数学科のネタ帳

いろんな先生の
　①授業で実践している教え方の工夫
　②本で読んでおもしろかった内容
などを集めたネタ帳です。
　見る人が宝探しのようにワクワクしながら探せるように、あえて単元別に整理しませんでした。

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

最高　の　高３

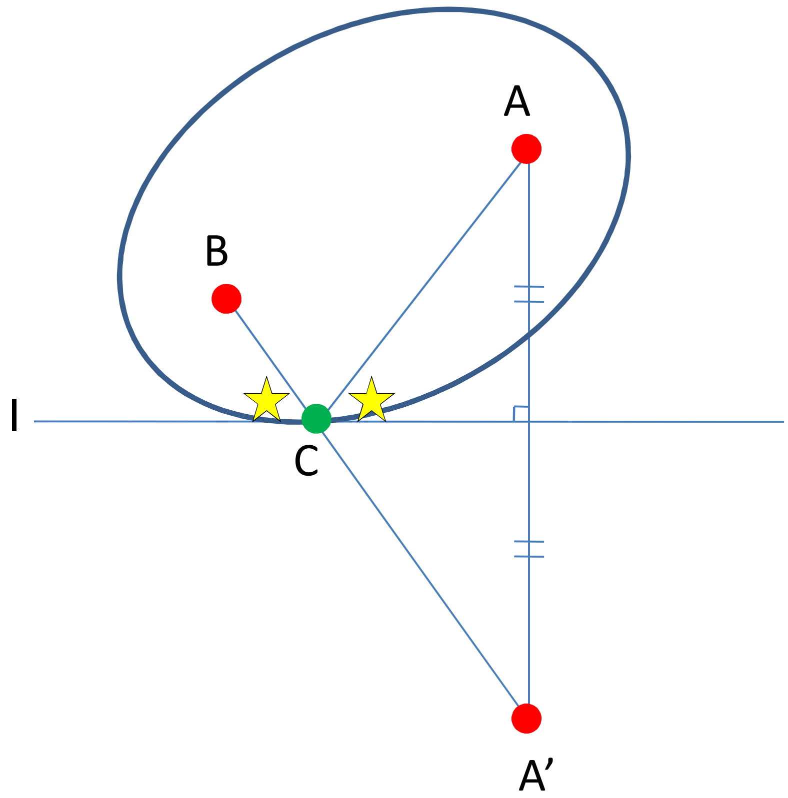
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ここ一番の自信

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

１ぴきたったの
たんたんたぬき

最短距離

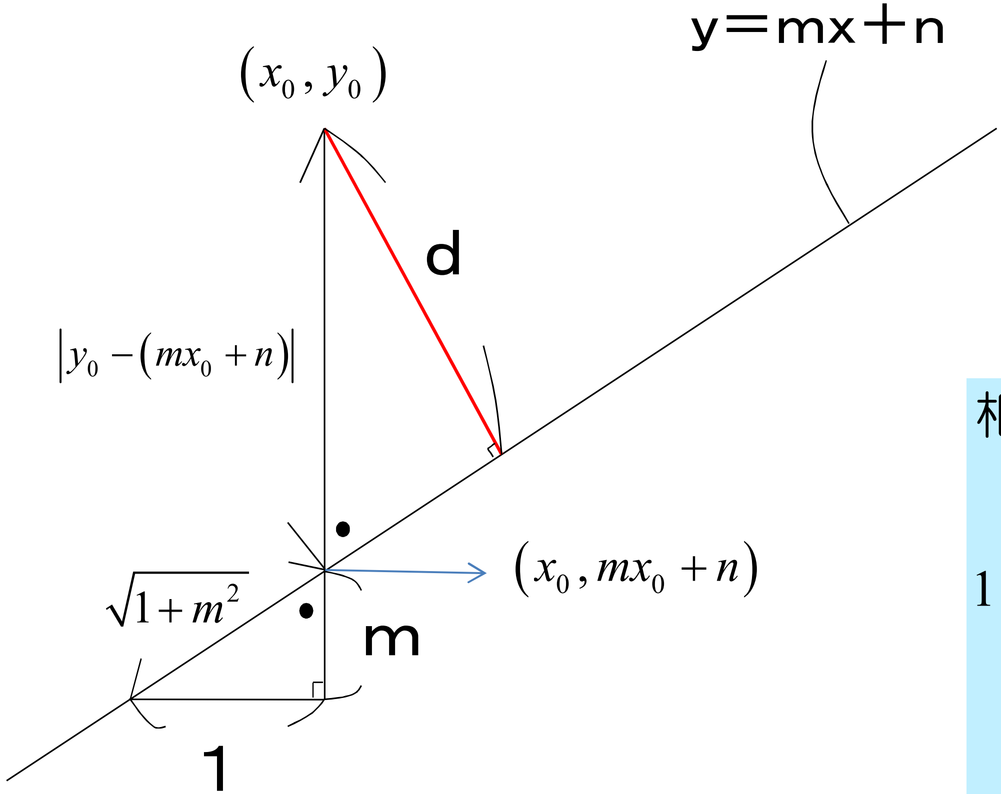


ｌ 上に点Cをとり、AC＋BCを最小にするには、図のように対称な点A’を考えてCを作図するが、

このときCはA，Bを焦点とする楕円とｌとの接点でもある。

三角形の合同と対頂角は等しいことより ☆ は等しい。このことからAからC に向けて出た光はlで反射し，Bに向かうことも分かる。

点と直線の距離の簡単な導き方



相似比を考えて

$$1:\sqrt{1+m^2}=d:|y_0-(mx_0+n)|$$

$$d=\frac{|y_0-mx_0-n|}{\sqrt{1+m^2}}$$

式の計算

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(x-y)(x-z)$$

を計算すると0になる。　$\Big($途中 $(x-x)$ を含むので$\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)$

対数関数

$\cdot \log_a a = 1$　　　の覚え方

真数と底が一致すると1になる。
「イッチ」　「イチ」

$$\cdot\, p^{a \log_b q} = q^{a \log_b p}$$

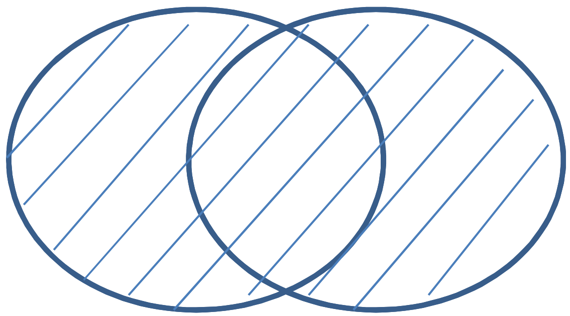
入れ替えてもOK。

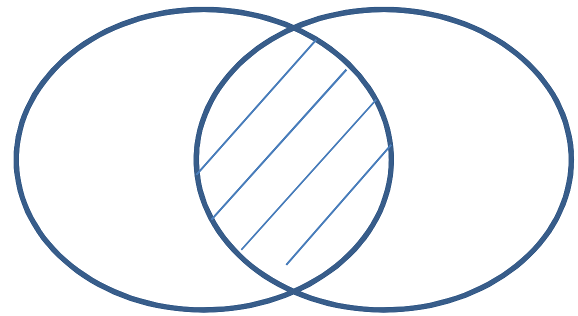
両辺のｂを底とする対数をとると

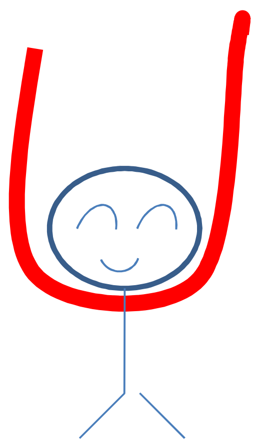
$$\text{左辺} = \log_b p^{a \log_b q} = a \log_b q \log_b p$$

$$\text{右辺} = \log_b q^{a \log_b p} = a \log_b p \log_b q$$

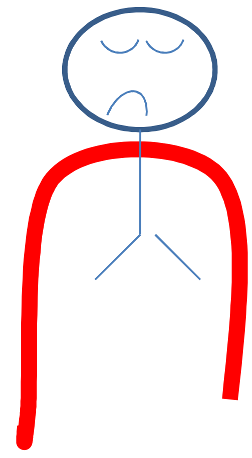
集合







たくさんあるから
喜んでいる



少ないから
ガッカリ

1111・・について

２の倍数でも5の倍数でもない数（これをnとする）は、何倍かすると必ず

１１１１１１・・・・・・１１

の形にできる。

＜例＞　17×65359477124183　＝1111111111111111

7×15873　＝111111

19×5847953216374269＝111111111111111111

＜証＞n＋１個の数列　1,11,111,1111,11111,・・・・・・・・,$\underbrace{111\ \cdots\ 1111111}_{\text{n+1個の1}}$

の中には、nで割った余りが等しい２数が必ずある。＜注1＞
その２数の差は11 ・・10 ・・0　の形をしていて、さらにこの11 ・・10 ・・0はnで割り切れる。＜注2＞ 今、nは10　と互いに素なので、 11 ・・1の部分はnで割り切れる。つまりnを何倍かすれば11 ・・1の形にできる。

＜ 例 ＞11111111 ≡11 ≡ 4　（mod　7）　より11111111－11＝11111100　は7で割り切れる。
100と7は互いに素であるから111111 は7の倍数である。

＜注1＞ある数をnで割った余りは0からn-1までのn通りあるから、数がn+1個あればその中には必ず同じ余りをもつ数が少なくとも2つある：鳩の巣原理

＜注2＞p≡q （mod　n） ⇨　p-q ≡ 0（mod　n））

1111・・について（続き）

ということは ______ 部分を3倍、6倍、7倍等することで

3333333333333333
666666
777777777777777777

という数も作ることができる。

紙を100回折る

厚さ0.1mmの紙を100回折ると、厚さ134億光年になる。

$$0.1\times 2^{100} = 126765060022822940149670320537.6\ mm$$

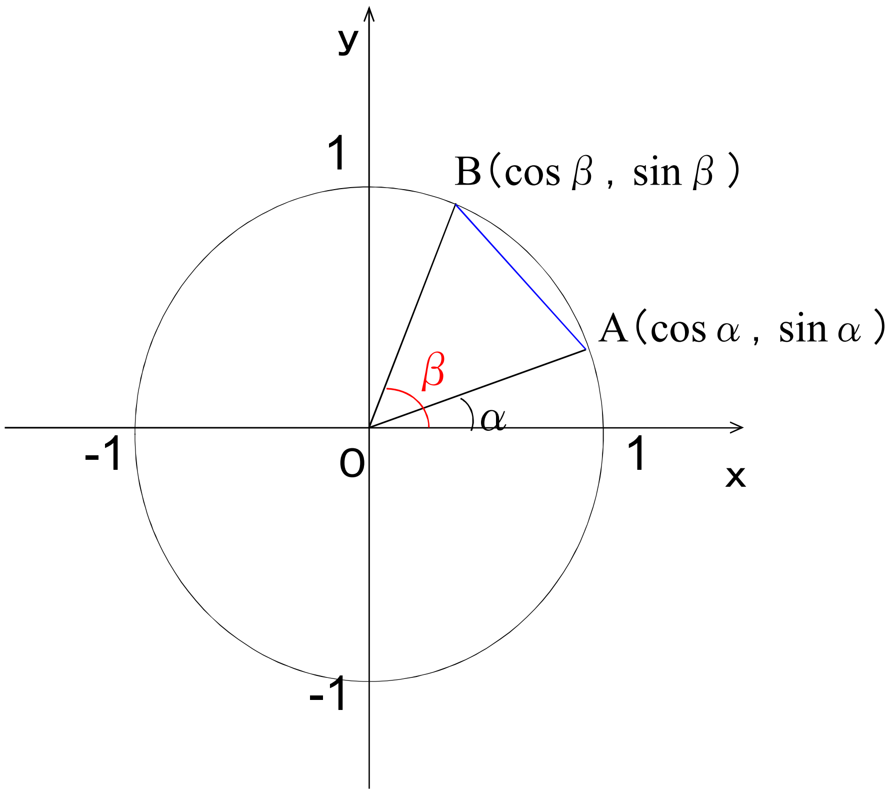
$$= \frac{126765060022822940149670320.5376\ m}{299792458 \quad (m/s\ \text{光速})} \quad \text{光秒}\cdots①$$

$$①\div(60\times 60\times 24\times 365)$$

$$=13408254867.21599 \quad \text{光年}$$

$$= \text{約１３４億光年}$$

加法定理の導き方　その1



余弦定理より

$$\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$$

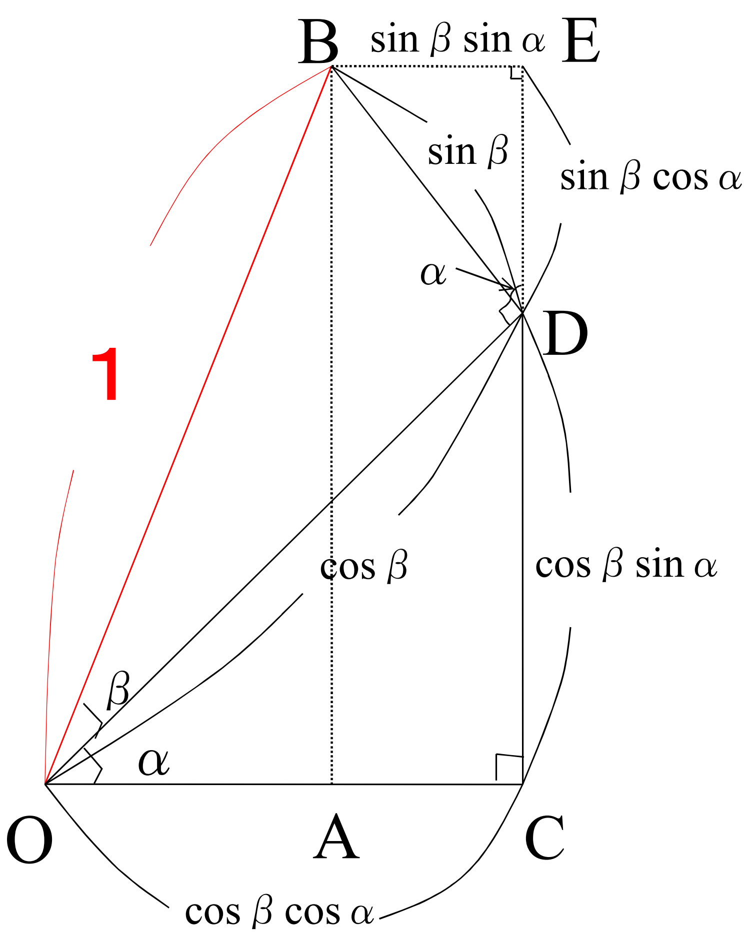
$$\cos(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{1^2 + 1^2 - \left\{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2\right\}}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

加法定理の導き方　その2



$$\sin(\alpha+\beta) = AB$$
$$= CD + DE$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = OA$$
$$= OC - OA$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ベクトルの差の直感的理解

$\left(\text{なぜ}\ \overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}\ \text{でなく}\ \ \vec{b}-\vec{a}\ \text{なのか}\right)$

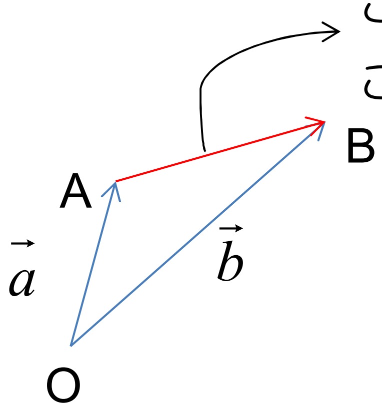
引き算$\Rightarrow$いくら足りないかという問いかけ

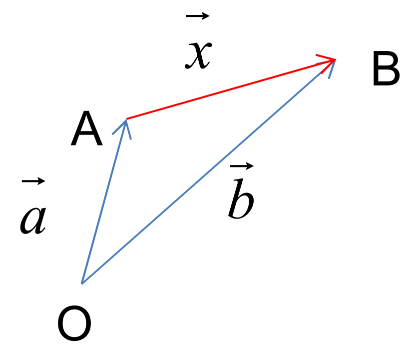
６－４ $\Rightarrow$ ４は６にいくら足りないか $\Rightarrow$ ２足りない

$\vec{b}-\vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ は $\vec{b}$ にいくら足りないか

これだけ足りないから

この $\overrightarrow{AB}$ が $\vec{b}-\vec{a}$





和の定義より

$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$

背理法の例

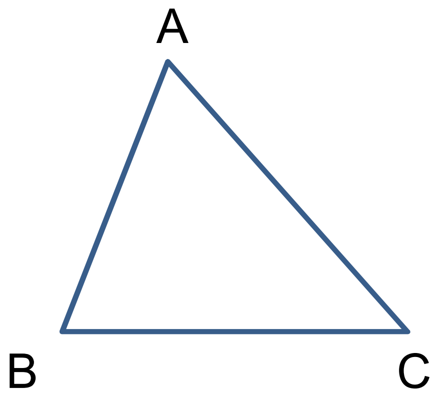
「真空中では重い物ほど速く落ちる」･･･（★）　と仮定する。

今、速く落ちる重い物体Aと遅く落ちる軽い物体Bをひもでつないでみる。

見方①　　Aは速く落ちようとするが、Bがそれを妨げるため全体としては
落ちるスピードは遅くなる。
見方②　　AとBをつなぐと、全体の重さは重くなり、落ちるスピードは増す。

