真理値分析(2)：クワインの方法と背理法

1. クワインの方法

否定文，連言文，選言文，条件文，相互条件文の基本的真理表を検討すると, 次のことが分かる:
(i) 否定文にかんして：A が真であるとき否定文~A は偽であり，A が偽であるとき否定文~A は真である.
(ii) 連言文にかんして：連言肢の一方が偽であるときには連言文は偽である．連言肢の一方が真であるときには連言文の真理値はもう一方の連言肢の真理値と一致する.
(iii) 選言文にかんして：選言肢の一方が真であるときには選言文は真である．選言肢の一方が偽であるときには選言文の真理値はもう一方の選言肢の真理値と一致する.
(iv) 条件文にかんして：前件が偽であるときには条件文は（後件の真偽に関わらず）真である．前件が真であるときには条件文の真理値は後件の真理値と一致する．後件が真であるときには条件文は（前件の真偽に関わらず）真である．後件が偽であるときには条件文の真偽は前件の否定の真理値と一致する.
(v) 相互条件文にかんして：左辺（右辺）が真であるときには相互条件文の真偽は右辺（左辺）の真偽と一致する．左辺（右辺）が偽であるときには相互条件文の真偽は右辺（左辺）の否定の真偽と一致する.

以上の考察の結果は次のように簡潔に表現できる：

(1a) $\sim\top = \bot$	(1b) $\sim\bot = \top$		
(2a) $\bot \,\&\, A = A \,\&\, \bot = \bot$	(2b) $\top \,\&\, A = A \,\&\, \top = A$		
(3a) $\top \vee A = A \vee \top = \top$	(3b) $\bot \vee A = A \vee \bot = A$		
(4a) $\bot \rightarrow A = \top$	(4b) $A \rightarrow \top = \top$	(4c) $\top \rightarrow A = A$	(4d) $A \rightarrow \bot = \sim A$
(5a) $\top \leftrightarrow A = A \leftrightarrow \top = A$	(5b) $\bot \leftrightarrow A = A \leftrightarrow \bot = \sim A$		

なお，内側のカッコを省いた多重の連言文および選言文を扱うためには，次の規則が必要となる：

(2a′) $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_i \,\&\, \bot \,\&\, A_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_n = \bot$
(2b′) $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_i \,\&\, \top \,\&\, A_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_n = A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_i \,\&\, A_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$

(2a′)によれば，連言肢として⊥を含む連言文は⊥によって置き換えることができる．(2b′)によれば，連言肢としての T は連言文から削除することができる.

(3a′) $A_1 \vee \ldots \vee A_i \vee \top \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n = \top$
(3b′) $A_1 \vee \ldots \vee A_i \vee \bot \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n = A_1 \vee \ldots \vee A_i \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n$

(3a′)によれば，選言肢として T を含む選言文は T によって置き換えることができる．(3b′)によれば，選言肢としての⊥は選言文から削除することができる.

上の規則を用いて，次の式が命題変項に対する真理値のいかなる割り当てのもとで真になるか，また偽になるかを検討する：
$((P \,\&\, Q) \vee (\sim P \,\&\, \sim R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$.
　与えられた式は命題変項を 3 つ含むので，考えるべき真理値の割り当ては 8 通りであるが，これらの割り当ては，*P* を真とするものと *P* を偽とするものに大きく二分される.
(1) *P* が真である場合．このとき与えられた式は次のように簡略化できる（ここで簡略化とは，与えられた式と同じ真理値とを持つより簡単な式を求めることである）：

$((\top \,\&\, Q) \vee (\sim\top \,\&\, \sim R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	［T の代入］
$(Q \vee (\sim\top \,\&\, \sim R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	［(2b)による］
$(Q \vee (\bot \,\&\, \sim R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	［(1a)による］
$(Q \vee \bot) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	［(2a)による］
$Q \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$	［(3b)による］

ここで，さらに *Q* が真である場合と *Q* が偽である場合が考えられる.
(1.1) （*P* が真であり，さらに）*Q* が真である場合．このとき(1)で得られた式は次のように簡略化できる.

$\top \rightarrow (\top \leftrightarrow R)$	［T の代入］
$\top \rightarrow R$	［(5a)による］
R	［(4c)による］
$\top \quad \bot$	［T, ⊥の代入］

すなわちこの場合，*R* が真なら最初の式は真，*R* が偽なら最初の式は偽である．*R* の次の行はそのことを表す.
(1.2) （*P* が真であり，さらに）*Q* が偽である場合．このとき(1)で得られた式は次のように簡略化できる.

