

## 束縛変項と自由変項

**記号と記号の現れ** 次の論理式にはいくつの変項が含まれているかと問われたとしよう。

$$\forall x(Fx \& Gx) \rightarrow (Fy \& Gy)$$

一つの考えでは、その答えは「*x* と *y* の二つ」というものである。一方、これとは異なる答えも可能であろう。すなわち、「この式には *x* が三箇所に現れ、*y* が二箇所に現れているから、含まれる変項は五つである」という答えである。前者の考えでは、記号は再現可能な普遍的・抽象的対象と捉えられている。これに対し、後者の考えでは記号は記号列の中での位置によって区別される個別的事物と見なされている。後者の仕方では記号が捉えられた場合、それらは記号の**現れ (occurrence)** と呼ばれる。

**量化句の作用域** ある論理式の中に、 $\forall \alpha A$  あるいは  $\exists \alpha A$  という形の記号列が現れているとしよう ( $\alpha$  は変項、 $A$  は論理式とする)。このとき (かつこのときに限り)、 $A$  は  $\forall \alpha$  あるいは  $\exists \alpha$  の**作用域 (scope)** と呼ばれる。

**例** 論理式 ' $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gx \& Hxy))$ ' において ' $\forall x$ ' の作用域は ' $(Fx \rightarrow \exists y(Gx \& Hxy))$ ' であり、' $\exists y$ ' の作用域は ' $(Gx \& Hxy)$ ' である。

**変項の束縛された現れ** 論理式  $A$  の中に、量化句  $\forall \alpha$  あるいは  $\exists \alpha$  が現れているとする。このとき (かつこのときに限り)、これらの量化句の中の  $\alpha$  の現れ、およびこれらの量化句の作用域内部の  $\alpha$  の現れは、 $A$  において**束縛されている (bound in A)** と言われ、またそれらは  $A$  における**束縛された現れ (bound occurrence)** と呼ばれる。

**変項の自由な現れ** 論理式  $A$  における変項  $\alpha$  の現れが  $A$  において束縛されていない場合 (かつその場合に限り)、その  $\alpha$  の現れは  $A$  において自由である (**free in A**) と言われ、またそれらは  $A$  における**自由な現れ (free occurrence)** と呼ばれる。

**例 1** 論理式 ' $\forall xFx \rightarrow Fy$ ' において、'*x*' の二つの現れは、いずれも束縛されている。一方、'*y*' の (唯一の) 現れはこの式において自由である。

**例 2** 論理式 ' $\exists x(Fx \& \forall y(Gy \rightarrow Hz)) \vee Jx$ ' において、'*x*' の初めの二つの現れは、いずれも束縛されているが、その第三の現れはこの式において自由である。'*y*' の二つの現れはいずれもこの式において束縛されている。'*z*' の (唯一の) 現れはこの式において自由である。

**束縛変項と自由変項** 論理式  $A$  において変項  $\alpha$  が束縛出現を持つ場合 (かつその場合に限り)、 $\alpha$  は  $A$  における**束縛変項 (bound variable)** であると言われる。論理式  $A$  において変項  $\alpha$  が自由出現を持つ場合 (かつその場合に限り)、 $\alpha$  は  $A$  における**自由変項 (free variable)** であると言われる。

**閉論理式と開論理式** 変項の自由な現れを持たない論理式は**閉論理式**と呼ばれる。閉論理式ではない論理式は**開論理式**と呼ばれる。閉論理式については、そこに現れる述語文字および定項の解釈を定めれば、その真偽が決定する。一方、開論理式については、述語文字・定項の解釈を定めても、その真偽が決定するとは限らない。その真偽を決定するためには、一般にはさらにそこに現れる自由変項に対する対象の割り当てが必要である。

**例** '*F*' を「論理学者」、'*G*' を「ドイツ人」によって解釈すると、閉論理式 ' $\exists x(Fx \& Gx)$ ' は真となる。一方、同じ解釈のもとで、開論理式 ' $\exists xFx \& Gy$ ' の真偽は決定しない。'*y*' にドイツ人を割り当てればそれは真であるが、ドイツ人以外のものを割り当てると、それは偽となる。