これら①②は矛盾し（★）は偽であることがいえた。

余弦定理から三角不等式を導く



ΔABCにおいて　$0 < A < \pi$　より

$$-1 < \cos A < 1$$

$$-1 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 1$$

$$-2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \qquad (\because b > 0, c > 0)$$

$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$$

$$(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2$$

$$\sqrt{(b-c)^2} < \sqrt{a^2} < \sqrt{(b+c)^2}$$

$$\therefore |b-c| < a < |b+c|$$

電卓でアッといわせる・・・　かな？

12345679×９＝111111111

12345679×□×９＝□□□□□□□□□

1けたの自然数

その自然数が9コ並ぶ

「並び方」？「並べ方」？

「び」と「べ」の一考察

「並び方」・・・「並ぶ」が自動詞なので自ら動けるものに使われる。
「並べ方」・・・「並べる」が他動詞なので人が動かすものに使われる。

＜例＞

・　１，２，３，４，５　の5枚のカードの**並べ方**は何通りあるか。

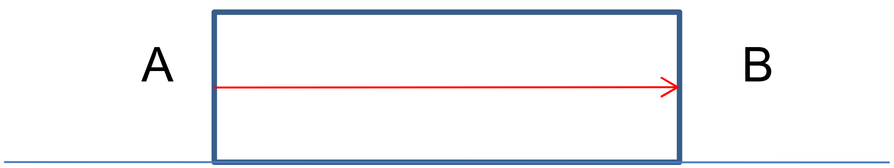
・　A,B,Cの3人が横一列に並ぶときの**並び方**は何通りあるか。

＊教科書ではきちんと区別されているようだ。すごい！！

証明は穴掘り(トンネル)だ

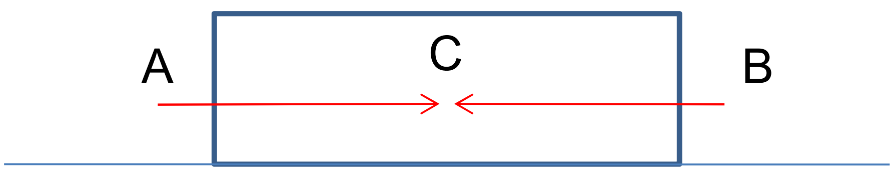
A=Bを示す方法

①



A=・・・・・・・＝B

②



A=・・・・・・・・＝C

B=・・・・・・・・＝C

条件(a＋b＝１等)は削岩機

３つのお願い

２次方程式の解の問題

$$\begin{cases} ①\ \text{判別式}\ \ D \\ ②\ \ \text{軸}\quad x=-\dfrac{b}{2a} \\ ③\ \text{端　点}\quad f(\alpha) \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} ①\ \ \text{判別式}\ \ D \\ ②\quad \alpha+\beta \\ ③\quad \alpha\beta \end{cases}$$

０．$\dot{9}$＝１　　なのだ

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0.9}{1-0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1$$

$$0.\dot{9} = 3 \times 0.\dot{3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

女Ａと女Ｂ

女Ａ「ビトンのバッグを買ってくれたらつき合います。」

女Ｂ「ビトンのバッグを買ってくれないならつき合いません。」

どちらが賢い？

答え　女Ｂ

女Bはビトンのバッグを買ってもらってもつき合わなくて良い。
女Aはビトンのバッグを買ってもらえばつき合わなくてはならない。

部分積分

$$\int xe^x\,dx = \overset{①}{xe^x} - \overset{②}{\int 1\cdot e^x\,dx}$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$\int \log x\,dx = \overset{①}{x\log x} - \overset{②}{\int 1\,dx}$$

$$= x\log x - x + C$$

ビ分　セキ分

$$\left(\begin{array}{ccc} x & \cdot & e^x \\ \text{ビ}\downarrow & ① & \downarrow\text{セ} \\ 1 & \overset{②}{\cdot} & e^x \end{array}\right)$$

この図を書くと良い！

ビ分　セキ分

$$\left(\begin{array}{ccc} \log x & \cdot & 1 \\ \text{ビ}\downarrow & ① & \downarrow\text{セ} \\ \dfrac{1}{x} & \overset{②}{\cdot} & x \end{array}\right)$$

この図を書くと良い！

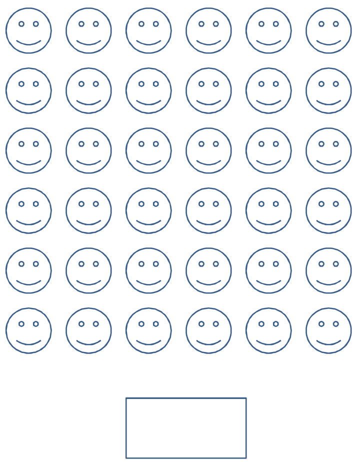
解の公式を定着させるために

$$\mathbf{a}\,x^2+\mathbf{b}\,x+\mathbf{c}=0$$

のようにa，b，cを特に目立たせて板書する。

⇒ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に代入しやすい。

授業(問題演習)を盛り上げるために



たてor横の列の対抗戦

- 10問くらい用意して先生が採点。
- 分からない人は、自分のグループ内の誰かに聞いてもOK。ただし答えだけ聞いて書いても採点時点でダメにする。
- 自分の気が進まなくても団体戦なので頑張れる。

Ａ＝ＢＱ＋Ｒ

アウトドアにはバーベキュー とレバーが大切

小町算

１＋２＋３４－５＋６７－８＋９　＝１００

１２－３－４＋５－６＋７＋８９　＝１００

１２３－４５－６７＋８９　　　　＝１００

９＋８＋７６＋５－４＋３＋２＋１＝１００

１年３６５日

$$365 = \underbrace{\left(1+2+3+\cdots+13\right)}_{\text{トランプの数}} \times \underbrace{4}_{\text{種類}} + \underbrace{1}_{\text{ジョーカー}}$$

$$365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$$

＜参考＞

ラグランジュの定理：４平方和定理

「4n＋3の形の数は2個の平方数の和で表せない。8n＋7の形の数は3個の平方数の和では表せない。しかし，すべての正の整数は高々４個の整数の平方和で表される。」

ウェアリングの問題

「任意の整数はたかだか9個の３乗数の和として，あるいは19個の４乗数の和として表される」

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx$ について

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(-1)^n (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

証明は帰納法で。

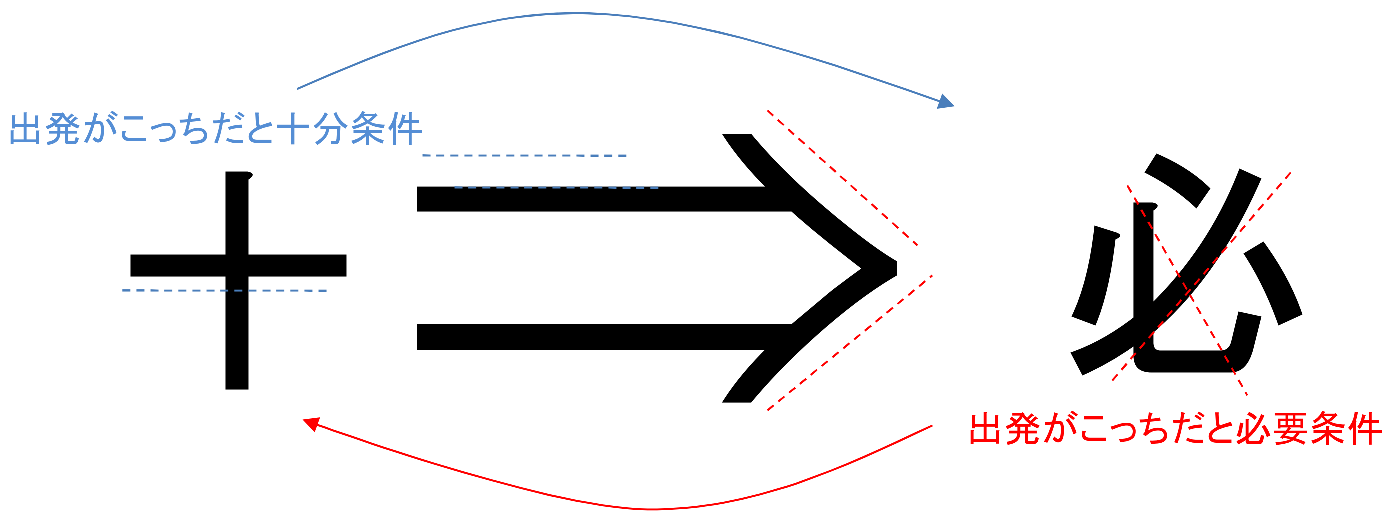
例

$$\begin{cases} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 (x-\beta)\,dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2 \, dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 \, dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^3 \, dx = -\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^{15} \end{cases}$$

必要十分条件

$p \Rightarrow q$ が真のとき、p は q であるための
必要条件だったっけ？十分条件だったっけ？ 習いたてのとき生徒は混同しがち

そこで、無理矢理コジツケて覚えさせる方法。



フィボナッチ数列

フィボナッチ数列 （前の2項の和）

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …

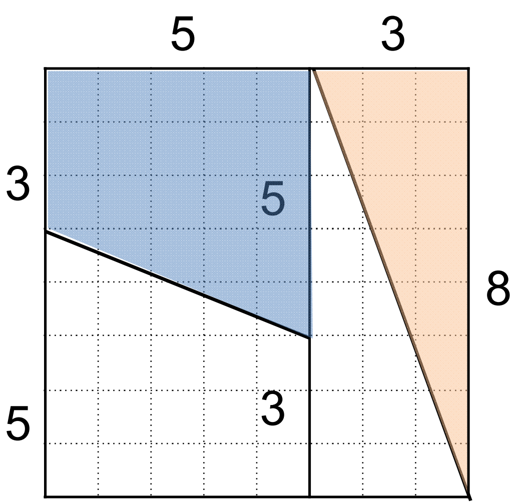
トリボナッチ数列（前の3項の和）

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, …

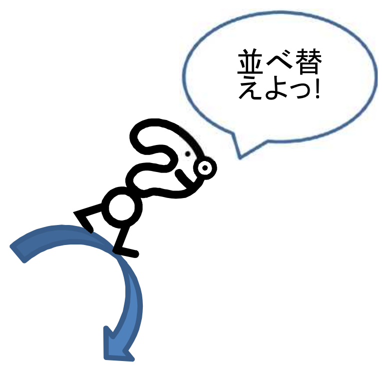
テトラナッチ数列（前の4項の和）

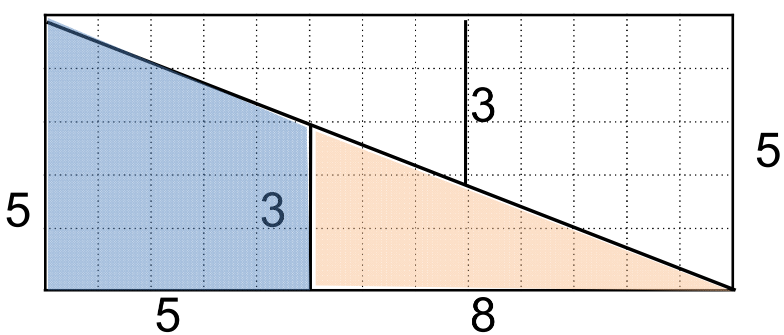
0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490 , …

直線の傾き＆フィボナッチ数列



面積8×8＝64





あれ、面積5×13＝65　増えた?!

フィボナッチ数列

$a_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\cdots$

の連続する3項には

$a_{n+1}{}^2 = a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdots\cdots$ ①

という性質があるので左図のようなトリックが可能になります。

①の証明

[Ⅰ] $n=1$ のとき

左辺 $= 1^2 = 1$　　右辺 $= 1 \cdot 2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$ となり成立

[Ⅱ] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$a_{k+1}{}^2 = a_k a_{k+2} + (-1)^k \cdots\cdots$ ②

$n = k+1$ のとき

①の左辺 $= a_{k+2}{}^2$

$= a_{k+2}\left(a_{k+1} + a_k\right)$

$= a_{k+2}a_{k+1} + a_{k+2}a_k$

$= a_{k+2}a_{k+1} + \left\{a_{k+1}{}^2 - (-1)^k\right\}$　　$(\because$ ②$)$

$= a_{k+1}\left(a_{k+2} + a_{k+1}\right) - (-1)^k$

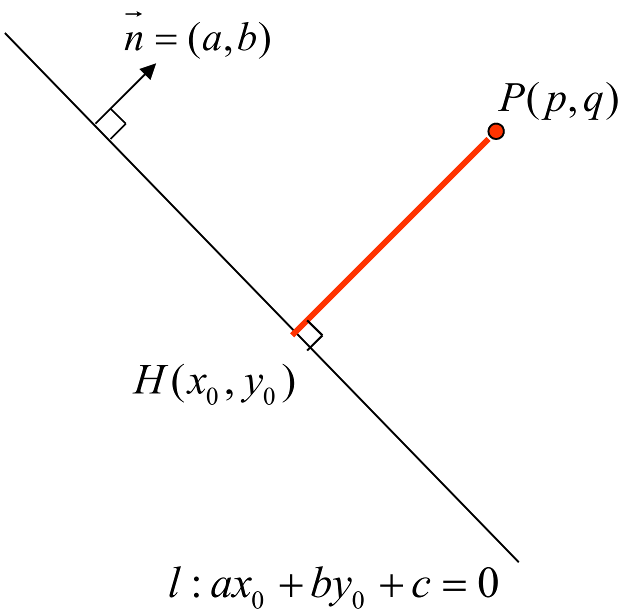
$= a_{k+1}a_{k+3} + (-1)^{k+1}$

$=$ ①の右辺

よって$n = k+1$ のときも①は成り立つ。

[Ⅰ][Ⅱ]よりすべての自然数 n について①は成り立つ。

点と直線の距離　その2



$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HP}\right| = \left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{HP}\right| \qquad \left(\because\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{HP} = \left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{HP}\right|\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{HP}\right|\right)$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HP}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

ここで

$$\vec{n} = (a,b) \quad \overrightarrow{HP} = (p-x_0, q-y_0)$$

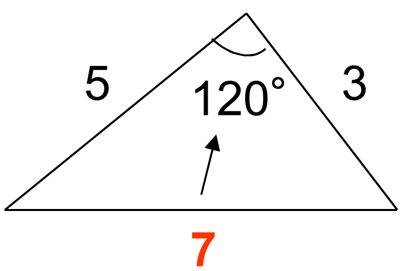
なので

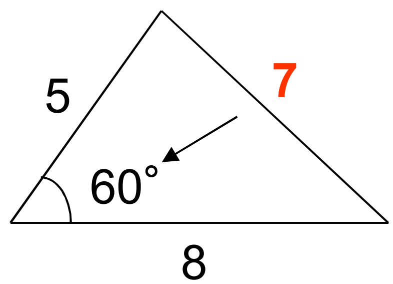
$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$$

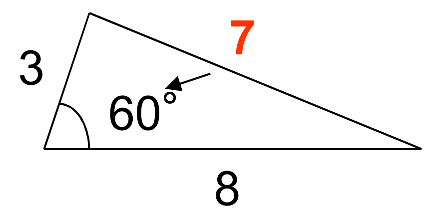
$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{HP} &= a(p-x_0)+b(q-y_0)\\ &= ap+bp-(ax_0+by_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \left|\overrightarrow{HP}\right| &= \frac{\left|ap+bp-(ax_0+by_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ &= \frac{\left|ap+bp+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (\because\ H\text{は}l\text{上の点だから}ax_0+by_0+c=0)\end{aligned}$$

覚えておくと便利　三角形の辺





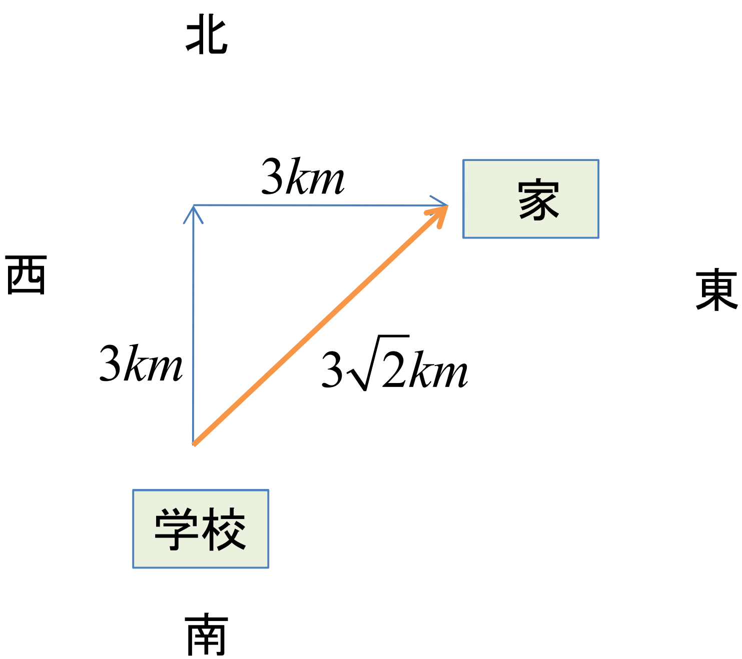


七五三で120°
（753）

名古屋　で　悩み　60°
（758）　（783）

いずれの場合も7の対角を示している。

ベクトルの導入に



学校から家に帰る。
北に3km，東に3km歩いたところにある。
直線距離だったら・・・・。
図を描いて，北東の方向に $3\sqrt{2}$ km 離れたところ。

