13) Ha	12 $\forall E$
1,4	(14) $\sim Ha$	9 &E
1,3,6,10	(15) $Ha \& \sim Ha$	13,14 &I
1,3,6	(16) $\sim Fb$	10-15 RAA
1,3,6	(17) $\forall x\sim Fx$	16 $\forall I$
1,3,4	(18) $\forall x\sim Fx$	5,6-17 $\exists E$
1,3,4	(19) $\sim Fc$	18 $\forall E$
1	(20) $(Gc \vee Hc) \rightarrow Fc$	1 $\forall E$
1,3,4	(21) $\sim(Gc \vee Hc)$	19,20 MT
1,3,4	(22) $\sim Gc \& \sim Hc$	21 De M.
1,3,4	(23) $\sim Gc$	22 &E
1,3,4	(24) $\forall x\sim Gx$	23 $\forall I$
1,3,4	(25) $\sim \exists xGx$	24 QN
1,2,3,4	(26) $\exists xGx \& \sim \exists xGx$	2,25 &I
1,2,3	(27) $\sim \sim \forall xFx$	4-26 RAA
1,2,3	(28) $\forall xFx$	27 DNE

[7] $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vee \exists x(Fx \& Hx), \forall x(Kx \rightarrow (\sim Jx \vee \sim Hx)), \forall x(Fx \rightarrow (Kx \& Jx)), \exists xFx \vdash \exists x(Gx \& Fx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vee \exists x(Fx \& Hx)$	A
2	(2) $\forall x(Kx \rightarrow (\sim Jx \vee \sim Hx))$	A
3	(3) $\forall x(Fx \rightarrow (Kx \& Jx))$	A
4	(4) $\exists xFx$	A
5	(5) $\exists x(Fx \& Hx)$	A
6	(6) $Fa \& Ha$	A
6	(7) Fa	6 &E
6	(8) Ha	6 &E
3	(9) $Fa \rightarrow (Ka \& Ja)$	3 $\forall E$
3,6	(10) $Ka \& Ja$	7,9 MP
3,6	(11) Ka	10 &E
3,6	(12) Ja	10 &E
2	(13) $Ka \rightarrow (\sim Ja \vee \sim Ha)$	2 $\forall E$
2,3,6	(14) $\sim Ja \vee \sim Ha$	11,13 MP
6	(15) $\sim \sim Ha$	8 DNI
2,3,6	(16) $\sim Ja$	14,15 MTP
2,3,6	(17) \perp	12,16 $\sim E$
2,3,5	(18) \perp	5,6-17 $\exists E$
2,3	(19) $\sim \exists x(Fx \& Hx)$	5-18 RAA
1,2,3	(20) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	1,19 MTP
21	(21) Fa	A
1,2,3	(22) $Fa \rightarrow Ga$	20 $\forall E$
1,2,3,21	(23) Ga	21,22 MP
1,2,3,21	(24) $Ga \& Fa$	21,23 &I
1,2,3,21	(25) $\exists x(Gx \& Fx)$	24 $\exists I$
1,2,3,4	(26) $\exists x(Gx \& Fx)$	4,21-25 $\exists E$

[8] $\exists x(Fx \& \sim Gx), \forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall x((Jx \& Kx) \rightarrow Fx), \exists x(Hx \& \sim Gx) \rightarrow \forall x(Kx \rightarrow \sim Hx) \vdash \forall x(Jx \rightarrow \sim Kx)$

1	(1) $\exists x(Fx \& \sim Gx)$	A
2	(2) $\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	A
3	(3) $\forall x((Jx \& Kx) \rightarrow Fx)$	A
4	(4) $\exists x(Hx \& \sim Gx) \rightarrow \forall x(Kx \rightarrow \sim Hx)$	A
5	(5) $Fa \& \sim Ga$	A
5	(6) Fa	5 &E
2	(7) $Fa \rightarrow Ha$	2 $\forall E$
2,5	(8) Ha	6,7 MP

