真理値分析(1)：真理表

1. 基本的真理表

論理式の真理条件

否定：~A は A が偽であるとき真であり，それ以外のときには偽である．

連言：A & B は A と B の両方が真であるとき真であり，それ以外のときには偽である．

選言：A∨B は A と B の少なくとも一方が真であるとき真であり，それ以外のときには偽である．

条件：A → B は《A が真であり，かつ B が偽である》ときに偽であり，それ以外のときには真である．

以上を表にすると次のようになる．T は真，⊥ は偽を表す．論理式の真偽はその**真理値** (truth-value) と呼ばれる．

A	~A
T	⊥
⊥	T

A	B	A & B
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

A	B	A ∨ B
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

A	B	A → B
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

2. 論理式の真理値の決定

問題　命題変項 (P, Q, R, S, U, V, W) が次の意味を持つとする. このとき下記の(1)-(8)の論理式の真偽を決定せよ．（命題変項の真偽を決める際には常識的な知識を用いて構わない．）

P: 雪は白い．　Q: 雪は青い．　R: 東京は日本の首都である．　S: 大阪は日本の首都である．

U: 1 + 1 = 2.　V: 2 + 2 = 5.　W: 太陽は地球よりも大きい.

(1) $P \to Q$　(2) $Q \to P$　(3) $\sim(P \vee Q)$　(4) $(R \,\&\, S) \vee \sim U$　(5) $V \to (Q \to W)$

(6) $\sim(W \to U) \,\&\, (Q \to V)$　(7) $\sim(W \vee (S \to P))$　(8) $(\sim W \,\&\, (U \to S)) \to (Q \vee (U \to W))$

(4) の解答：与えられた論理式に現れる命題変項にその真理値名を代入して，論理式を構成する部分となっている式（部分式）の真理値を求め，それから式全体の真理値を決めてゆくのが便利であろう．その過程は次のように表せる（ここで A = B は A と B の真理値が一致することを表す）：$(R \,\&\, S) \vee \sim U$ = (T &⊥)∨~T = ⊥ ∨~T = ⊥∨⊥ = ⊥.

3. 任意の論理式の真理表

上の基本的真理表を用いると，論理記号を複数含む，より複雑な論理式の真理表を作ることができる．そのような論理式の真理表を作るためには, その部分式の真理表を作り, それに基づいて全体の真理表を作ればよい.

例題　次の論理式の真理表を作成せよ：(1) $P \,\&\, \sim Q$ (2) $(P \,\&\, Q) \vee \sim(P \to Q)$ (3) $(\sim Q \vee R) \to P$

解答

(1)

P	Q	$\sim Q$	$P \,\&\, \sim Q$
T	T	⊥	⊥
T	⊥	T	T
⊥	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	⊥

(2)

P	Q	$P \,\&\, Q$	$P \to Q$	$\sim(P \to Q)$	$(P \,\&\, Q) \vee \sim(P \to Q)$
T	T	T	T	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥

(3)

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim Q \vee R$	$(\sim Q \vee R) \to P$
T	T	T	⊥	T	T
T	T	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T	T
⊥	T	T	⊥	T	⊥
⊥	T	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	⊥
⊥	⊥	⊥	T	T	⊥

* 命題変項 ($P, Q, R, \ldots$) をちょうど n 個含む論理式に対する真理表は(最上行以外に) 2^n 行を要する.

相互条件　相互条件記号は次のように定義される：$(A \leftrightarrow B) =_{df} ((A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A))$

したがって相互条件記号に対する真理表は次のとおりである:

A	B	A ↔ B
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	T

A ↔ B は A と B の真理値が同じであるとき真であり, それ以外のときには偽である.

4. 恒真式

定義　論理式 A は（真理関数的に）**恒真**である $=_{df}$ 命題変項に対する真理値のいかなる割り当てのもとでも A は真である.

* 真理表において, 一つの行は命題変項に対する真理値の一つの割り当て方に対応する. したがって, ある論理式が恒真式であるとは, その論理式の真理表がすべての行において T を示すことに他ならない.

例　次の論理式は恒真である.
(1) $P \vee {\sim}P$［排中律］ (2) ${\sim}(P \,\&\, {\sim}P)$ ［矛盾律］(3) $P \rightarrow P$ (4) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ (5) $P \rightarrow ({\sim}P \rightarrow Q)$ (6) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
(7) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ ［パースの法則］(8) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
(9) $((P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (10) $((P \,\&\, Q) \rightarrow R) \leftrightarrow ((Q \rightarrow R) \vee {\sim}P)$

上の (8) が恒真であることは, 次の真理表によって示される.