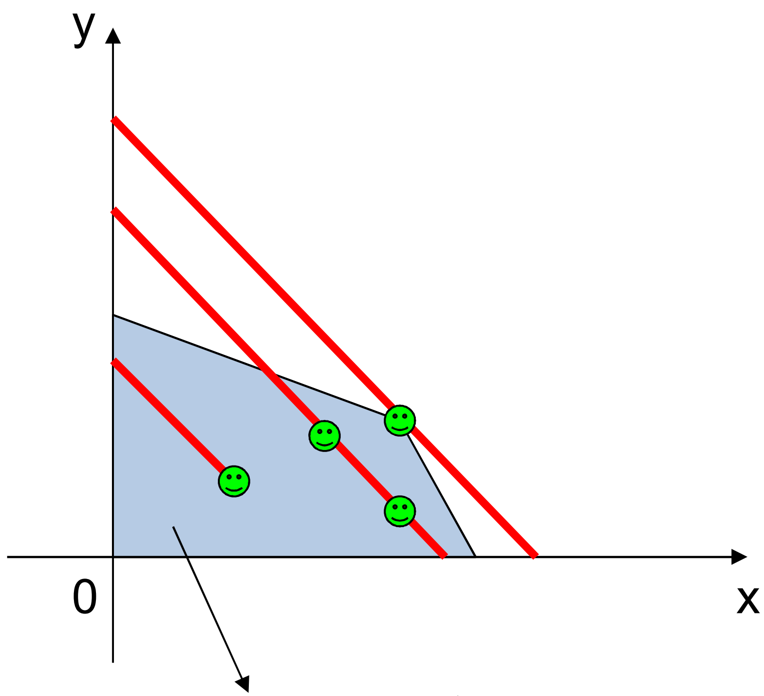
条件の否定

魚の2枚おろし

$\overline{\mathrm{X}<1}$　は　$x \geqq 1$　　皮（ ―― ）をはいだら背骨（＝）がのこる。

$\overline{\mathrm{X}<1}$　は　$x>1$　　は誤り。背骨がのこらない。

線形計画法



＜例＞

x＋y＝k ⟶ y＝－x＋k

はしごの傾き－1

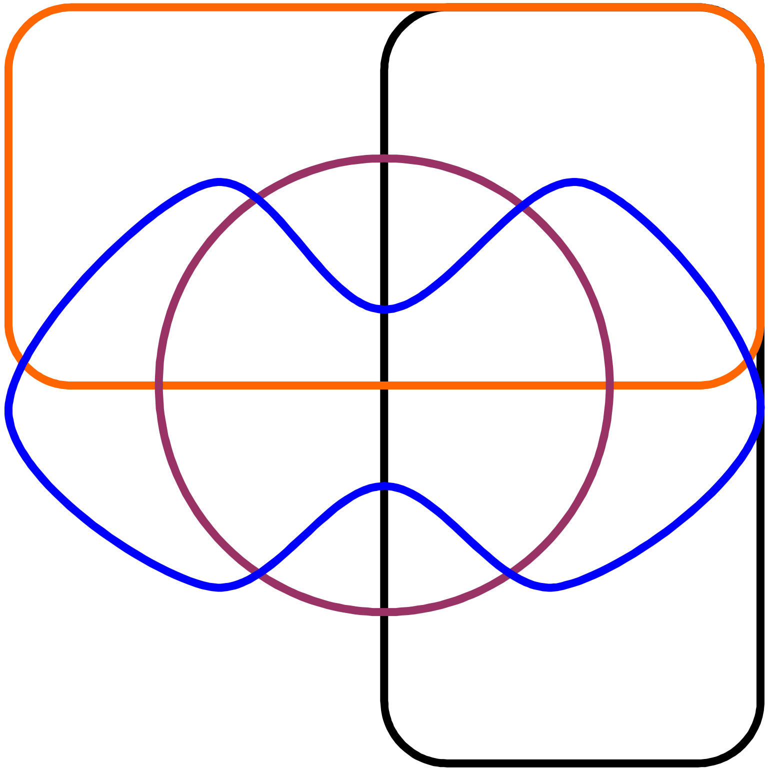
壁の高さはk

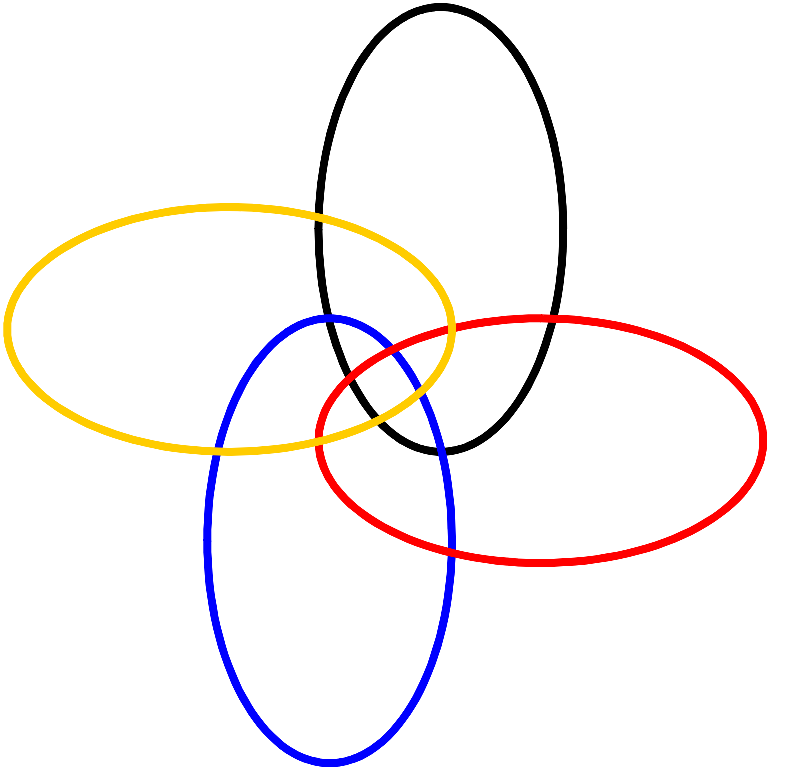
ここに人がいる。

伸縮自在のはしご（角度が変わる）で壁に登る。

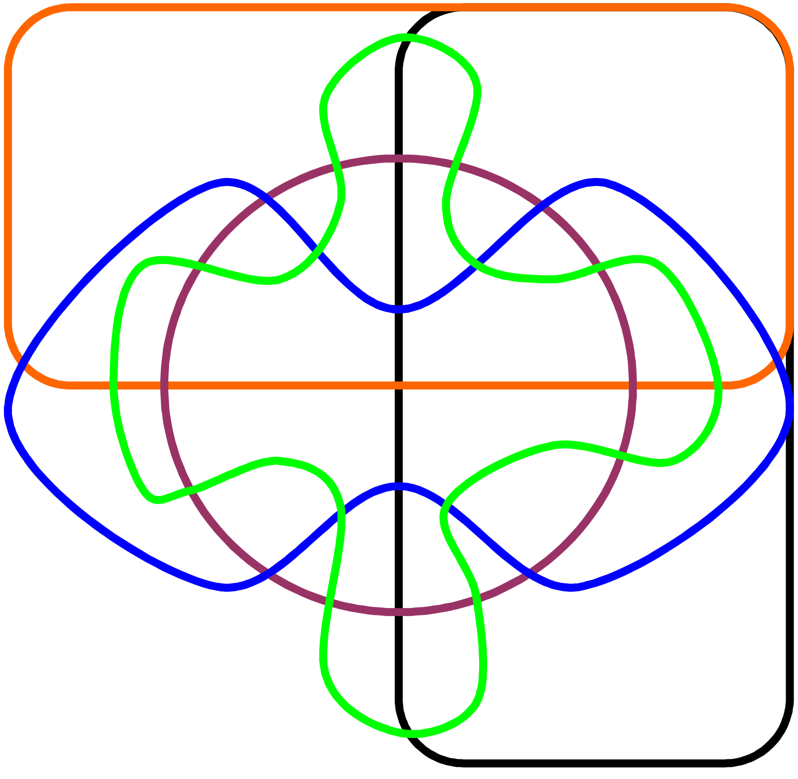
一番高い（低い）ところの登るには？

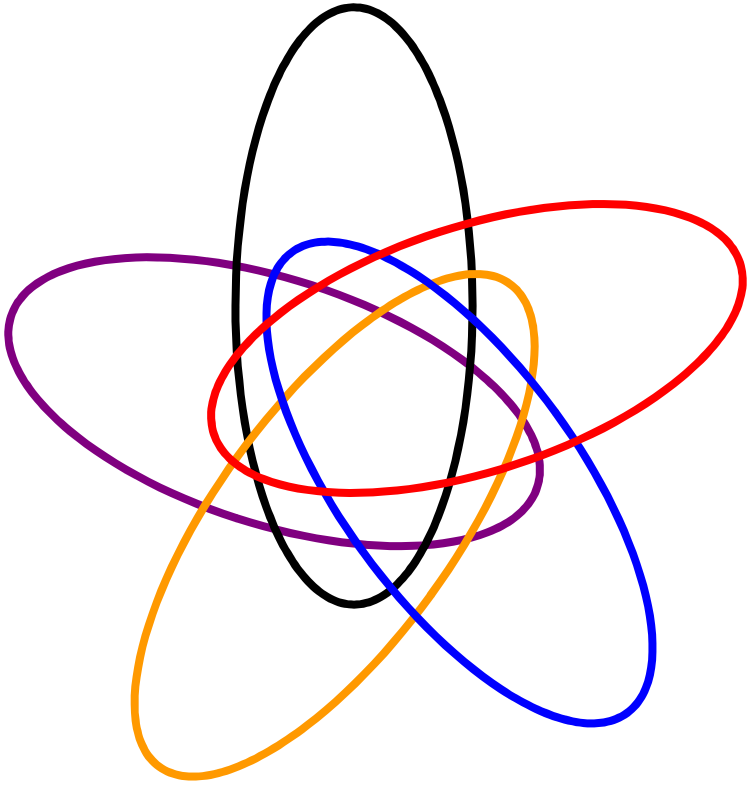
４つのベン図





５つのベン図





繰り返す数は7の倍数

1001は　　　　7の倍数(7×11×13)だから,
　　3つの数を2回並べた　　　　256256などは7の倍数(1001× 256)

1001001001は7の倍数(7×11×13×101×9901)だから
　　3つの数を4回並べた256256256256などは7の倍数(1001001001× 256)

3つの数を偶数回並べた数は7の倍数

1000000001は　　　　7の倍数(7×11×13×19 × 52579)だから,
　　9つの数を2回並べた123456789123456789などは7の倍数
1000000000000001は　7の倍数(7×11×13×211×241×2161×9091)だから,
　　15個の数を2回並べた数は7の倍数
1000000000000000000001は7の倍数(7×11×13×127×2689×459691×909091)だから,
　　21個の数を2回並べた数は7の倍数

・・・・・・・・・もういいって？

一見平凡な数なのに･･･

「3ケタの数を大きい順に並び替え，それから小さい順に並べ替えたものを引く」操作を繰り返すと，最後は必ず495になる。
4ケタの数では6174になる。（カプレカー数）

<例>

301→310－013＝297
972－279＝693
963－369＝594
954－459＝495

588→885－588＝297
972－279＝693
以下は上と同じ。

3742 → 7432－2347＝5085
8550－0558＝7992
9972－2799＝7173
7731－1377＝6354
6543－3456＝3087
8730－0378＝8352
8532－2358＝6174
7641－1467＝6174

5559 → 9555－5559＝3996
9963－3699＝6264
6642－2466＝4176
7641－1467＝6174

こんな数もあります

73939133　右端から一つ一つ数字を取り除いていっても，必ず素数になる最大の数。

102564

4ーパラサイト数

4をかけるとき，右端の4を左端に移動させればそれが答えになる。$102564 \times 4 = 410256$

ちなみに　dーパラサイト数は $\dfrac{d}{10d-1}$ の小数点以下の繰り返し部分を見つけることで作り出せる。

496

完全数

自分を除くすべての約数の和で自分自身が表せる数

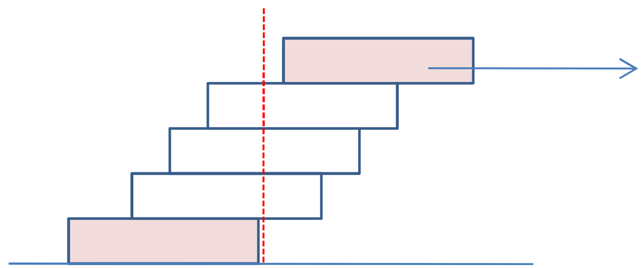
$$496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

偶数の完全数はすべて，メルセンヌ素数（$2^n - 1$ の形の素数）に１を加えて2で割り，さらにもとのメルセンヌ素数をかけて作ることができる。

＜例＞ $\dfrac{31+1}{2} \times 31 = 496$

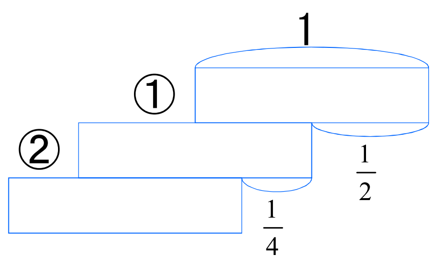
奇数の完全数はまだ一つも見つかっていないし，存在しないことも証明されていない。

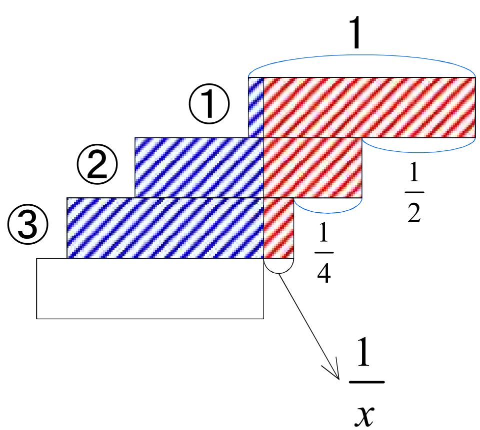
積み重ね



教科書・CDケース・積み木など，1冊分以上ずらすことができるか？
グループで競争させてもおもしろい。

下に積んでいく。





１冊目は $\frac{1}{2}$ までずらせる。

２冊目は $\frac{1}{4}$ までずらせる。

３冊目はどこまでずらせるか？

１冊の重さを１とすると，斜線をつけた重さは３ だから赤斜線の重さは $\frac{3}{2}$ 。

よって次の方程式が立つ。 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

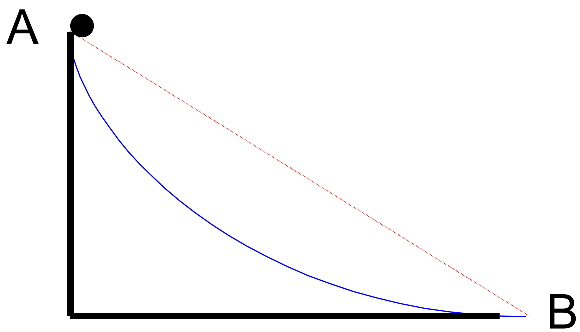
これを解いて $x=6$ 。つまり３冊目は $\frac{1}{6}$ までずらせる。

同様に考えると $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\cdots\cdots$ とずらせていける。

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{50}{48}>1$ となり，１冊以上ずらすには５冊あればよい。
ちなみに３５冊で２冊分，２３３冊で３冊分ずらすことができる。

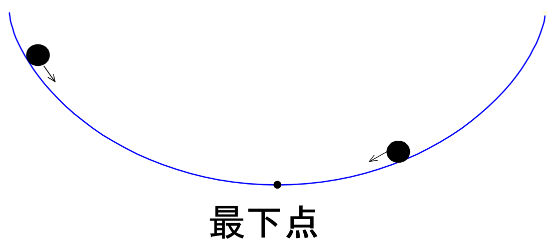
サイクロイドの３つの秘密

①



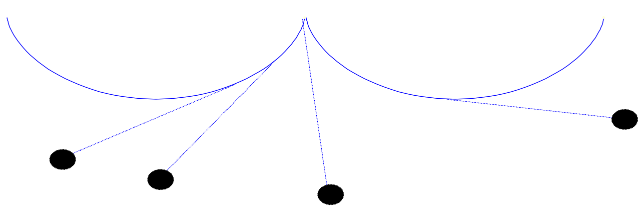
・AからBまで球が転がるとき，最短時間であるのはサイクロイド。
・サイクロイドトンネルを地下に掘れば
東京－ロンドン間9564kmは　約39分
東京－大阪　間 約400kmは　約10分
で行くことができる。

