論理 2

1 論理記号の意味

~A：A ということはない　　(A → B)：もしA ならばB*

(A & B)：A かつB　　(A ∨ B)：A またはB

* 同様の意味を持つ他の表現としては，「A である場合にはB」「A であるときにはB」「A であるとすればB」などがある.

2 論理式

2.1 基本的な記号（原始記号）

(1)　命題変項：$P, Q, R, S, U, \dots, Z, P_1, Q_1, R_1, \dots$

(2)　論理記号：~（否定記号），　→（条件記号），　&（連言記号），　∨（選言記号）

(3) カッコ：(,)

2.2 論理式の定義

(1) すべての命題変項は論理式である.

(2) A が論理式であるならば~A は論理式である.

(3) A, B が論理式であるならば (A → B) は論理式である.

(4) A, B が論理式であるならば (A & B) は論理式である.

(5) A, B が論理式であるならば (A ∨ B) は論理式である.

(6) 上の(1)-(5)によって論理式とならないものは論理式ではない.

論理式の例：P, $\sim P$, $(\sim P \to Q)$, $(\sim(Q \,\&\, \sim R) \vee P)$, $((P \vee \sim Q) \to (\sim R \to (S \,\&\, U)))$

論理式ではない記号列の例：$(P @ Q)$, $(A \,\&\, P)$, $(\sim P)$, $P \to Q$, $(P \,\&\, Q \vee R)$, $(P \,\&\, Q \,\&\, R)$, $(Q \,\&\, R \to P)$

* 非公式な規約として, 論理式の一番外側のカッコは省略しても良いことにする. また, カッコが多重になるときは [,] や {, } を使用しても良い.

(A → B) における A は条件文の**前件**，B は**後件**と呼ばれる.

(A & B) における A, B は連言文の**連言肢**と呼ばれる.

(A ∨ B) における A, B は選言文の**選言肢**と呼ばれる.

3 日本文の記号化

問題　次の日本文を論理式に翻訳せよ．その際，命題変項を指定された意味で用いること.

P: 太郎は論理学を履修する.　　*Q*: 太郎は哲学を履修する.

R: 太郎は経済学を履修する.　　*S*: 太郎は心理学を履修する.

(1) 太郎は論理学と哲学を履修する.

(2) 太郎は論理学または哲学を履修する.

(3) 太郎は論理学と哲学のどちらも履修しない.

(4) 太郎は論理学と哲学のどちらかは履修しない.

(5) 太郎は論理学を履修するが，哲学は履修しない.

(6) もし太郎が論理学と哲学の両方を履修するならば，彼は経済学を履修しない.

(7) 太郎は論理学と哲学と経済学を履修する.

(8) 太郎は論理学，哲学，経済学のうち少なくとも一つは履修しない.

(9) 太郎は論理学，哲学，経済学，心理学のうち少なくとも一つは履修する，ということはない.

(10) 太郎は論理学，哲学，経済学のうち，ちょうど一つを履修する.

(11) 太郎は論理学，哲学，経済学のうち，少なくとも二つを履修する.

(12) 太郎は経済学を履修して心理学を履修しないか，または経済学を履修せずに心理学を履修するかのどちらかであ

る．
(13) 太郎は論理学を履修し，なおかつ哲学を履修しない場合には経済学と心理学のうち少なくとも一方を履修する．
(14) 太郎は，論理学を履修するときに限り，哲学を履修する．
(15) 太郎は，論理学を履修するとき，かつそのときに限り，哲学を履修する．
(16) もし太郎が論理学を履修するならば，彼は経済学と心理学のどちらも履修しない場合に限り哲学を履修する．

解答
(1) $P \,\&\, Q$
(2) $P \vee Q$
(3) $\sim P \,\&\, \sim Q$ または $\sim(P \vee Q)$
(4) $\sim P \vee \sim Q$ または $\sim(P \,\&\, Q)$
(5) $P \,\&\, \sim Q$
(6) $(P \,\&\, Q) \to \sim R$
(7) $P \,\&\, Q \,\&\, R$
(8) $\sim P \vee \sim Q \vee \sim R$ または $\sim(P \,\&\, Q \,\&\, R)$
(9) $\sim(P \vee Q \vee R \vee S)$ または $\sim P \,\&\, \sim Q \,\&\, \sim R \,\&\, \sim S$
(10) $(P \,\&\, \sim Q \,\&\, \sim R) \vee (\sim P \,\&\, Q \,\&\, \sim R) \vee (\sim P \,\&\, \sim Q \,\&\, R)$
(11) $(P \,\&\, Q \,\&\, \sim R) \vee (P \,\&\, \sim Q \,\&\, R) \vee (\sim P \,\&\, Q \,\&\, R) \vee (P \,\&\, Q \,\&\, R)$ または $(P \,\&\, Q) \vee (Q \,\&\, R) \vee (R \,\&\, P)$
(12) $(R \,\&\, \sim S) \vee (\sim R \,\&\, S)$
(13) $P \,\&\, (\sim Q \to (R \vee S))$
(14) $Q \to P$
(15) $(P \to Q) \,\&\, (Q \to P)$ または $P \leftrightarrow Q$
(16) $P \to (Q \to (\sim R \,\&\, \sim S))$