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
T	⊥	T	T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	T
⊥	T	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T

命題変項に対するいかなる真理値の割り当てのもとでも偽になる式は(真理関数的に) **恒偽**であると言われる. また, 恒偽ではない論理式は**整合的**であると言われる.

代入による恒真性の保存　恒真式に含まれる命題変項に任意の論理式を一様に代入する（すなわち, 同じ命題変項が現れている箇所には同じ論理式を代入する） ことによって得られる論理式は恒真である.

例　$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ({\sim}Q \rightarrow {\sim}P)$ は恒真である. したがって, P に $P \,\&\, {\sim}R$ を, Q に $R \vee S$ を代入することによってこの式から得られる論理式 $((P \,\&\, {\sim}R) \rightarrow (R \vee S)) \leftrightarrow ({\sim}(R \vee S) \rightarrow {\sim}(P \,\&\, {\sim}R))$ は恒真である.

問題　次の言明が正しいか否か判定せよ：(1) 整合的であるが恒真ではない論理式が与えられたとき, その命題変項に適当な式を一様に代入することによって, 恒真式を得ることができる. (2) 整合的であるが恒真ではない論理式が与えられたとき, その命題変項に適当な式を一様に代入することによって, 恒偽な式を得ることが可能である.

5. 含意 (implication)

定義　論理式 A は論理式 B を(真理関数的に) **含意**する $=_{df}$ 命題変項に対する真理値のいかなる割り当てのもとでも, 《A が真であり, かつ B が偽である》ことはない.

式 A が式 B を含意することを次のように表す：$A \vDash B$.

例　(1) ${\sim}(P \rightarrow Q) \vDash {\sim}Q$ (2) $P \,\&\, Q \vDash P \vee Q$ (3) 任意の A について $P \,\&\, {\sim}P \vDash A$. (4) 任意の A について $A \vDash P \vee {\sim}P$.

(1) が成り立つことは，次の真理表によって示される.

P	Q	$P \to Q$	$\sim(P \to Q)$	$\sim Q$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤

6. 同値 (equivalence)

定義　論理式 A は論理式 B と(**真理関数的に**)**同値**である $=_{\mathrm{df}}$ 命題変項に対する真理値のいかなる割り当てのもとでも，A と B は同じ真理値を持つ.

同値は双方向の含意である：式 A と式 B が同値であるとき，かつそのときに限り，A ⊨ B かつ B ⊨ A である.

式 A と式 B が同値であることを次のように表す：A ⫤⊨ B.

例
(1) $\sim(P \,\&\, Q)$ ⫤⊨ $\sim P \lor \sim Q$［ド･モルガンの法則］ (2) $P \leftrightarrow Q$ ⫤⊨ $(P \,\&\, Q) \lor (\sim P \,\&\, \sim Q)$
(3) $P \,\&\, (Q \lor R)$ ⫤⊨ $(P \,\&\, Q) \lor (P \,\&\, R)$［分配法則］ (4) $P \lor (Q \,\&\, R)$ ⫤⊨ $(P \lor Q) \,\&\, (P \lor R)$［分配法則］

上の (2) が成り立つことは，次の真理表によって示される.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \,\&\, Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \,\&\, \sim Q$	$(P \,\&\, Q) \lor (\sim P \,\&\, \sim Q)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤

問題　真理表を用いて，次の同値関係が成り立つことを示せ.
(1) $\sim(P \lor Q)$ ⫤⊨ $\sim P \,\&\, \sim Q$［ド･モルガンの法則］　(2) $P \to Q$ ⫤⊨ $\sim Q \to \sim P$［対偶の法則］
(3) $P \to Q$ ⫤⊨ $\sim P \lor Q$　(4) $P \to Q$ ⫤⊨ $\sim(P \,\&\, \sim Q)$　(5) $(P \,\&\, Q) \to R$ ⫤⊨ $P \to (Q \to R)$［⊨ 移出律，⫤ 移入律］
(6) $\sim(P \leftrightarrow Q)$ ⫤⊨ $\sim P \leftrightarrow Q$

同値な論理式の置換　ある式 A の部分式 B を，B と同値な式 B′ で置き換えることによって得られる式を A′ とする.このとき，A と A′ は同値である.

例　$P \to \sim(Q \lor R)$ に現れる $\sim(Q \lor R)$ を，それと同値な式 $\sim Q \,\&\, \sim R$ で置き換えることによって式 $P \to (\sim Q \,\&\, \sim R)$ が得られるが，これはもとの式 $P \to \sim(Q \lor R)$ と同値である.