②



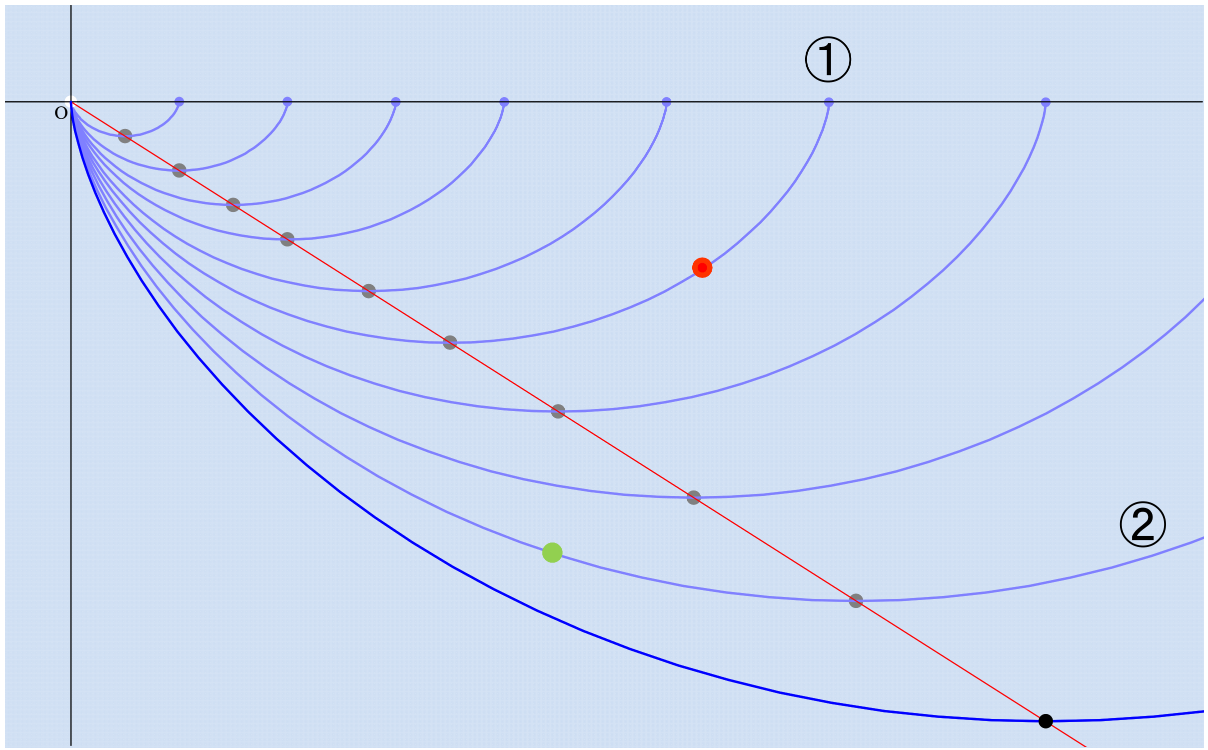
・どこから転がしても，最下点に到達するまでにかかる時間は同じ。

③



・振り子の振りが大きくても小さくても，同じ間隔時間。等時性が保たれる。
（ホイヘンスの振り子）

再びサイクロイド



原点から ● まで行くには①，● まで行くには②のサイクロイド曲線を使うと最速。X軸と，各サイクロイドの最下点を通る直線との角度は32°30’ だから，例えばスキーをするときは目標が32° より小さい角の時は直進するより最下点を通るルートを滑ればよい（測るのムリ?!）。

さいころ

ｎ個のサイコロを投げて，目の和がmとなる場合の数は

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$$

を展開した式の　x^m　の係数に等しい。（ヤコブ・ベルヌーイ）

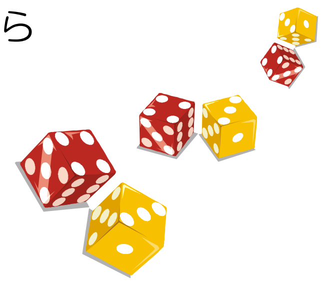
＜例＞２個のサイコロを投げて，目の和が１０となる場合の数は

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$

を展開した式の　x^{10}　の係数に等しいから

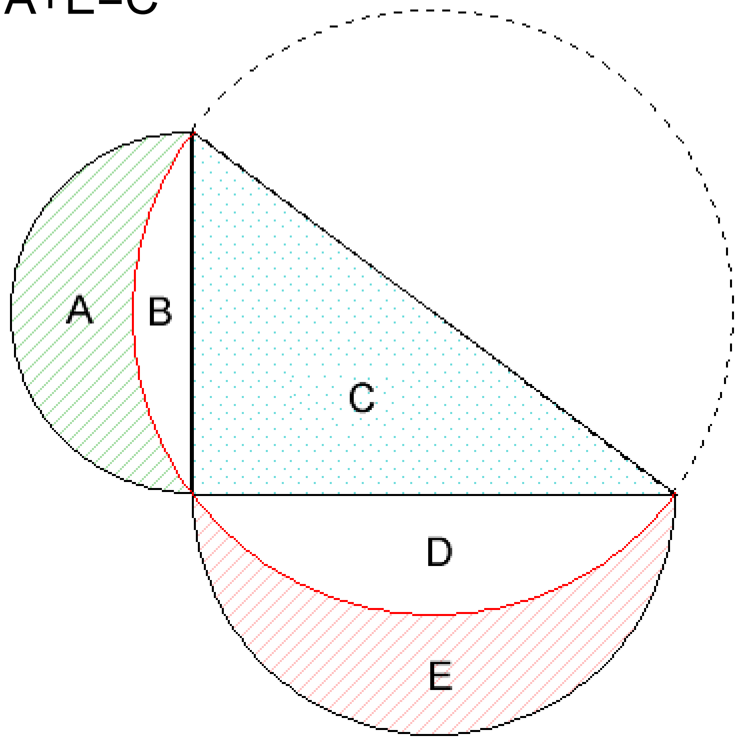
$$2x^4x^6+\left(x^5\right)^2=3x^{10}$$

つまり　3　通りである。



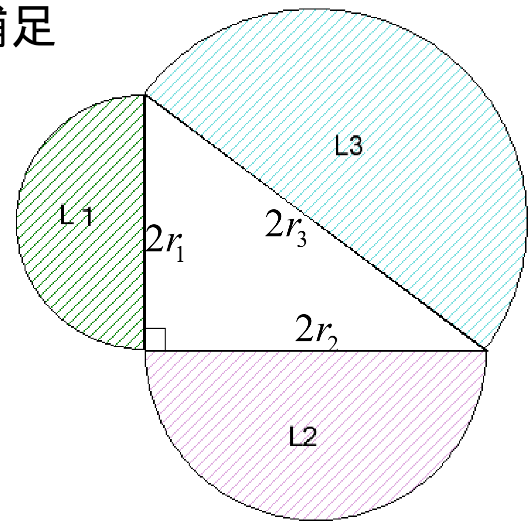
三日月の和＝直角三角形

A+E=C



A+B+D+E＝点線の半円
A+B+D+E=B+C+D
よって　A+E=C

補足



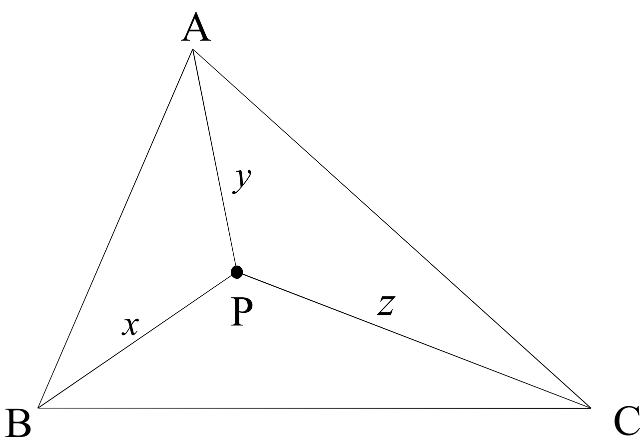
$L_1 + L_2 = L_3$ が成り立つ。

＜証＞　半円の半径を r_1, r_2, r_3 　とすると，
三平方の定理により $4r_1^2 + 4r_2^2 = 4r_3^2$

両辺に $\frac{\pi}{8}$ をかけて　$\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi r_3^2}{2}$

$\therefore\ L_1 + L_2 = L_3$

集合場所

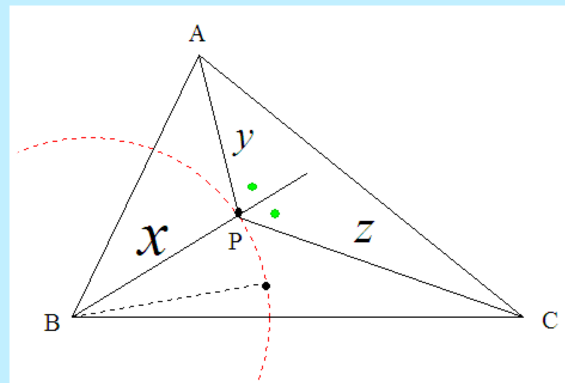


三角形の内部の点から三頂点までの距離の和　x＋y＋z
の最小値について考える。

①　PA,PB,PCが互いに120°の角をなすとき，x＋y＋z　は最小となる。

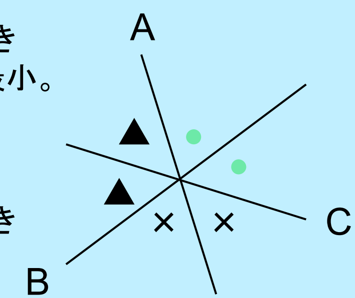
A,B,Cのうちどれかが120°以上のときは，その角を持つ頂点が答えとなる。

＜証＞PB=x　を固定し，y＋zが最小となる場合を考える。



直線BPが∠APCを2等分するとき
（p.4　最短距離　参照）y＋zは最小。

同様に
直線CPが∠APBを2等分し，
直線APが∠BPCを2等分するとき
x＋y＋zは最小となる。



このとき，印をつけたすべての角度は60°になる。

どこからそんな式が・・・

$$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{\left(1\right)_n \left(1\right)_n \; n!} \left(1103 + 26390n\right)\left(\frac{1}{99}\right)^{4n+2}$$

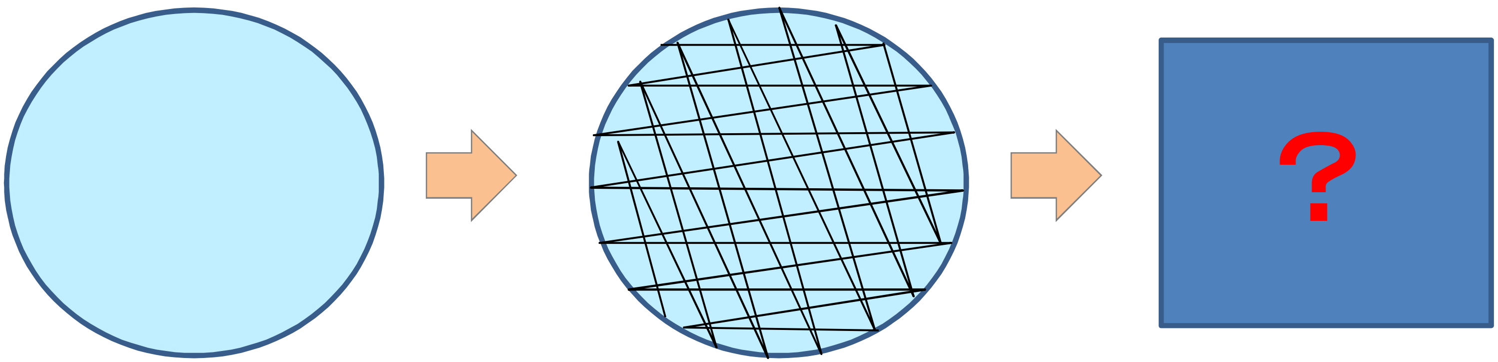
$$= \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(4n\right)!\left(1103 + 26390n\right)}{\left(n!\right)^4 \; 396^{4n}}$$

ただし　$\left(x\right)_n = x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n-1)$

（ラマヌジャン）

円から正方形を作る

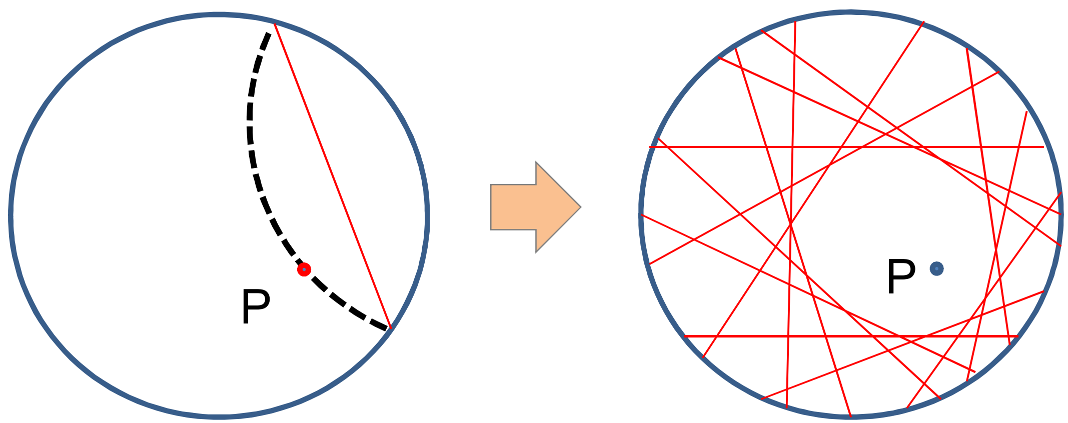
円を切り分けて並び替えることによって，円と同じ面積を持つ
正方形を作ることは可能である。　1989　ラスコビッチ（Miklos Laczkovich）



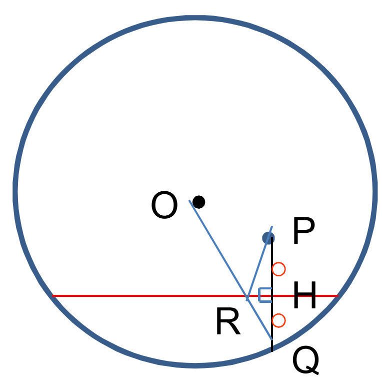
証明の間違いや欠陥は今のところ（2000年現在）見つかっていない。
彼によるとその断片の個数は 10^{50}　にもなるらしい。

折り紙で楕円を作る

　円形の紙に点Pを打つ。そして円周上の１点がその点に重なるように折っていくと，折り目の線で楕円ができる。

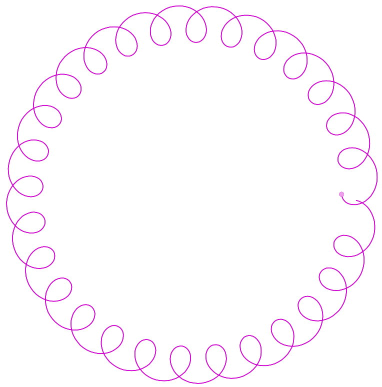


＜証　明＞
円の中心をO，折り目上の点をXとする。
右図より，RはOX+XPを最小にする点である。
つまり折り目はO，P焦点とする楕円の接線である。
以上のことがすべての折り目についていえるので
折り目を増やせば楕円が浮かび上がる。
詳しくは「最短距離」へ。

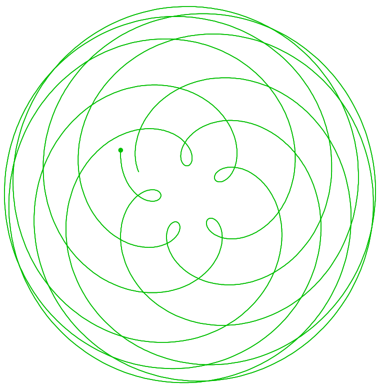


惑星たちのダンス

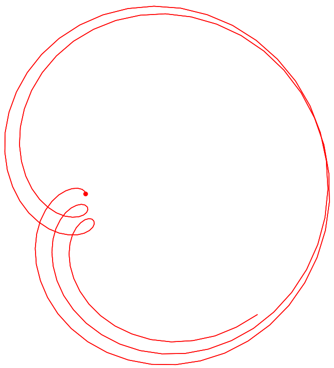
GRAPESを使って
描いてみました。



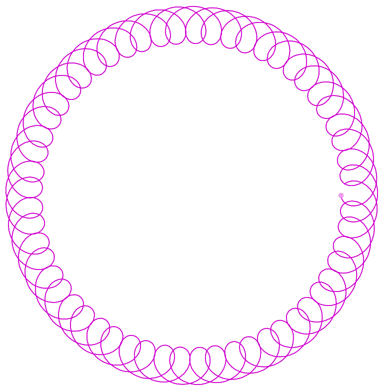
地球から見た土星の動き
（29年間の動き）



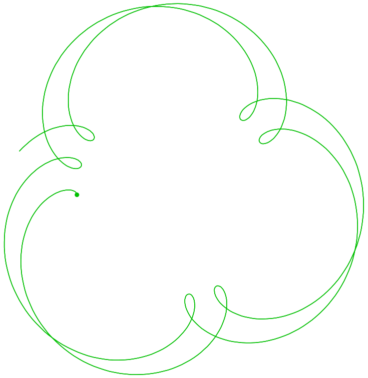
地球から見た金星の動き
（8年間の動き）



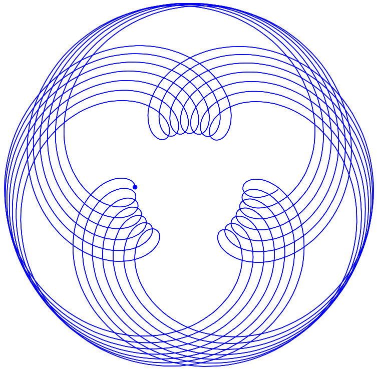
海王星から見た天皇星の動き
（400年間の動き）



地球から見た土星の動き
（59年間の動き）



地球から見た水星の動き
（2年間の動き）



木星から見た土星の動き
（400年間の動き）

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{r}$ を満たす自然現象

120°になる

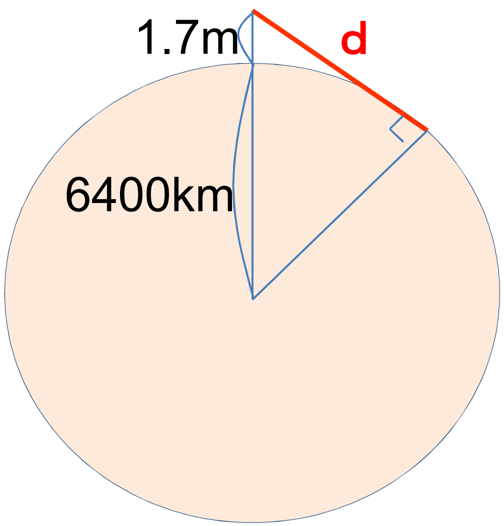
合わさった2つの泡の境界も球面になる。(2000年に証明された)
2つの泡の半径と境界の球面の半径には