$\bot \rightarrow (\bot \leftrightarrow R)$	［⊥の代入］
$\top$	［(4a)による］

したがってこの場合，最初の式は R の真偽にかかわらず真である．
(2) P が偽である場合．このとき最初の式は次のように簡略化できる．

$((\bot \& Q) \lor ({\sim}\bot \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$	［⊥の代入］
$(\bot \lor ({\sim}\bot \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$	［(2a)による］
$(\bot \lor (\top \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$	［(1b)による］
$(\bot \lor {\sim}R) \to (Q \leftrightarrow R)$	［(2b)による］
${\sim}R \to (Q \leftrightarrow R)$	［(3b)による］

ここで，さらに Q が真である場合と Q が偽である場合が考えられる．
(2.1)（P が偽であり，さらに）Q が真である場合．このとき(2)で得られた式は次のように簡略化できる．

${\sim}R \to (\top \leftrightarrow R)$	［⊤の代入］
${\sim}R \to R$	［(5a)による］

ここで，さらに R が真である場合と R が偽である場合が考えられる．
(2.1.1)（P が偽，Q が真であり，さらに）R が真である場合．(2.1)で得られた式は次のように簡略化できる．

${\sim}\top \to \top$	［⊤の代入］
$\bot \to \top$	［(1a)による］
$\top$	［(4a)または(4b)による］

すなわちこの場合，最初の式は真である．
(2.1.2)（P が偽，Q が真であり，さらに）R が偽である場合．(2.1)で得られた式は次のように簡略化できる．

${\sim}\bot \to \bot$	［⊥の代入］
$\top \to \bot$	［(1b)による］
$\bot$	［(4c)による］

すなわちこの場合，最初の式は偽である．
(2.2)（P が偽であり，さらに）Q が偽である場合．このとき(2)で得られた式は次のように簡略化できる．

${\sim}R \to (\bot \leftrightarrow R)$	［⊥の代入］
${\sim}R \to {\sim}R$	［(5b)による］
$\top$	

${\sim}R \to {\sim}R$ は明らかに恒真式であるから，直ちに ⊤ で置き換えて構わない．したがってこの場合，最初の式は真である．

以上の考察の全体は，次のように表すことができる．

$$((P \& Q) \lor ({\sim}P \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$$

$((\top \& Q) \lor ({\sim}\top \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		$((\bot \& Q) \lor ({\sim}\bot \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		
$(Q \lor ({\sim}\top \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		$(\bot \lor ({\sim}\bot \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		
$(Q \lor (\bot \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		$(\bot \lor (\top \& {\sim}R)) \to (Q \leftrightarrow R)$		
$(Q \lor \bot) \to (Q \leftrightarrow R)$		$(\bot \lor {\sim}R) \to (Q \leftrightarrow R)$		
$Q \to (Q \leftrightarrow R)$		${\sim}R \to (Q \leftrightarrow R)$		
$\top \to (\top \leftrightarrow R)$	$\bot \to (\bot \leftrightarrow R)$	${\sim}R \to (\top \leftrightarrow R)$		${\sim}R \to (\bot \leftrightarrow R)$
$\top \to R$	$\top$	${\sim}R \to R$		${\sim}R \to {\sim}R$
R		${\sim}\top \to \top$	${\sim}\bot \to \bot$	$\top$
$\top \quad \bot$		$\bot \to \top$	$\top \to \bot$	
		$\top$	$\bot$	

(2.2)におけるように，明らかな恒真式は，命題変項に ⊤, ⊥を代入して規則を適用するという手続きを経ずに直ちに ⊤ によって置き換えて構わない．具体的には，$A \to A$, $A \lor {\sim}A$, $A \leftrightarrow A$ という形の明白な恒真式は，直ちに ⊤ によって置き換えて構わない．また，$A \& {\sim}A$, $A \leftrightarrow {\sim}A$ という形式の明白な恒偽式は直ちに⊥によって置き換えて構わない．（なお $A \to {\sim}A$ および ${\sim}A \to A$ は一般には恒偽ではないので注意が必要である．）さらに，分析の過程で論理式（またはその部分式）を，明らかにそれと同値な式によって置き換えて構わない．具体的には，${\sim}{\sim}A$, $A \& A$, $A \lor A$ は A によって置き換えて構わない．また，$A \& B$ は $B \& A$ によって，$A \lor B$ は $B \lor A$ によって置き換えて構わない．なお，以上では分析が 1 行進む度に 1 つの規則だけを適用したが，以下では一度に複数の規則を適用しても構わないことにする．

