（単項）述語論理　論理式とその意味

1. 論理式の定義

1.1 原始記号

(1) （個体）変項：$x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, \dots, w_1, \dots$
(2) （個体）定項：$a, b, c, \dots, t, a_1, b_1, c_1, \dots, t_1, \dots$
(3) 命題変項：$P, Q, R, S, U, \dots, Z, P_1, Q_1, R_1, \dots, Z_1, \dots$
(4) 述語文字：$F, G, H, \dots, O, F_1, G_1, H_1, \dots, O_1, \dots$
(5) 論理記号
　結合子： ~（否定記号），→（条件記号），&（連言記号），∨（選言記号）
　量化記号：∀（全称記号），∃（存在記号）
(6) カッコ：(,)

1.2 論理式の定義

(1) すべての命題変項は論理式である．
(2) ϕ が述語文字であり，t が変項または定項であるならば，ϕt は論理式である．
(3) A が論理式であるならば，~A は論理式である．
(4) A, B が論理式であるならば (A → B), (A & B), (A ∨ B)は論理式である．
(5) A が論理式であり，α が変項であるならば，∀αA, ∃αA は論理式である．
(6) 上の(1)–(5)によって論理式とならないものは論理式ではない．

論理式の例

Fa, $(Fx \to {\sim}Gx)$, $\forall xFx$, $\exists yGy$, $\forall xFx \to \exists xFx$, $\exists y(Fy \,\&\, {\sim}Gy)$, $(\forall xFx \to Fy)$, $\forall x\exists y({\sim}Fx \to Gy)$, $\exists x(Fx \,\&\, P)$, $\forall xFz$

論理式ではない記号列の例

Pa, FGa, $(Fb \,\#\, Gb)$, $({\sim}Ga)$, $(F \,\&\, G)x$, $\to\exists y(Fy \,\&\, Gy)$,$\forall x(Fx)$, $\forall Fx$, $\exists G(Gx \vee Hx)$

用語

* 論理式の定義の (1), (2) のみを用いて得られる式は**原子式** (atomic formula) と呼ばれる．
* α を変項とするとき，∀α および∃α は**量化句** (quantifier phrase) と呼ばれる．
* 論理式 ∀*x*A は A の**全称汎化** (universal generalization) と呼ばれる．論理式 ∃*x*A は A の**存在汎化** (existential generalization) と呼ばれる．

2. 定項，変項，述語文字と日本語表現との対応

* 定項は自然言語における固有名詞に相当する．
* 変項はおおよそ自然言語における代名詞「それ」や名詞「もの」に相当する．
* 述語文字は，自然言語においては，文から（一つの）固有名詞を除去することによって得られる表現（これらを「(1 項) 述語」と呼ぶことにする）に相当する．

例　文「アルバートは物理学者である」から，固有名詞「アルバート」を除去すると，述語「…は物理学者である」という表現が得られる．例えば，この述語の意味で述語文字 F を用いる場合，そのことを述語の空所の代わりに変項を用いて次のように表わす．

　　　Fx: x は物理学者である

3. 量化記号の意味

∀x(... x ...): すべての x について ... x ... ／あらゆる x について ... x ... ／どの x についても ... x ...
∃x(... x ...): ある x について ... x ... ／少なくとも一つの x について ... x ... ／... x ... であるような x が存在する

したがって次が成り立つ．
'∀x(... x ...)' は真である ⇔ すべてのものに，条件 '... x ...' が当てはまる．
'∃x(... x ...)' は真である ⇔ 少なくとも一つのものに，条件 '... x ...' が当てはまる．

* なお，「すべてのもの」，「少なくとも一つのもの」における「もの」は，ある集合（例えば自然数の集合や人間の集合）の要素に限定される場合がある．

4. 論理式の日本語への翻訳

問題　次の論理式を日本語に翻訳せよ．ただし，述語文字は次の意味を持つものとする．

Fx: x は論理学者である　　Gx: x はドイツ人である　　Hx: x は質量を持つ

(1) $\forall xHx$　(2) $\sim\forall xHx$　(3) $\forall x{\sim}Hx$　(4) $\exists xHx$
(5) $\sim\exists xHx$　(6) $\exists x{\sim}Hx$　(7) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$　(8) $\exists x(Fx \,\&\, Gx)$
(9) $\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$　(10) $\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$

解答
(1) すべてのものは質量を持つ．／あらゆるものは質量を持つ．／いかなるものも質量を持つ．／［直訳］すべてのものに，≪それは質量を持つ≫という条件が当てはまる． (2) すべてのものが質量を持つ，ということはない．／すべてのものが質量を持つわけではない．(3) いかなるものも質量を持たない．(4) あるもの（少なくとも一つのもの）は質量を持つ．／質量を持つものが存在する．／［直訳］少なくとも一つのものに，≪それは質量を持つ≫という条件が当てはまる．(5) 質量を持つものは存在しない．(6) あるもの（少なくとも一つのもの）は質量を持たない．／質量を持たないものが存在する．(7) すべての論理学者はドイツ人である．／ドイツ人のみが論理学者である．／［直訳］すべてのものに，≪もしそれが論理学者であるならば，それはドイツ人である≫という条件が当てはまる．(8) あるものは論理学者であり，かつドイツ人である．／ある論理学者はドイツ人である．／論理学者であるドイツ人が存在する．／［直訳］少なくとも一つのものに，≪それは論理学者であり，かつ，それはドイツ人である≫という条件が当てはまる．(9) いかなる論理学者もドイツ人ではない．(10) 論理学者であるドイツ人は存在しない．

注意点
* (2)と(6)は論理的に同じ意味を持つ．一般に，~∀x(... x ...) と ∃x~(... x ...) は論理的に同じ意味を持つ．（したがって，∀x(... x ...) と ~∃x~(... x ...)は論理的に同じ意味を持つ．）
* (3)と(5)は論理的に同じ意味を持つ．一般に，~∃x(... x ...) と ∀x~(... x ...) は論理的に同じ意味を持つ．（したがって，∃x(... x ...) と ~∀x~(... x ...)は論理的に同じ意味を持つ．）
* (9)と(10)は論理的に同じ意味を持つ．

5. 日本文の形式と論理形式

日本語の推論に頻出する文の形式は，論理記号を用いて以下のように表現することができる．

I. すべての A は B である：∀x(Ax → Bx)
II. ある A は B である：∃x(Ax & Bx)
III. いかなる A も B ではない：∀x(Ax → ~Bx)/ ~∃x(Ax & Bx)
IV. A のみが B である：∀x(Bx → Ax)

* ここで A, B は 1 項述語（厳密には，1 項述語に対応する名詞句）である．
例　A が「人間」であり，B が「死ぬ(もの)」である場合，Ax は「x は人間である」であり，Bx は「x は死ぬ」である．

注意　「ある A は B である」を '∃x(Ax → Bx)' によって記号化するのは**誤り**である．
Ax → Bx は~Ax ∨ Bx と論理的に同じ意味を持つ．したがって Ax が偽である場合，Bx の真偽にかかわらず Ax → Bx は真となる．例えば，A が「偶数」，B が「奇数」を意味するとしよう．この場合，x に自然数 1 を割り当てると，Ax は偽であるから，Ax → Bx は真である（すなわち，1 には条件 'Ax → Bx' が当てはまる）．したがって，∃x(Ax → Bx) は真である．一方，明らかに「ある A は B である」は偽である．