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{r}$ の関係がある。

水平線と飛行機雲

地球の半径はおよそ6400kmだから・・・・・

①身長1.7mの人が見る水平線までの距離は

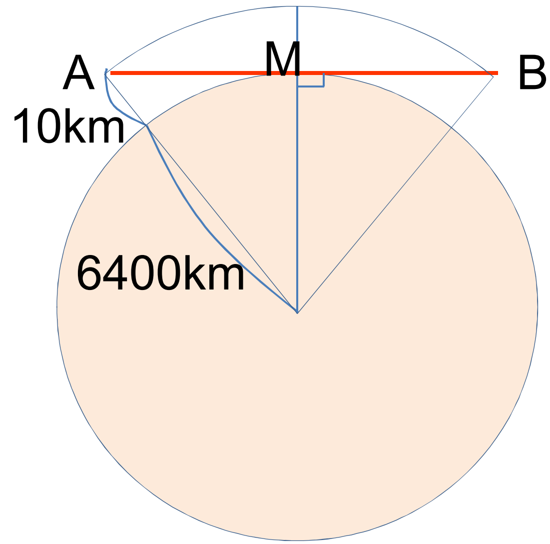


$$d = \sqrt{6400.0017^2 - 6400^2} = \sqrt{21.76}$$

= 4.66476km

肩車された子供$(2.5m)$では,$5.656km$。

②地上から見える，10km上空の飛行機雲の長さは



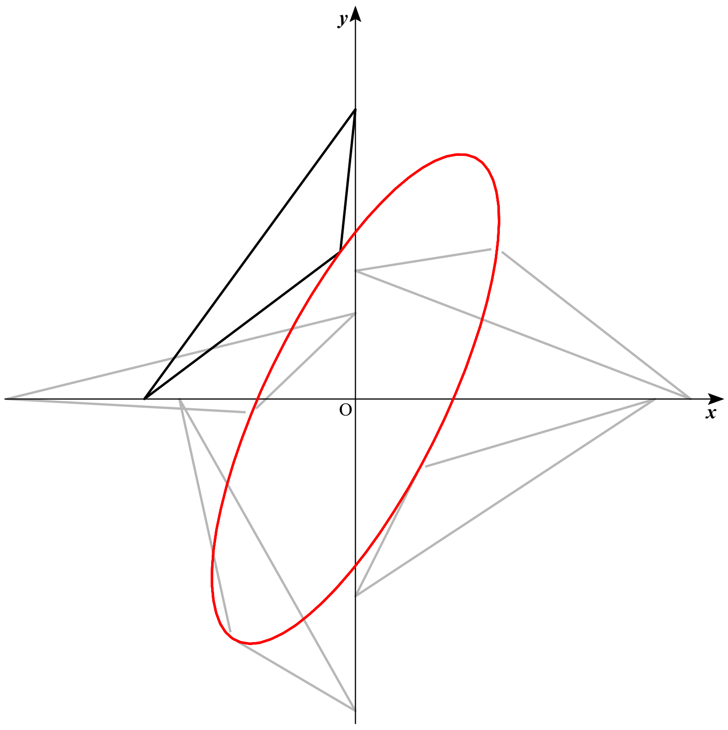
弧AB≒AB

$$AM = \sqrt{6410^2 - 6400^2}$$
$$= \sqrt{128100}$$
$$= 357.9km$$
$$\therefore AB = 357.9 \times 2$$

= 715.8km

福岡ー徳島ー静岡　を直線で結ぶと約715km
しかし視力等も考えると
300km～500kmと考えた方が妥当
愛媛ー徳島ー名古屋　を直線で結ぶと約400km
東京ー大阪間も約400km

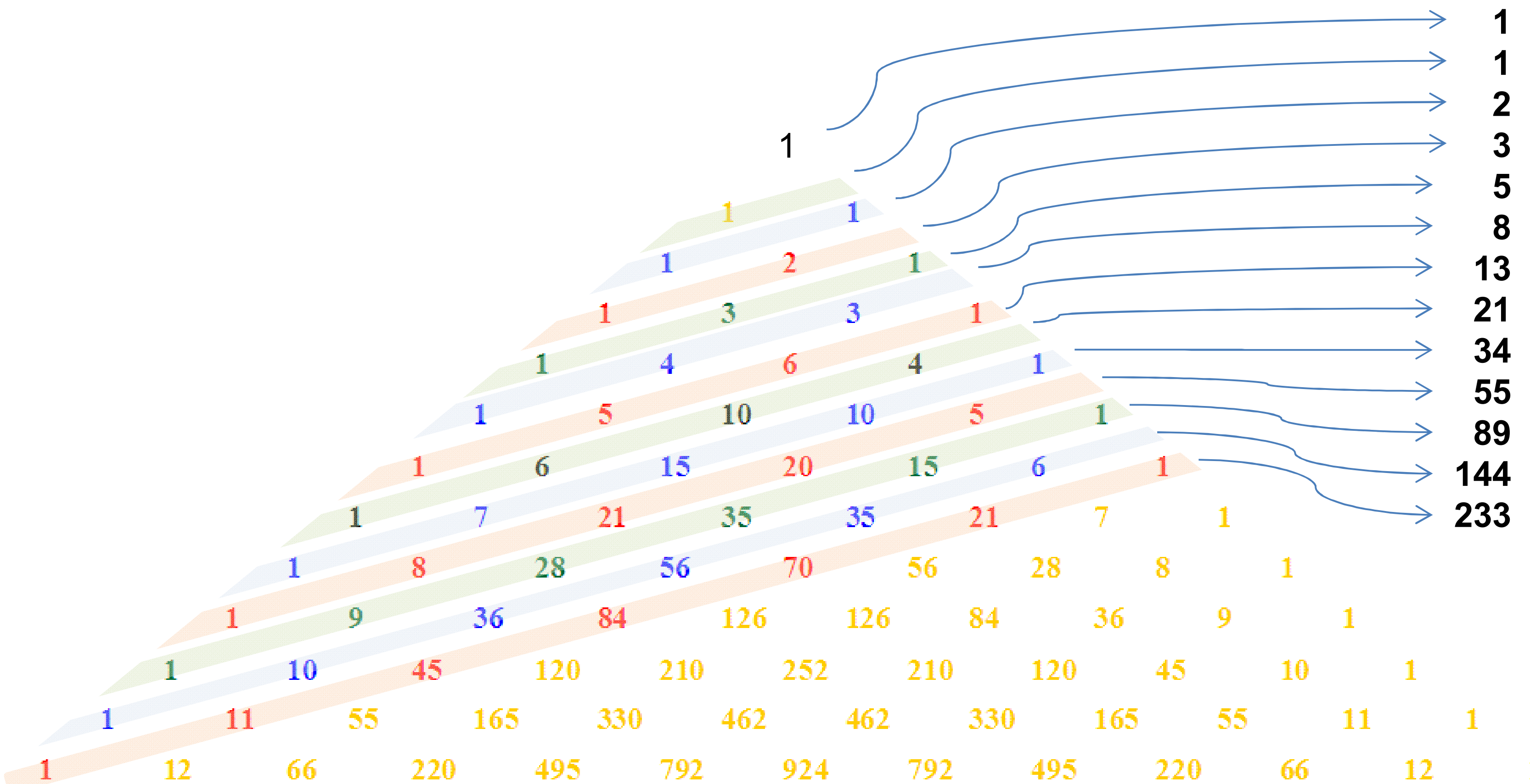
三角形で楕円を描く



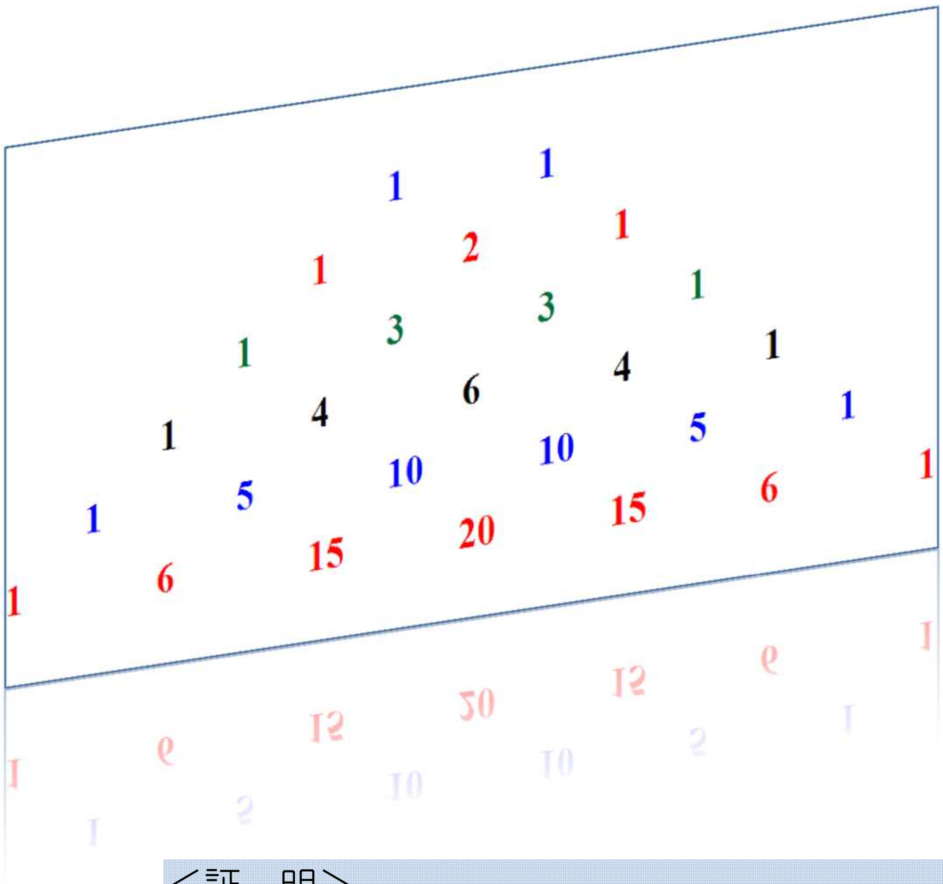
レオナルド・ダ・ヴィンチによる方法

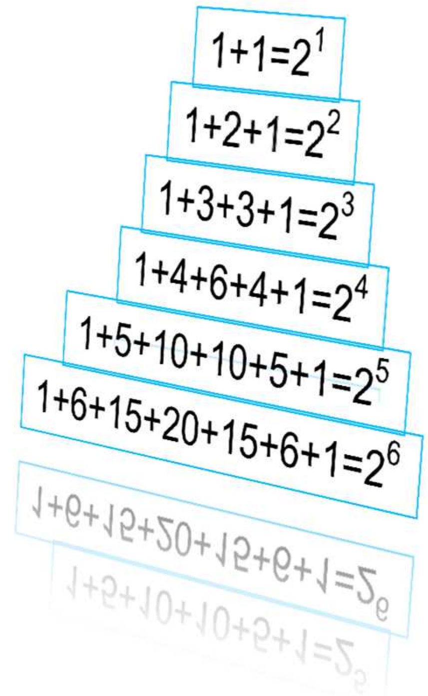
　三角形の1辺が2直線（x軸，y軸）から離れないように動くとき，3番目の頂点が描く軌跡は楕円となる。
　2直線は必ずしも直交していなくてもよい。

パスカルの三角形の中の
フィボナッチ数列



パスカルの三角形の中の各行の和は 2^n





＜証　明＞

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + {}_nC_3 a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots\cdots + {}_nC_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

において　$a=1, b=1$　　とすればよい。

そんな確率まで・・・・・

２つの無作為に選んだ整数が互いに素である確率は　$\dfrac{6}{\pi^2}$

（R･シャルトル　１９０４）

＜番外編＞

質問　「1から100までの数を一つ思い浮かべてください。」

思い浮かべてから次の行に進んでください。

同じ質問がweb上　http://www.arandomnumber.com　にあり,
7万人以上が回答している。
人気の高い順に　5,7,37,56,42　下位は　40,91,94,70,90。
私も同僚の数学教員も選んだ数字は37で，この本の次のページに
『あなたの選んだ数字は37だろう。』とあり，びっくり仰天！
しかし，生徒に試したところ37は1人もいなかった･･･。

そんな確率まで・・・・・Part2

サイコロを投げて，出た目の段数だけ階段を上る事を繰り返す。
十分上の方にある階段を一段指定するとき，その段に立ち止まる確率は

$$\frac{2}{7}$$

＜証明＞

もし，サイコロのすべての面に２が書いてあるとき，確率は$\frac{1}{2}$

サイコロのすべての面に３が書いてあるとき，確率は$\frac{1}{3}$

サイコロはすべての面に3.5(期待値）が書いてあると考えられるから（大数の法則）

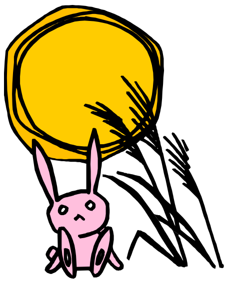
求める確率は　$\frac{1}{3.5}=\frac{2}{7}$

おもしろい一次関数

（昆虫特集その1）

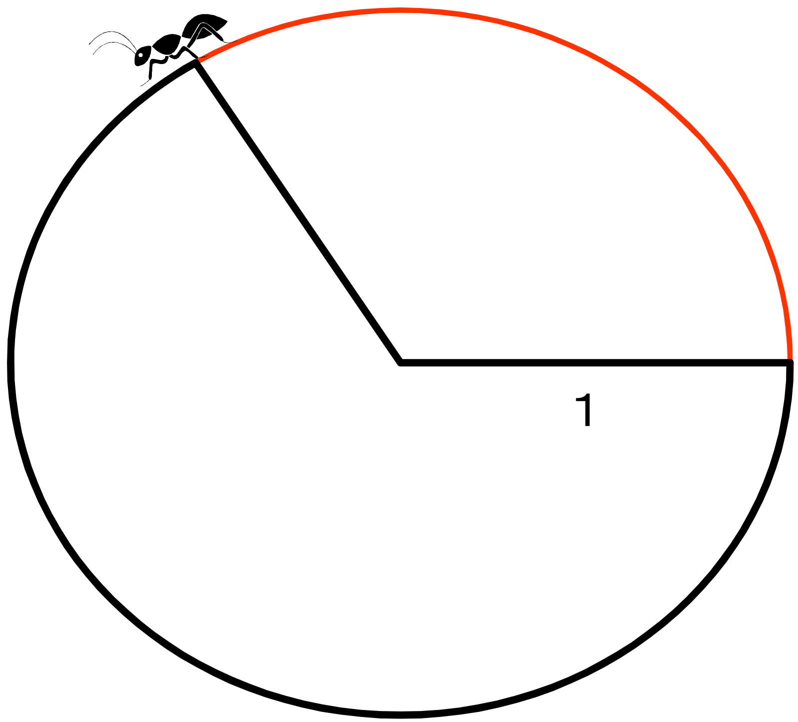
y＝7x－30

y：コオロギが一分間に鳴く回数
x：気温（摂氏→℃）



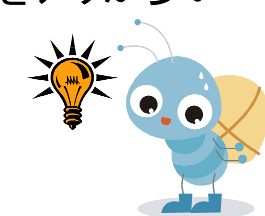
アリが弧度法を救う！

（昆虫特集その2）



1ラジアン：
円周上でその円の半径と同じ長さの弧を切り取る2本の半径がなす角の値。

ラジアン：
半径1の円周上をアリが歩いた距離。



x^n－1を因数分解した係数には･･･

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

x^n－1を因数分解したとき,
xの係数は±1しか現れない気がするが････

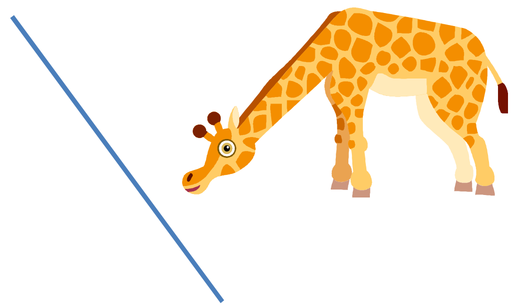
x^{105}－1のとき

$$x^{105}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$
$$(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)$$
$$(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}$$
$$+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1)$$