2. クワインの方法による恒真性，同値性，妥当性の判定

恒真性　クワインの方法によって，与えられた論理式が恒真であるか否かを判定することができる．

例題 1　クワインの方法によって次の論理式が恒真であることを確かめよ：${\sim}((P \& Q) \& {\sim}R) \to ((P \to R) \lor (P \& {\sim}Q))$

解答

$\sim((P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) \to ((P \to R) \vee (P \,\&\, \sim Q))$

$\sim((\top \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) \to ((\top \to R) \vee (\top \,\&\, \sim Q))$ $\quad$ $\sim((\bot \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) \to ((\bot \to R) \vee (\bot \,\&\, \sim Q))$

$\sim(Q \,\&\, \sim R) \to (R \vee \sim Q)$ $\quad$ $\sim(\bot \,\&\, \sim R) \to (\top \vee \bot)$

$\sim(\top \,\&\, \sim R) \to (R \vee \sim\top)$ $\quad$ $\sim(\bot \,\&\, \sim R) \to (R \vee \sim\bot)$ $\quad$ $\sim\bot \to \top$

$\sim\sim R \to (R \vee \bot)$ $\quad$ $\sim\bot \to (R \vee \top)$ $\quad$ $\top$

$R \to R$ $\quad$ $\top \to \top$

$\top$ $\quad$ $\top$

問題 1　次の論理式が恒真であるか否かをクワインの方法によって判定せよ．
(1) $(P \to Q) \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \leftrightarrow P)$　(2) $(P \to Q) \leftrightarrow ((P \vee Q) \leftrightarrow Q)$　(3) $(P \to (Q \,\&\, R)) \to ((P \,\&\, Q) \leftrightarrow (P \,\&\, R))$
(4) $(P \,\&\, (Q \to R)) \vee ((\sim P \leftrightarrow (Q \,\&\, \sim R)) \to \sim(P \vee \sim R))$

同値性　式 A と式 B が同値（A $\Dashv\vDash$ B）であるとき，かつそのときに限り，A $\leftrightarrow$ B が恒真である．したがって A と B が同値であるか否かを判定するためには，A $\leftrightarrow$ B が恒真であるか否かを判定すればよい．

問題 2　クワインの方法によって，次の同値関係が成り立つことを示せ．
(1) $(P \,\&\, Q) \,\&\, R \Dashv\vDash P \,\&\, (Q \,\&\, R)$［結合法則］　(2) $(P \vee Q) \vee R \Dashv\vDash P \vee (Q \vee R)$［結合法則］　(3) $P \Dashv\vDash P \vee (P \,\&\, Q)$［吸収律］(4) $P \Dashv\vDash P \,\&\, (P \vee Q)$［吸収律］(5) $\sim(P \leftrightarrow Q) \Dashv\vDash (P \vee Q) \,\&\, \sim(P \,\&\, Q)$　(6) $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \Dashv\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$
(7) $P \,\&\, (Q \vee R) \Dashv\vDash (P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R)$［分配法則］　(8) $P \vee (Q \,\&\, R) \Dashv\vDash (P \vee Q) \,\&\, (P \vee R)$［分配法則］
(9) $(P \,\&\, Q) \to R \Dashv\vDash P \to (Q \to R)$［$\vDash$ 移出律，$\Dashv$ 移入律］(10) $(P \,\&\, Q) \vee (Q \,\&\, R) \vee (R \,\&\, P) \Dashv\vDash (P \vee Q) \,\&\, (Q \vee R) \,\&\, (R \vee P)$
(11) $(P \,\&\, Q \,\&\, R) \vee (\sim P \,\&\, Q \,\&\, R) \vee (P \,\&\, \sim Q \,\&\, R) \vee (P \,\&\, Q \,\&\, \sim R) \Dashv\vDash (P \,\&\, Q) \vee (Q \,\&\, R) \vee (R \,\&\, P)$

解答
(7)

$(P \,\&\, (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R))$

$(\top \,\&\, (Q \vee R)) \leftrightarrow ((\top \,\&\, Q) \vee (\top \,\&\, R))$ $\quad$ $(\bot \,\&\, (Q \vee R)) \leftrightarrow ((\bot \,\&\, Q) \vee (\bot \,\&\, R))$

$(Q \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)$ $\quad$ $\bot \leftrightarrow (\bot \vee \bot)$

$\top$ $\quad$ $\bot \leftrightarrow \bot$

$\top$

妥当性　推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore C$ が妥当であるとき，かつそのときに限り，式 $(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to C$ は恒真である．したがって，与えられた推論の妥当性を判定するためには，それに対応する条件文の恒真性を判定すればよい．

例題 2　次の推論の妥当性を適切な条件文が恒真であるか否かを判定することによって判定せよ．
$P \to R, Q \to R, P \vee Q \therefore R$［単純構成的両刀論法］