7. 妥当性 (validity)

定義　推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ は(**真理関数的に**)**妥当**である $=_{\mathrm{df}}$ 命題変項に対する真理値のいかなる割り当てのもとでも《仮定 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ がすべて真であり，かつ結論 B が偽である》ということはない.

例　次の推論は妥当である：$P \to (Q \lor R), \sim R \therefore \sim Q \to \sim P$. このことは次の真理表によって確かめられる.

				仮定1	仮定2			結論	
P	Q	R	$Q \lor R$	$P \to (Q \lor R)$	$\sim R$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \to \sim P$	
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	✓
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	✓
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	✓

この表において《仮定がすべて真であり，かつ結論が偽である》ような行は存在しない．すなわち，P, Q, R の真偽のどのような組み合わせのもとでも《仮定が両方とも真であり，かつ結論が偽である》ことはない．（このことを確認するため には，仮定がすべて真であるすべての行を，かつそれらの行のみを検討すればよい．）

推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ が妥当であることを次のように表す: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$

問題 1　真理表を用いて次の各推論が妥当であることを示せ．
(1) $P \to Q, P \therefore Q$［肯定式 modus ponens］ (2) $P \to Q, \sim Q \therefore \sim P$［否定式 modus tollens］
(3) $P \to Q, Q \to R \therefore P \to R$［仮言三段論法］ (4) $P \vee Q, \sim P \therefore Q$［否定肯定式 modus tollendo ponens］
(5) $P \vee Q, P \to R, Q \to R \therefore R$［単純構成的両刀論法］

問題 2　次の各推論を記号化し，真理表を用いてそれが妥当であるか否かを判定せよ．
(1) 一郎と二郎のどちらかは論理学会に出席する．もし二郎が論理学会に出席するならば三郎も出席する．一郎は論理学会に出席しない．ゆえに，二郎と三郎は論理学会に出席する．
(2) 一郎が論理学会に出席する場合には，二郎と三郎の両方が出席することはない．一郎が論理学会を欠席するか，三郎が出席するかのどちらかである．ゆえに，もし二郎が論理学会を欠席するなら一郎は出席する．
(3) もし三郎が論理学会に出席するならば，一郎も出席する．二郎が論理学会に出席しないときには，三郎が出席する．ゆえに，一郎と二郎のどちらかは論理学会に出席する．

解答
(2) 記号化：$P \to \sim(Q \,\&\, R), \sim P \vee R \therefore \sim Q \to P$

					仮定 1		仮定 2		結論	
P	Q	R	$Q \,\&\, R$	$\sim(Q \,\&\, R)$	$P \to \sim(Q \,\&\, R)$	$\sim P$	$\sim P \vee R$	$\sim Q$	$\sim Q \to P$	
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	✓
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	✓
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	✓
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	×
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	×

上の真理表において《仮定がすべて真であるが結論が偽である》行が存在する（7 行目と 8 行目）．したがってこの推論は妥当ではない．

8. 含意，同値，妥当性と恒真との関係

(1) もし論理式 A が論理式 B を含意するならば，論理式 $A \to B$ は恒真である．この逆も成り立つ．

(2) もし論理式 A と論理式 B とが同値であるならば，論理式 $A \leftrightarrow B$ は恒真である．この逆も成り立つ．

(3) もし推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ が妥当であるならば，論理式 $(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to B$ は恒真である．この逆も成り立つ．

$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$ は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべてが真であるとき真であり，それ以外の時には偽であるものとする．
$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ は $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の少なくとも 1 つが真であるとき真であり，それ以外の時には偽であるものとする．

(3) の証明
(i) 《もし推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ が妥当であるならば，式 $(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to B$ は恒真である》ことの証明：対偶を証明する．$(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to B$ が恒真ではないと仮定する．このとき条件文の真理条件により，$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$ は真であるが B は偽となるような命題変項への真理値の割り当てが存在する．連言文の真理条件により，そのような割り当てにおいては $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべてが真であり，かつ B は偽であるから，推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ は妥当ではない．
(ii) 《もし式 $(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to B$ が恒真であるならば，推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ は妥当である》ことの証明：対偶を証明する．推論 $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ は妥当でないと仮定する．このとき妥当性の定義により $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべてが真であり，かつ B が偽となるような命題変項に対する真理値の割り当てが存在する．そのような割り当てのもとでは，$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$ は真であり，かつ B は偽であるから，条件文の真理条件により $(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \to B$ は偽である．よってこの条件文は恒真ではない．