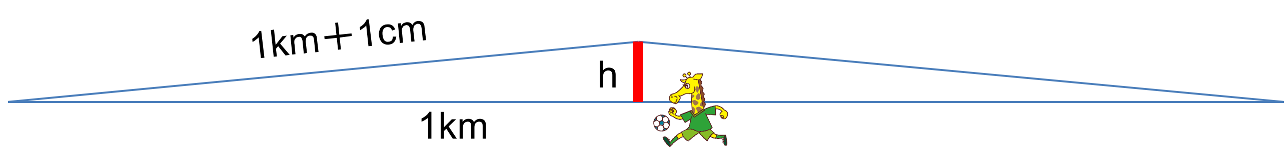
－２がでてくる！

キリンと2cm

地面においてあるロープ。これを背の高いキリンはくぐることができませんが，ロープを2cmだけ長くすると・・・・・・・・くぐれた！



ただし，「最初おいてあったロープの長さが2km」だとしたらの話です。

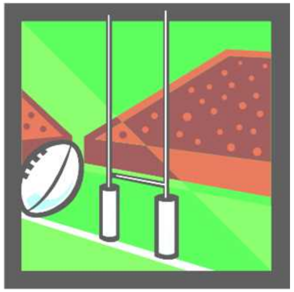


$$h=\sqrt{\left(1000+\frac{1}{100}\right)^2-1000^2}=\sqrt{\left(1000+\frac{1}{100}+1000\right)\left(1000+\frac{1}{100}-1000\right)}$$

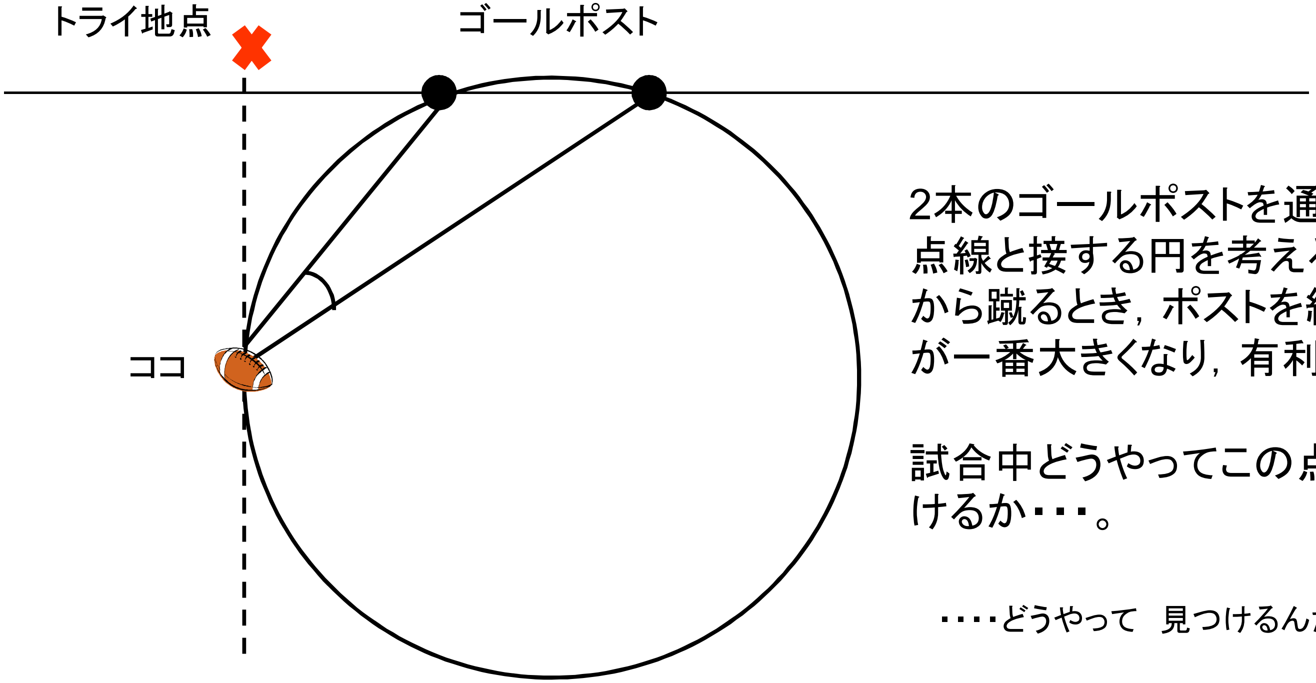
$$=\sqrt{\left(2000+\frac{1}{100}\right)\frac{1}{100}}=\sqrt{20+\frac{1}{10000}}>\sqrt{20}=\text{約 }4.4\ m$$

ラグビーにおける“円周角”作戦

トライの後のゴールキックは（点線上の）どこから蹴るのが有利か？



＜上から見た図＞

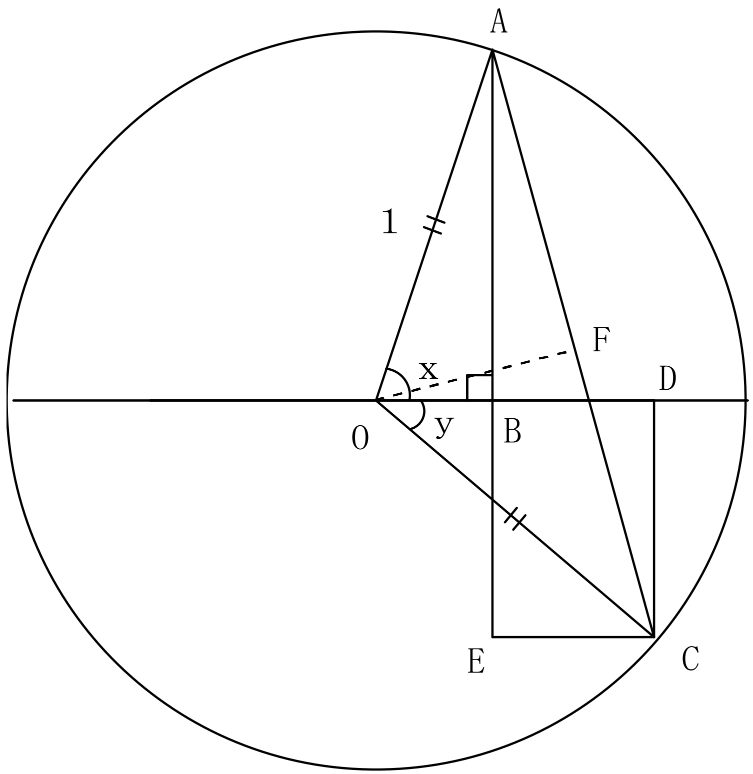


2本のゴールポストを通り，かつ点線と接する円を考える。接点から蹴るとき，ポストを結ぶ角度が一番大きくなり，有利である。

試合中どうやってこの点を見つけるか・・・。

・・・・どうやって　見つけるんだろう・・・?

和→積公式を図から導く



$$
\begin{aligned}
&\sin x + \sin y \\
&= AB + CD \\
&= AE \\
&= AC \cos \angle CAE \\
&= AC \cos \frac{x-y}{2} \\
&\quad \left(\begin{aligned} &\because \angle CAE = \angle OAC - OAB \\ &\quad = \frac{180^\circ - x - y}{2} - \left(90^\circ - x\right) = \frac{x-y}{2} \end{aligned} \right) \\
&= 2AF \cos \frac{x-y}{2} \\
&= 2 \sin \angle AOF \cos \frac{x-y}{2} \\
&= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

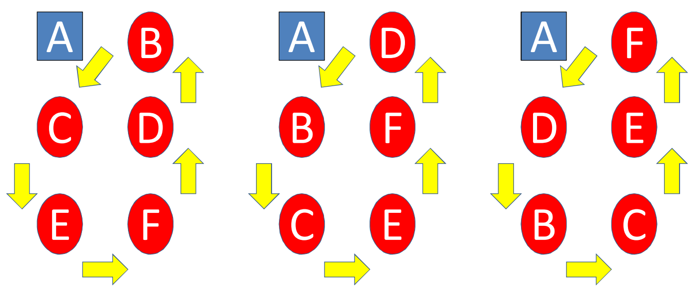
リーグ戦の試合順序の効果的な組み方

A,B,C,D,E,Fの6チームが参加し，各チーム1日1試合　5日間かけてリーグ戦（総当たり）をします。対戦スケジュールを組んで下さい。

1日目　A-B,C-D,E-F　　2日目　A-C,B-E,F-D　　・・・・・・

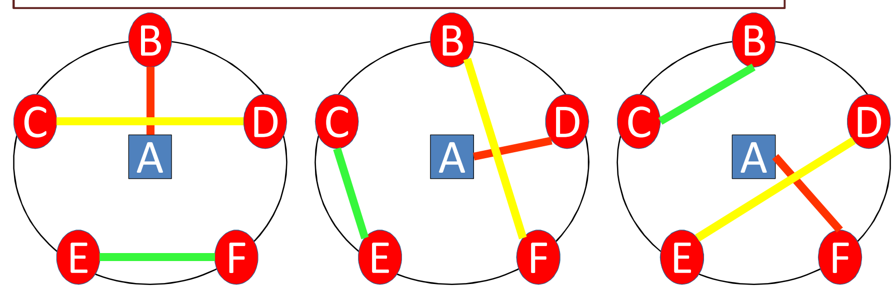
行き当たりばったりで組んでは，最後で重複したりしてうまくいきません。

方法1



・・・と，Aを固定しそのほかを回していく。

方法2（実質的には1と同じです）



・・・と，3本の「対戦棒」を回していく。

どちらも

1日目	2日目	3日目
A-B	A-D	A-F
C-D	B-F	D-E
E-F	C-E	B-C

・・・・といった対戦を表しています。同様に続けると4日目，5日目まで簡単に組むことができます。奇数チーム参加の場合，例えばFを×（対戦なし）に換えて同じように回します。

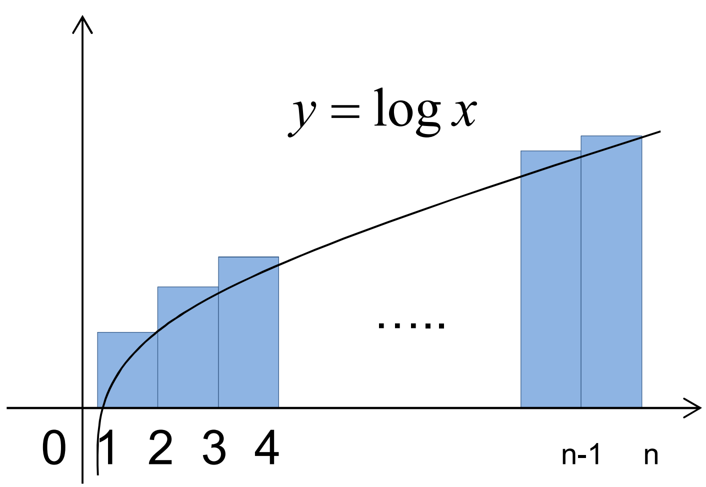
階乗を近似する公式　（スターリングの公式）

n が十分大きい場合　$n! \fallingdotseq n^n e^{-n}$　（ $\log(n!) \fallingdotseq n\log n - n$ ）

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$\log(n!) = \log\{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log k$$



$\sum_{k=1}^{n} \log k$ は，右図の短冊の面積の和で，n が十分に大きいと，これは $y=\log x$ を 1 から nまで積分した値と考えてもよさそうである。

$$\therefore \log(n!) \fallingdotseq \int_1^n \log x \, dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n$$

$$= n\log n - n + 1 \fallingdotseq n\log n - n$$

$$n! \fallingdotseq n^n e^{-n}$$

n	$\log(n!)$	$n\log n - n$
10	15.1044	13.0259
100	363.73937	360.517
1000	5912.128178	5907.76
10000	82108.9278	82103.4

３つの挑戦状

１．４と５の間に何か記号を入れて，４より大きく５より小さい数を作れ。

２．仲間はずれの分数はどれ？

$$\frac{17}{74},\frac{29}{98},\frac{35}{152},\frac{42}{162},\frac{87}{372},\frac{74}{372}$$

３．$\frac{1630}{4542}$の分母と分子で２つの数字を入れ替え，$\frac{1}{3}$にせよ。

1.　4.5

2.　$\frac{74}{372}$　$\left(\begin{array}{l}\text{『約分?!』すると}\frac{1}{8}\text{になるから。他はすべて}\frac{1}{4} \\ \frac{1\cancel{7}}{\cancel{7}4},\frac{2\cancel{9}}{\cancel{9}8},\frac{3\cancel{5}}{1\cancel{5}2},\frac{4\cancel{2}}{16\cancel{2}},\frac{8\cancel{7}}{3\cancel{7}2},\frac{\cancel{7}4}{3\cancel{7}2}\end{array}\right)$

3.　$\frac{1534}{4602}$ or $\frac{1354}{4062}$

フィボナッチ数列について

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４，・・・・・・・

→１，１，２，３，５，８，　２，１０，　１，　０，　１，　　１，２，３，５・・・・・

の繰り返し（mod11）

→フィボナッチ数列の連続する10個の合計は11で割り切れる。

１，$\boxed{１，２，３，５，８，　２，１０，　１，　０，　１，}$　１，２，３，５・・・・・

１，１，２，３，$\boxed{５，８，　２，１０，　１，　０，　１，　１，２，３，}$５・・・・・

長方形で囲んだ部分の和はどちらも　３３≡０（mod１１）

フィボナッチ数の分数

$$\frac{1}{998999} = 0.000001001002003005008013021034055089\cdots$$

というのもある。

分数の和　$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$　について　その1

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots\cdot$$

$$=1+\frac{1}{2}+\quad\frac{1}{2}\quad+\quad\frac{1}{2}\quad+\cdots\to\infty$$

$\therefore$ H は∞に発散します。

ちなみに

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{n}=7.485$$

$$\sum_{n=1}^{100万}\frac{1}{n}=14.357$$

$$\sum_{n=1}^{10億}\frac{1}{n}=21$$

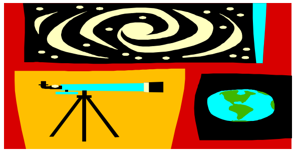
$$\sum_{n=1}^{1兆}\frac{1}{n}=28$$

で，

　H を100にするには先頭から10^{43} 個を計算する必要があり，これは毎秒100万項を加算するコンピュータで10^{37}秒かかる。

（宇宙の年齢は10^{17}秒）

　また，H を1000にするには先頭から10^{434} 個を計算しなくてはならない。



分数の和　$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$　について　その2

H で，分母に9が1つ以上含まれている項を全部取り除けば，発散しなくなる

$$J=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots\cdots+\frac{1}{28}+\cdots\cdots+\frac{1}{80}+\cdots\cdots+\frac{1}{88}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{100}+\cdots\cdots+\frac{1}{888}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$<(1+\cdots\cdots+1)+\left(\frac{1}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots\cdots+\frac{1}{100}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$<\quad 9\cdot 1\quad+\quad 9^2\cdot\frac{1}{10}\quad+\quad 9^3\cdot\frac{1}{10^2}\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=9\left\{1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}\to\frac{9}{1-\frac{9}{10}}=90$$

分数の和　$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$　について　**その3**

しかし分母が素数の場合は発散する

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\cdots\cdots\cdots\cdots\to\infty$$

$0<x<1$ のとき $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ だから

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots=H\ \to\infty$$

ここで　$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{1}{1-x}\leqq 10^x$ が成り立つから＜注＞

$$H=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\leqq\ 10^{\frac{1}{2}}\times10^{\frac{1}{3}}\times10^{\frac{1}{5}}\times10^{\frac{1}{7}}\times10^{\frac{1}{11}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\ 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots}$$

ここで $H\to\infty$ だから $10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots}\to\infty$　$\therefore\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\cdots\cdots\to\infty$