解答　与えられた推論が妥当であるとき，かつそのときに限り，条件文$((P \to R) \,\&\, (Q \to R) \,\&\, (P \vee Q)) \to R$ は恒真である．クワインの方法によってこの条件文の真理値分析を行うと，以下のようになる．

$((P \to R) \,\&\, (Q \to R) \,\&\, (P \vee Q)) \to R$

$((\top \to R) \,\&\, (Q \to R) \,\&\, (\top \vee Q)) \to R$ $\quad$ $((\bot \to R) \,\&\, (Q \to R) \,\&\, (\bot \vee Q)) \to R$

$(R \,\&\, (Q \to R) \,\&\, \top) \to R$ $\quad$ $(\top \,\&\, (Q \to R) \,\&\, Q) \to R$

$(R \,\&\, (Q \to R)) \to R$ $\quad$ $((Q \to R) \,\&\, Q) \to R$

$(\top \,\&\, (Q \to \top)) \to \top$ $\quad$ $(\bot \,\&\, (Q \to \bot)) \to \bot$ $\quad$ $((\top \to R) \,\&\, \top) \to R$ $\quad$ $((\bot \to R) \,\&\, \bot) \to R$

$\top$ $\quad$ $\bot \to \bot$ $\quad$ $(R \,\&\, \top) \to R$ $\quad$ $\bot \to R$

$\top$ $\quad$ $R \to R$ $\quad$ $\top$

$\top$

したがって，この条件文は恒真であるから，与えられた推論は妥当である．

なお，上の分析の左側の 4 行目においては $\top, \bot$を代入する命題変項として P の次に Q ではなく R が選ばれている．これは 3 行目の式に R が最も多く現れているため，そうした方が分析が早く終わるからである．このように，与えられた式が恒真であるか否かを調べる際には，$\top, \bot$を代入する命題変項としてその都度適切なものを選んで良い．（分析の左側と右側で命題変項を選ぶ順序が異なっても構わない．）

問題 3　上の方法を用いて次の推論が妥当であるか否かを判定せよ．
(1) $(P \to Q) \,\&\, (R \to P), (P \vee R) \,\&\, \sim(Q \,\&\, R) \therefore (P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R$　(2) $(P \,\&\, \sim Q) \to R, Q \vee \sim R \therefore (\sim P \vee R) \to (Q \leftrightarrow R)$
(3) $P \to R, Q \to S, P \vee Q \therefore R \vee S$［複合構成的両刀論法］(4) $\sim P \to \sim R, Q \vee S \therefore \sim(P \,\&\, Q) \to (R \to S)$
(5) $\sim(P \vee Q) \to (R \to S), P \leftrightarrow Q \therefore P \vee S$　(6) $(Q \to P) \to R, \sim Q \vee S, \sim S \therefore \sim R \to U$

解答

(4)

$$((\sim P \to \sim R) \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim(P \,\&\, Q) \to (R \to S))$$

$$((\sim\top \to \sim R) \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim(\top \,\&\, Q) \to (R \to S))$$
$$((\bot \to \sim R) \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim Q \to (R \to S))$$
$$(\top \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim Q \to (R \to S))$$
$$(Q \vee S) \to (\sim Q \to (R \to S))$$

$$(\top \vee S) \to (\sim\top \to (R \to S))$$
$$\top \to (\bot \to (R \to S))$$
$$\top \to \top$$
$$\top$$

$$(\bot \vee S) \to (\sim\bot \to (R \to S))$$
$$S \to (\top \to (R \to S))$$
$$S \to (R \to S)$$

$$\top \to (R \to \top)$$
$$\top \to \top$$
$$\top$$

$$\bot \to (R \to \bot)$$
$$\top$$

$$((\sim\bot \to \sim R) \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim(\bot \,\&\, Q) \to (R \to S))$$
$$((\top \to \sim R) \,\&\, (Q \vee S)) \to (\sim\bot \to (R \to S))$$
$$(\sim R \,\&\, (Q \vee S)) \to (\top \to (R \to S))$$
$$(\sim R \,\&\, (Q \vee S)) \to (R \to S)$$

$$(\sim\top \,\&\, (Q \vee S)) \to (\top \to S)$$
$$(\bot \,\&\, (Q \vee S)) \to S$$
$$\bot \to S$$
$$\top$$

$$(\sim\bot \,\&\, (Q \vee S)) \to (\bot \to S)$$
$$(\top \,\&\, (Q \vee S)) \to \top$$
$$\top$$