5	(9) $\sim Ga$	5 &E
2,5	(10) $Ha \& \sim Ga$	8,9 &I
2,5	(11) $\exists x(Hx \& \sim Gx)$	10 \exists I
1,2	(12) $\exists x(Hx \& \sim Gx)$	1,5-11 \exists E
1,2,4	(13) $\forall x(Kx \rightarrow \sim Hx)$	4,12 MP
14	(14) Ja	A
15	(15) Ka	A
14,15	(16) $Ja \& Ka$	14,15 &I
3	(17) $(Ja \& Ka) \rightarrow Fa$	3 \forall E
3,14,15	(18) Fa	16,17 MP
2	(19) $Fa \rightarrow Ha$	2 \forall E
2,3,14,15	(20) Ha	18,19 MP
1,2,4	(21) $Ka \rightarrow \sim Ha$	13 \forall E
1,2,4,15	(22) $\sim Ha$	15,21 MP
1,2,3,4,14,15	(23) \perp	20,22 \sim E
1,2,3,4,14	(24) $\sim Ka$	15-23 RAA
1,2,3,4	(25) $Ja \rightarrow \sim Ka$	14-24 CP
1,2,3,4	(26) $\forall x(Jx \rightarrow \sim Kx)$	2,5 \forall I

[9] $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Kx), \sim \exists x(Kx \& Gx), \sim \exists Fx \rightarrow \exists xGx \vdash \exists x(Fx \& Hx)$

1	(1) $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$	A
2	(2) $\forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Kx)$	A
3	(3) $\sim \exists x(Kx \& Gx)$	A
4	(4) $\sim \exists xFx \rightarrow \exists xGx$	A
5	(5) $\exists xGx$	A
6	(6) Ga	A
6	(7) $Ga \vee Ha$	6 \vee I
2	(8) $(Ga \vee Ha) \rightarrow Ka$	2 \forall E
2,6	(9) Ka	7,8 MP
2,6	(10) $Ga \& Ka$	7,9 &I
2,6	(11) $\exists x(Gx \& Kx)$	10 \exists I
2,5	(12) $\exists x(Gx \& Kx)$	5,6-11 \exists E
2,3,5	(13) \perp	3,12 \sim E
2,3	(14) $\sim \exists xGx$	5-13 RAA
2,3,4	(15) $\sim \sim \exists xFx$	4,14 MT
2,3,4	(16) $\exists xFx$	15 DNE
17	(17) Fb	A
1	(18) $Fb \rightarrow (Gb \vee Hb)$	1 \forall E
1,17	(19) $Gb \vee Hb$	17,18 MP
2	(20) $(Gb \vee Hb) \rightarrow Kb$	2 \forall E
1,2,17	(21) Kb	19,20 MP
22	(22) Gb	A
1,2,17,22	(23) $Kb \& Gb$	21,22 &I
1,2,17,22	(24) $\exists x(Kx \& Gx)$	23 \exists I
1,2,3,17,22	(25) \perp	3,24 \sim E
1,2,3,17	(26) $\sim Gb$	22-25 RAA
1,2,3,17	(27) Hb	19,26 MTP
1,2,3,17	(28) $Fb \& Hb$	17,27 &I
1,2,3,17	(29) $\exists x(Fx \& Hx)$	28 \exists I
1,2,3,4	(30) $\exists x(Fx \& Hx)$	16,17-29 \exists E

[10] $\forall x((Fx \& Hx) \rightarrow Gx) \vdash \forall x((Fx \& Gx) \rightarrow \sim Hx) \rightarrow \sim \exists x(Fx \& Hx)$

1	(1) $\forall x((Fx \& Hx) \rightarrow Gx)$	A
2	(2) $\forall x((Fx \& Gx) \rightarrow \sim Hx)$	A
3	(3) $\exists x(Fx \& Hx)$	A
4	(4) $Fa \& Ha$	A
4	(5) Fa	4 &E
4	(6) Ha	4 &E

1	(7) $(Fa \ \& \ Ha) \rightarrow Ga$	1 $\forall E$
2	(8) $(Fa \ \& \ Ga) \rightarrow \sim Ha$	2 $\forall E$
1,4	(9) Ga	4,7 MP
1,4	(10) $Fa \ \& \ Ga$	5,9 $\&I$
1,2,4	(11) $\sim Ha$	8,10 MP
1,2,4	(12) \bot	6,11 $\sim E$
1,2,3	(13) \bot	3,4-12 $\exists E$
1,2	(14) $\sim \exists x(Fx \ \& \ Hx)$	3-13 RAA