＜注＞$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots\cdots$

$1+x\leq e^x$ より　$1+2x\leq e^{2x}$

両辺に　$1-x>0$ をかけて

$(1+2x)(1-x)\leq e^{2x}(1-x)$

$1\leq 1+(2x+1)x\leq e^{2x}(1-x)$

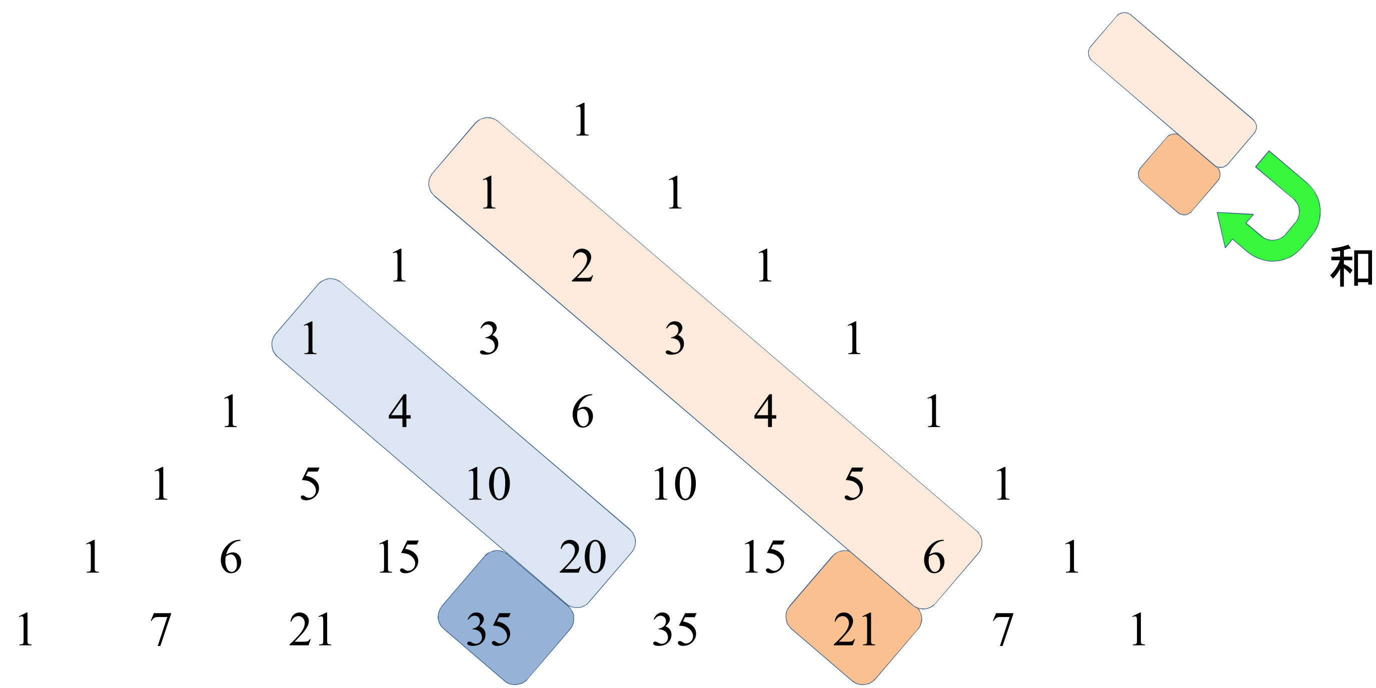
$1\leq e^{2x}(1-x)$ の両辺を $1-x>0$ で割って

$\dfrac{1}{1-x}\leq e^{2x}$　　$\therefore\ \dfrac{1}{1-x}\leq e^{2x}\leq 10^x$

ただ・・5000万番目まで足しても，その部分和は 4 にみたない・・・

パスカルの三角形の中の ホッケーのスティックの定理

（クリスマスのストッキングの定理）



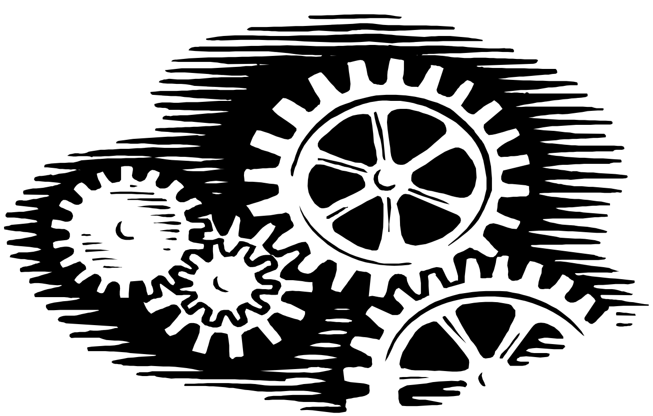
起　源

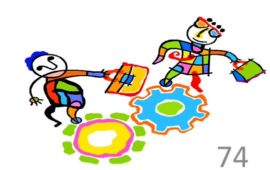
$\sqrt{}$	オーストリアの数学者　クリストフ･ルドルフが 1525年発表の印刷物に$\sqrt{}$　　を使った。
＝	2本の平行線，つまり長さが等しい1組の線　＝を「･･･に等しい」という言葉の代わりに使う。これ以上等しいものは他にないからだ。 1557年　ロバート･レコード　『知恵の砥石　算術第二部』
指数	1637年　ルネ･デカルトが世界で初めてx^2の２のような上付き添え字を使った。
∞	イギリスの数学者ジョン･ウォリスが，1655年に著書の中で無限大を示す∞を初めて使った。
！	ｎ！は　ｎ」だった。 活字にしにくかったので，1808年にフランス人数学者クリスチャン･クランプが活字にしやすい　ｎ！に変えた。

ギアと素数とサイクロイド

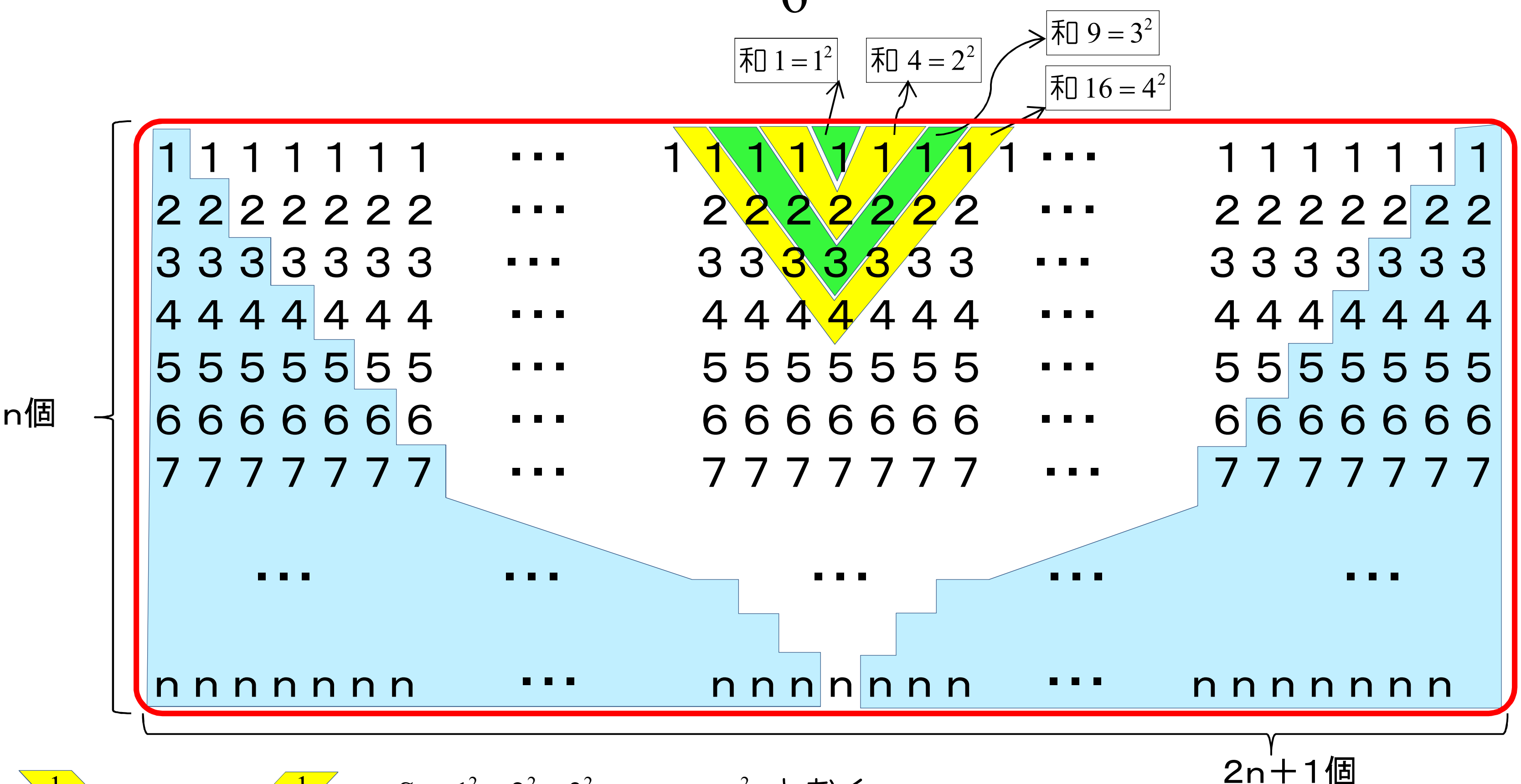
ギアの同じ歯同士が頻繁にかみ合わないように，歯車の歯数を素数にすることが多い。

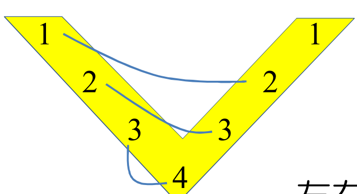
歯車の歯形にサイクロイドを用いるとかみ合いが滑らかになり，摩耗も一様になるので，時計などの精密機械に利用されている。





$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ の図形的証明





$1+3+5+7=4^2$

$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ とおく。

全ての数の総和 $=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2n+1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

左右の階段状の部分の和 $=\left(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2\right)\times 2=2S_n$

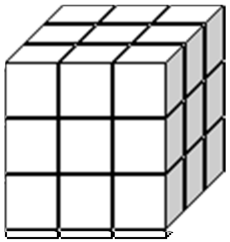
中央のV字部分の和 $=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=S_n$

$\therefore 3S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$ より

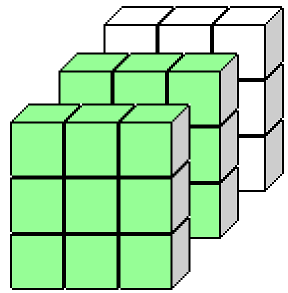
$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

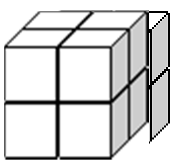
1＋8＋27

（3乗の和について考えよう）

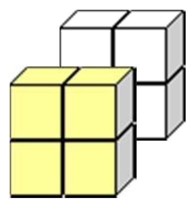


27コ

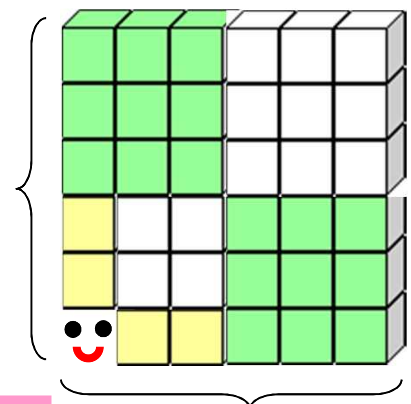


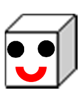


8コ



1＋2＋3





1コ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

1＋2＋3

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

三角関数のグラフの導入

観覧車の縦の動きがsin

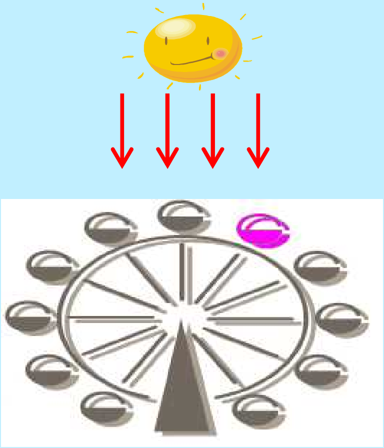
$y = \sin\theta$

$y = \sin 2\theta$ は

回転スピードが２倍になる

$y = 2\sin\theta$ は

観覧車の半径が２倍になる



観覧車の影の動きがcos

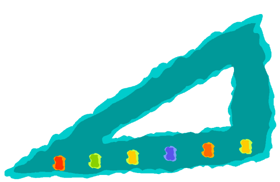
連続した奇数の逆数の和で作る直角三角形

連続する奇数の逆数の和 $\dfrac{1}{2k-1}+\dfrac{1}{2k+1}=\dfrac{4k}{4k^2-1}$ で，

分母 $4k^2-1$ と分子 $4k$ を使って

$$\left(4k^2-1\right)^2+\left(4k\right)^2=\left(4k^2+1\right)^2$$

という式ができるから，これらは直角三角形の二辺となり得る。



＜例＞

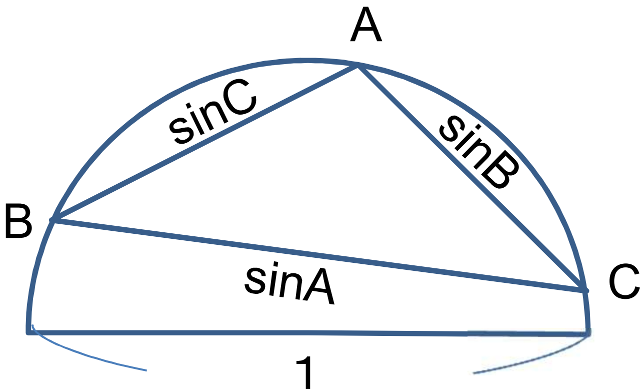
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35} \qquad 35^2+12^2=37^2$$

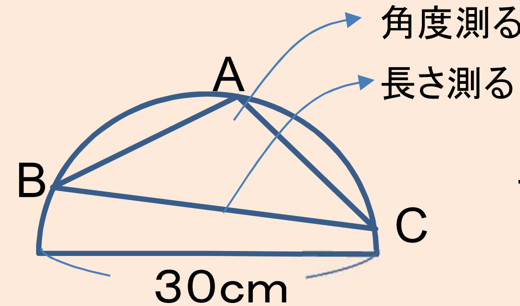
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{11}=\frac{20}{99} \qquad 99^2+20^2=101^2$$

$$\frac{1}{23}+\frac{1}{25}=\frac{48}{575} \qquad 575^2+48^2=577^2$$

sin　の実測

正弦定理より，直径1の外接円を持つ三角形の三辺の長さは
sinA，sinB，sinC　となる。





またこの円に内接する三角形のうち，周の長さが最大なものは正三角形$\left(一辺\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

であることを認めると

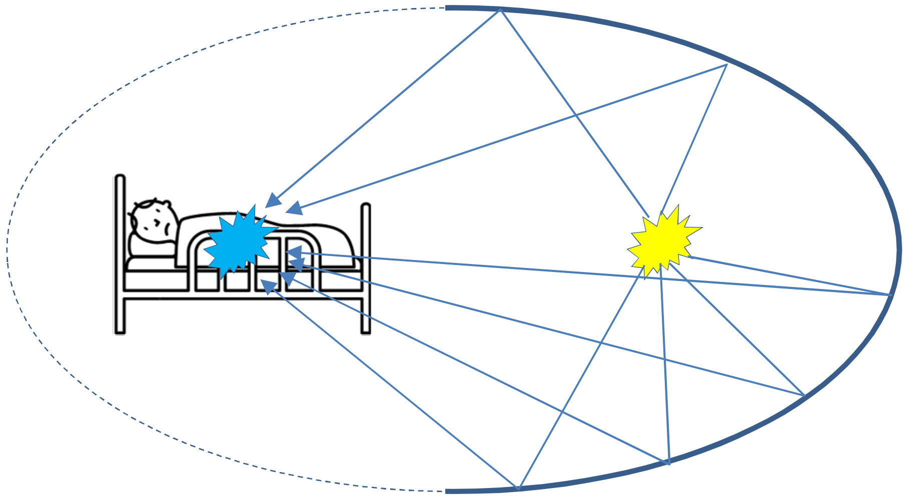
『 A,B,Cが三角形の内角のとき　$\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$　』

が成り立つ。これは

『A,B,Cが三角形の内角のとき　$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3}{8}\sqrt{3}$　』

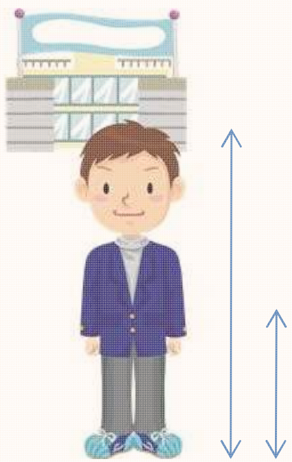
と書き換えることもできる。

体外衝撃波結石破砕装置

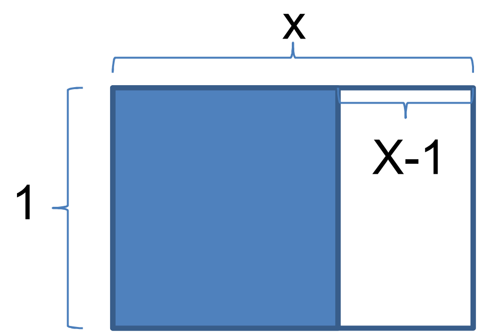


　楕円面の焦点で衝撃波を発生させると，反射した衝撃波はもう一方の焦点へと集中する。結石患者の患部をこの焦点へ置くと，メスを使わずに結石を粉砕することができる。

黄金比に基づく人体の理想の比率



身長	182cm
へその高さ	113cm
腕を上げた指先までの長さ	226cm



＜黄金比＞
正方形を切り取ると残りの長方形がもとの長方形と相似になっている長方形の辺の比

$1 : x = (x-1) : 1 \qquad x^2 - x - 1 = 0 \cdots ① \qquad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$

①より $x^2 = x + 1$

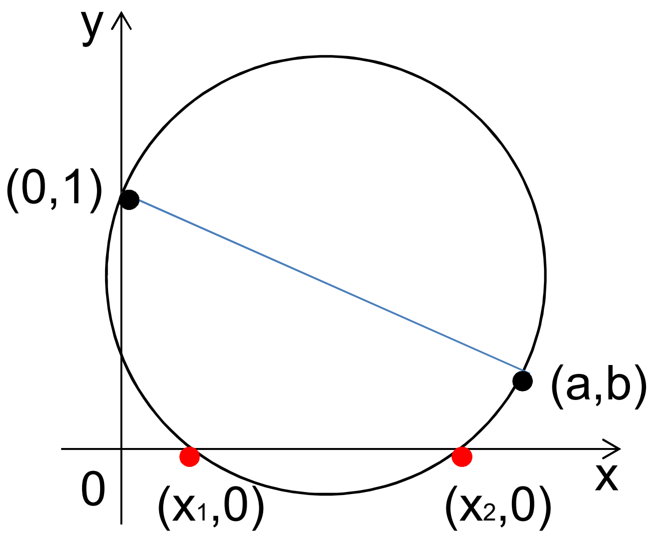
$\rightarrow \quad x = \sqrt{1+x} \qquad\qquad \rightarrow \quad x = 1 + \dfrac{1}{x}$

と変形できるから，黄金比 $1.618\cdots$ は

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots\cdots}}}}}} \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}}}$$