よって与えられた推論は妥当である．

3. 背理法による恒真性，妥当性の証明

恒真性　ある論理式が恒真であることを示すためには，それが偽になるような命題変項に対する真理値の割り当てが存在しないことを示せばよい．このためには，それがある割り当てのもとで偽になると仮定し，矛盾を導けばよい．（矛盾が導けない場合には，その式は恒真ではない．）

例　前節の例題1の論理式 $\sim((P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) \to ((P \to R) \vee (P \,\&\, \sim Q))$ が恒真であることを次のようにして示すことができる：

$\sim((P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) \to ((P \to R) \vee (P \,\&\, \sim Q)) = \bot$と仮定する．このとき

(1) $\sim((P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) = \top$ かつ (2) $(P \to R) \vee (P \,\&\, \sim Q) = \bot$

(2)より

(3) $P \to R = \bot$ かつ　(4) $P \,\&\, \sim Q = \bot$

(3)より

(5) $P = \top$　かつ　(6) $R = \bot$

(4), (5)より $P \,\&\, \sim Q = \top \,\&\, \sim Q = \bot$．したがって$\sim Q = \bot$だから

(7) $Q = \top$

(5), (6), (7)により$\sim((P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R) = \sim((\top \,\&\, \top) \,\&\, \sim\bot) = \sim(\top \,\&\, \top) = \bot$．これは(1)と矛盾する．したがって最初の仮定は成り立ち得ないから，与えられた論理式は恒真である．■

妥当性　ある推論が妥当であることを示すためには，その仮定がすべて真であるが結論が偽であるような命題変項に対する真理値の割り当てが存在しないことを示せばよい．このためには，その仮定がすべて真であるが結論が偽であると仮定し，矛盾を導けばよい．（矛盾が導けない場合には，その推論は不妥当である．）

例 1　問題 3(3)の推論 $[P \to R, Q \to S, P \vee Q \therefore R \vee S]$ が妥当であることは，次のようにして示すことができる：

(1) $P \to R = \top$　(2) $Q \to S = \top$　(3) $P \vee Q = \top$　(4) $R \vee S = \bot$

と仮定する．このとき(4)より

(5) $R = \bot$ かつ　(6) $S = \bot$

(1), (5)より $P \to \bot = \top$．したがって

(7) $P = \bot$

(2), (6)より $Q \to \bot = \top$．したがって

(8) $Q = \bot$

(7), (8)より $P \vee Q = \bot \vee \bot = \bot$．これは(3)と矛盾する．したがって(1), (2), (3), (4)は同時に成り立ち得ないから，与えられた推論は妥当である．■

例 2　問題 3(4)の推論 $[\sim P \to \sim R, Q \vee S \therefore \sim(P \,\&\, Q) \to (R \to S)]$ が妥当であることは，次のようにして示すことができる：

(1) $\sim P \to \sim R = \top$　(2) $Q \vee S = \top$　(3) $\sim(P \,\&\, Q) \to (R \to S) = \bot$

と仮定する．このとき(3)より$\sim(P \,\&\, Q) = \top$．したがって

(4) $P \,\&\, Q = \bot$

さらに(3)より $R \to S = \bot$だから

(5) $R = \top$　かつ　(6) $S = \bot$

一方(4)より $P = \bot$または $Q = \bot$.

(i) $P = \bot$である場合，(5)より$\sim P \to \sim R = \sim\bot \to \sim\top = \top \to \bot = \bot$．これは(1)と矛盾する．

(ii) $Q = \bot$である場合，(6)より $Q \vee S = \bot \vee \bot = \bot$．これは(2)と矛盾する．
したがって(1), (2), (3)は同時に成り立ち得ないから，与えられた推論は妥当である．■

問題 4　次の各推論について，それが妥当である場合には，背理法によってそのことを証明せよ．また，それが不妥当である場合には，その不妥当性を示す（すなわち仮定がすべて真，かつ結論が偽となる）ような，命題変項に対する真理値の割り当てを求めよ．
(1) $\sim(P \leftrightarrow Q), R \to (P \vee \sim Q) \therefore P \vee \sim R$　(2) $\sim P \to (Q \vee R), R \to (Q \to \sim P), Q \to R \therefore \sim P \leftrightarrow Q$
(3) $(P \,\&\, \sim Q) \to R, (Q \,\&\, \sim P) \to S, U \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q), V \to \sim(R \vee S) \therefore V \to \sim U$
(4) $\sim(P \,\&\, \sim Q) \vee (\sim R \to S), \sim S \,\&\, \sim Q, U \to (\sim S \to (\sim R \vee P)) \therefore (P \leftrightarrow \sim R) \to \sim U$