連言または選言の連続とカッコの省略について

$(P \,\&\, Q \,\&\, R)$ は厳密には論理式ではなく，これを論理式にするためにはカッコを付け加えて $((P \,\&\, Q) \,\&\, R)$ または $(P \,\&\, (Q \,\&\, R))$ としなければならない．しかし，これらの式はどちらも論理的に同じ意味を持つ（どちらも P, Q, R がすべて真であるときに真であり，それ以外のときには偽である．）したがって実際には内側のカッコを省いて $(P \,\&\, Q \,\&\, R)$ と書いても論理的な意味は不明確にならないので，以後はこのような書き方を認めることとする．4 つ以上の式が連言記号によって結ばれる場合も同様である．また選言記号についても，同様の理由から，$(P \vee Q \vee R)$ のような書き方を認めることにする．カッコを復元する必要がある場合には，左側の結合を優先する．すなわち，例えば$(P \,\&\, Q \,\&\, R)$は$((P \,\&\, Q) \,\&\, R)$，$(P \,\&\, Q \,\&\, R \,\&\, S)$は$(((P \,\&\, Q) \,\&\, R) \,\&\, S)$と解釈することにする．選言の場合も同様である．

「…であるときに限り---」および「…であるとき,かつそのときに限り---」の記号化

「P であるときに限り Q」は $Q \to P$（あるいは $\sim P \to \sim Q$）によって記号化できる．
例：以下では P は「太郎は成績優秀である」，Q は「太郎は奨学金がもらえる」を表すとする．
(1) 太郎は成績優秀であるときに限り奨学金がもらえる．
は
(2) もし太郎が成績優秀でないならば奨学金はもらえない．（記号化：$\sim P \to \sim Q$）
と論理的に同じ意味を持つ．さらに(2)は
(3) もし太郎が奨学金をもらえるならば，彼は成績優秀（なはず）である．
と論理的に同じ意味を持つ（対偶の法則）．これは $Q \to P$ と記号化できる．

「P であるとき，かつそのときに限り Q」は $(P \to Q) \,\&\, (Q \to P)$ によって記号化できる．
例：(4)は(5)と(6)との連言であると考えられる．
(4) 太郎は成績優秀であるとき，かつそのときに限り奨学金がもらえる．
(5) 太郎は成績優秀であるとき奨学金がもらえる．（記号化：$P \to Q$）
(6) 太郎はそのとき（＝成績優秀であるとき）に限り奨学金がもらえる．（記号化：$Q \to P$）
よって(4)は $(P \to Q) \,\&\, (Q \to P)$ によって記号化できる．この式は双条件記号 $\leftrightarrow$ を用いて $P \leftrightarrow Q$ と短縮される．

双条件記号の定義：$(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) =_{\mathrm{df}} ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \,\&\, (\mathrm{A} \to \mathrm{B}))$.

論理 1　定期試験　記号化問題

[1] もし太郎が論理学と哲学を履修するならば，彼は経済学と心理学のどちらかは履修しない．
[2] 太郎が論理学と哲学の少なくとも一方を履修しつつ経済学と心理学のどちらも履修しない，ということはない．
[3] 太郎は論理学，哲学，経済学のうち，ちょうど 2 科目を履修する．
[4] 太郎が論理学を履修する場合，彼は哲学を履修しないときに限って経済学または心理学を履修する．

解答

[1] $(P \& Q) \rightarrow (\sim R \vee \sim S)$
[2] $\sim((P \vee Q) \& (\sim R \& \sim S))$
[3] $(P \& Q \& \sim R) \vee (P \& \sim Q \& R) \vee (\sim P \& Q \& R)$
[4] $P \rightarrow ((R \vee S) \rightarrow \sim Q)$