と表現することもできます。

2次方程式の解の作図

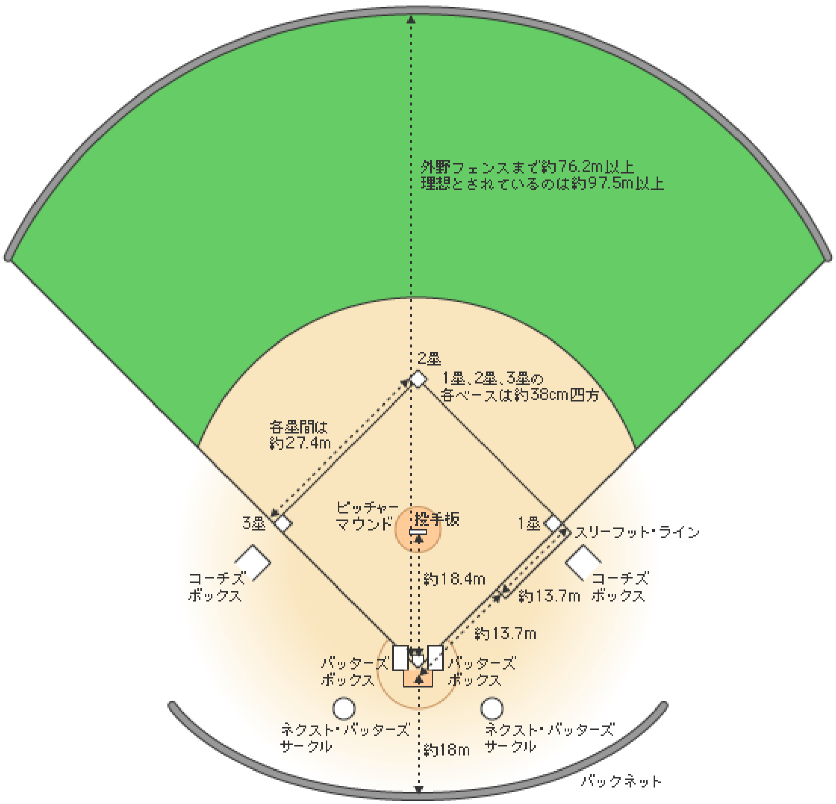


方程式　$x^2 - ax + b = 0$　の解を作図すると･･･

2点$(0,1),(a,b)$を直径とする円と x 軸との交点！

$$\begin{pmatrix} \text{円の方程式}\quad x(x-a)+(y-1)(y-b)=0 \\ y=0\text{として}\quad x^2-ax+b=0 \end{pmatrix}$$

14－9.24＝ランニングホームランの境目



14秒：俊足ランナーのベース1周

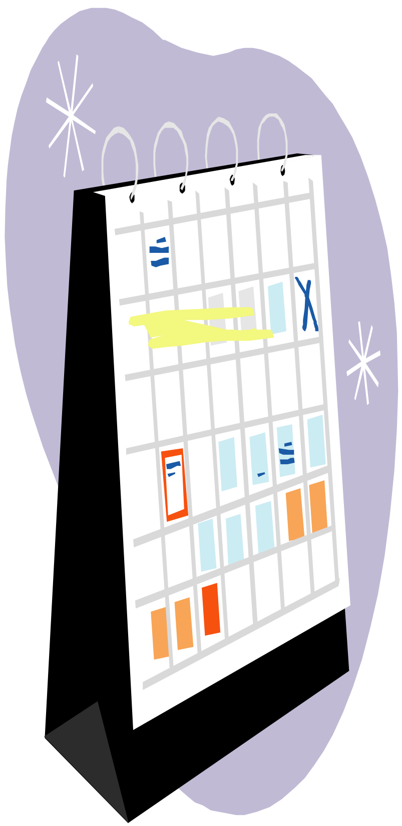
9.24秒

打球のﾌｪﾝｽ直撃までに3.3秒程度
外野手、内野手の捕球・送球ﾓｰｼｮﾝに1.8秒
捕球地点からホームを115m、送球スピードを100km/sとすると4.14秒かかる
合計9.24秒

14－9.24＝4.76

フェンスに当たったボールを外野手がもたついて4.76秒以内に送球できなければランニングホームランになる?!

4月4日が木曜日だったら



6月6日と8月8日も木曜日　！！

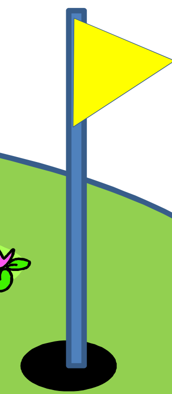
4月4日　　6月6日　　8月8日

63日　　63日

この3日は63日ずつあいているから同じ曜日になる。
10月10日と12月12日も同様。

そんな確率まで・・・・・Part3

ゴルフのホールインワンの確率は打つ距離によって変わるが、
その確率とは

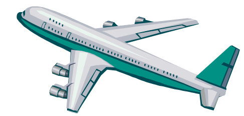


150～170ヤード	1万2000分の1
135　ヤード	1万　500分の1
200　ヤード	1万4000～1万5000分の1

ホールインワン保険　取扱会社のデータより

そんな確率まで・・・・・Part4

飛行機事故に遭う確率



毎日飛行機で1往復したとしても　**1400年に1回**

もし、日本・欧米諸国の航空会社
だけ利用すれば

5500年に1回

程度と推測されている。

ちなみに2012年の国内交通事故
66万4907件
4411人死亡

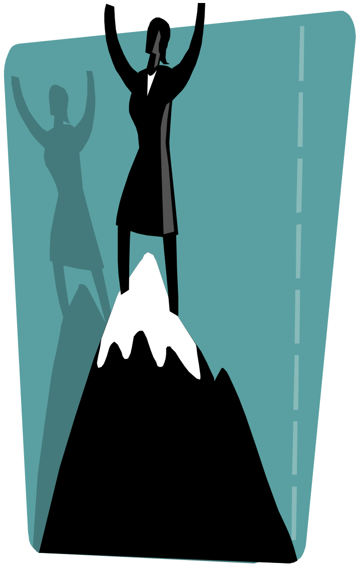
そんな確率まで・・・・・Part5

エベレスト登頂の確率

料金を払って登山した人の統計によると

5分の1　成功

40分の1　亡くなっている



防寒着、呼吸機器の向上により
成功確率は上がってきているそうだ。

7月22日は何の日？

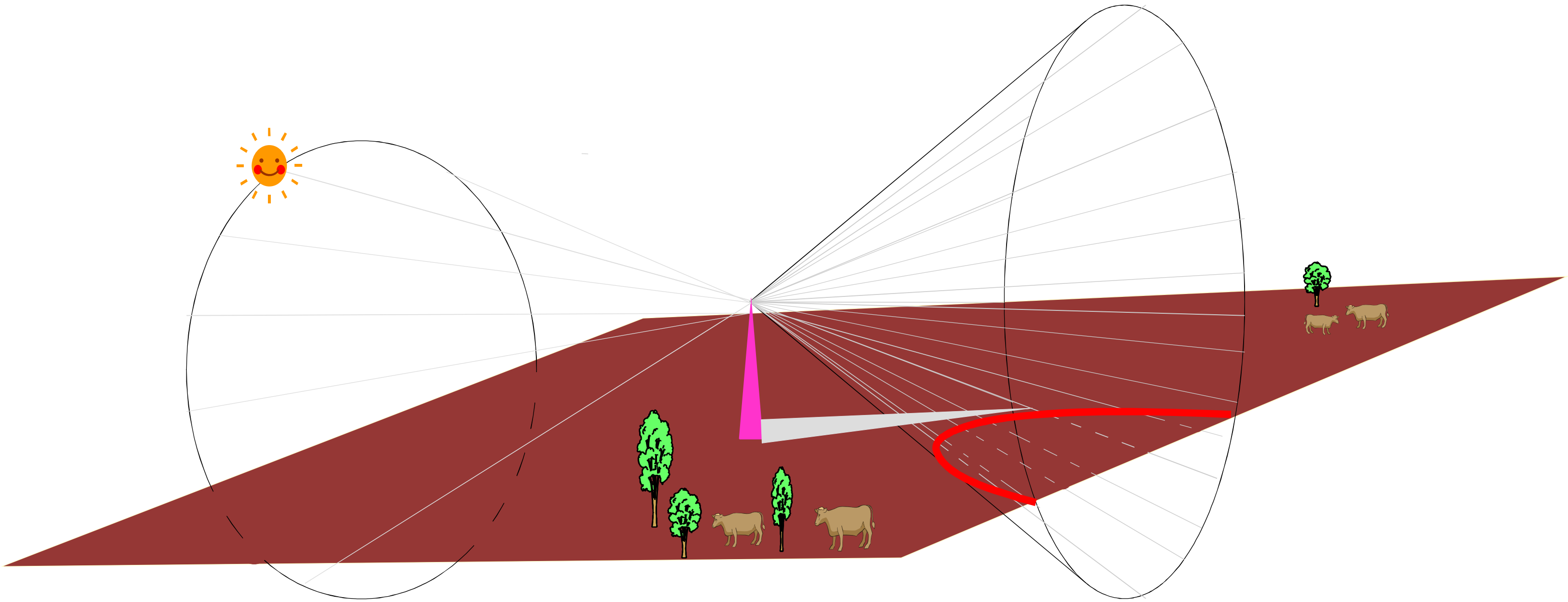
ヒント：$\dfrac{22}{7}$=3.142　だから・・・

答え:円周率の日

産　医師 異国　に向 こぅ産後　役　なく　産婦 産婆 四郎 次郎 死産産婆 さんに泣く

3.141592653589793238462643383279

とてつもなく大きな円錐



円錐を母線に平行でない平面で切断するから

影の先端の軌跡は双曲線

１．０１の法則

ほんのわずかな（前日の1.01倍の）努力でも1年間続けると・・・・

$$1.01^{365} = \boxed{37倍！}$$ になる。

対数表で計算

$x = 1.01^{365}$ とおくと、

$$\log_{10} x = \log_{10} 1.01^{365}$$

$$= 365 \log_{10} 1.01 = 365 \times 0.0043$$

$$= 1.5695$$

$$\therefore \quad x = 10^{1.5695} = 10^1 \times 10^{0.5695}$$

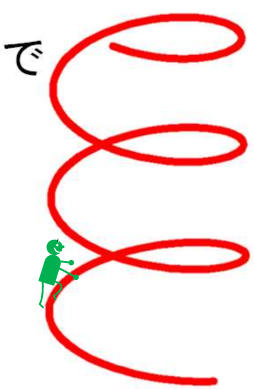
$$= 10 \times 3.71 = 37.1$$

ただ、前日より100分の1ずつサボると

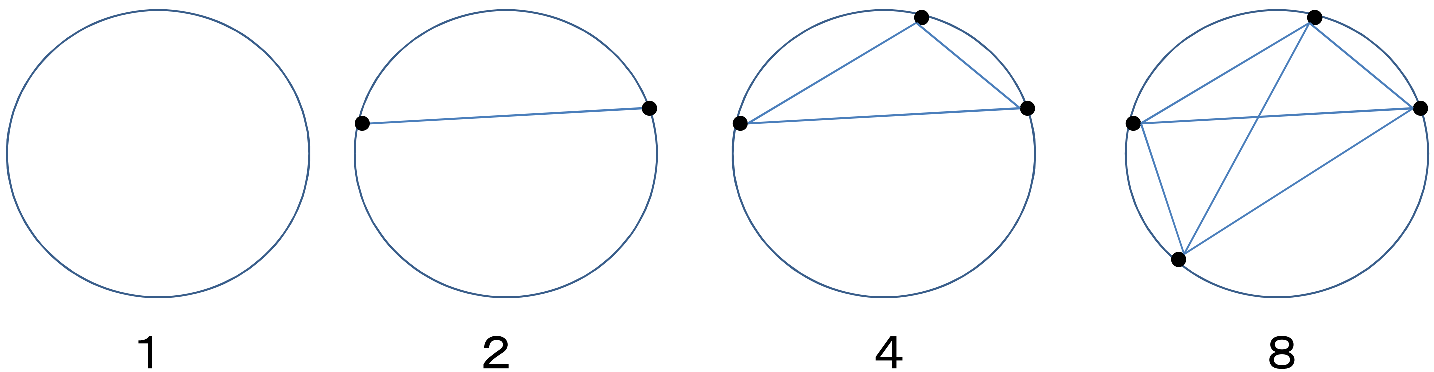
$$0.99^{365} = 0.0255$$

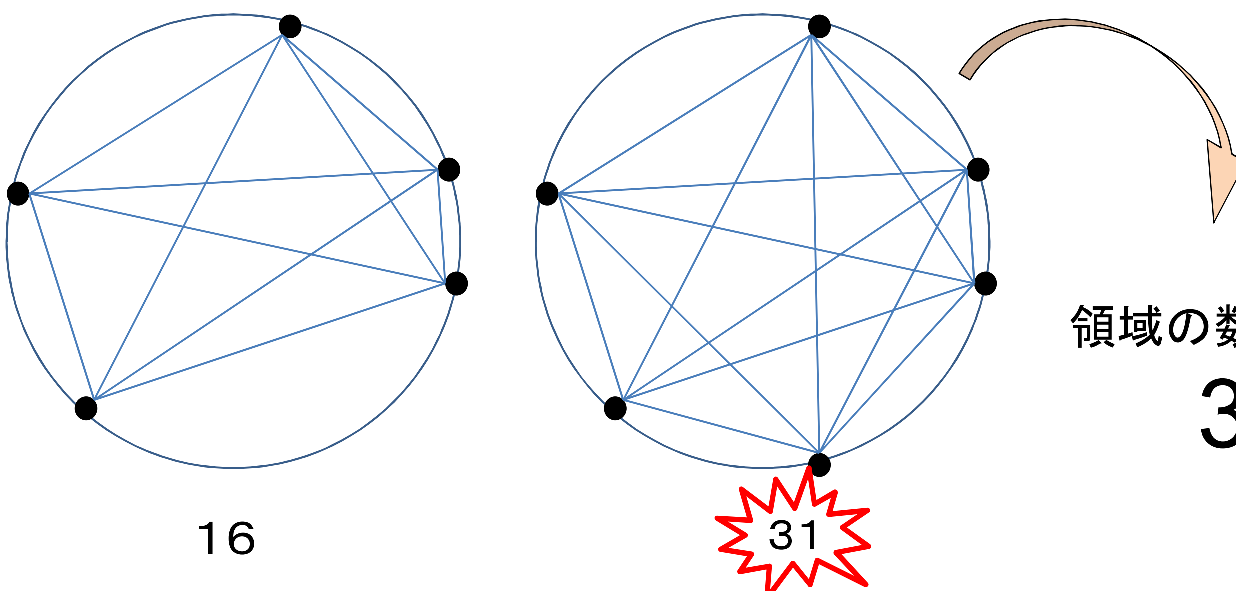
実力は $\dfrac{1}{40}$ になるので

ご注意を。



規則正しくない例

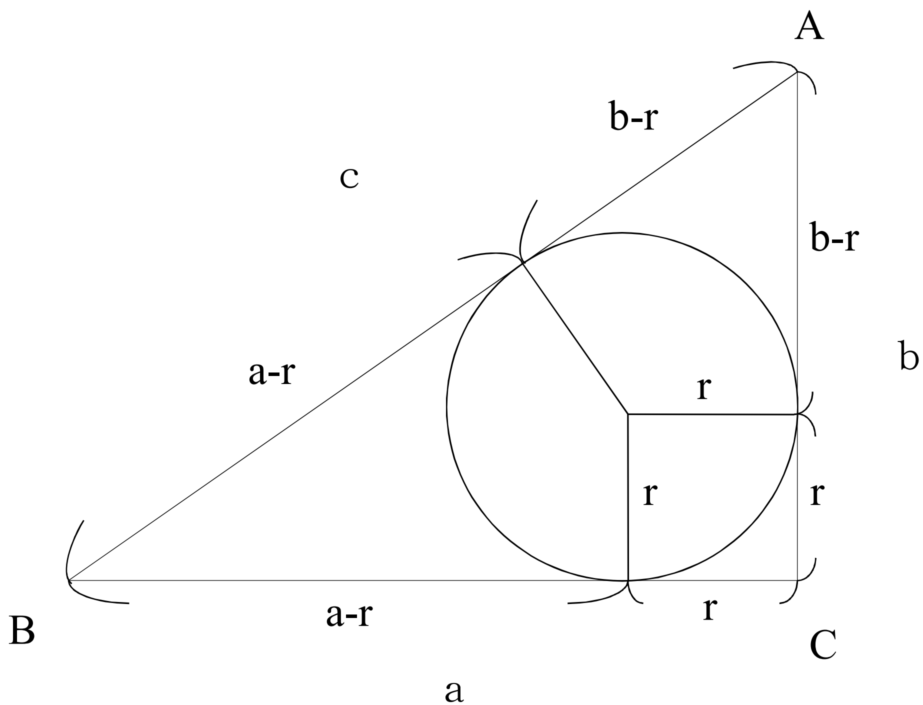




領域の数は・・・

32 じゃないんだ・・

内接円の半径を使って　三平方の定理の証明



左の図より　$c=(a-r)+(b-r)=a+b-2r$

$$\therefore\ r=\frac{a+b-c}{2}\cdots\cdots ①$$

一方，三角形の面積 S について

$S:\ \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ が成り立ち，

①を代入すると

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\frac{a+b-c}{2}(a+b+c)$$

$$2ab=(a+b-c)(a+b+c)$$

$$2ab=(a+b)^2-c^2$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

引き続き‥

三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$について

① a, bの少なくとも一方は3の倍数

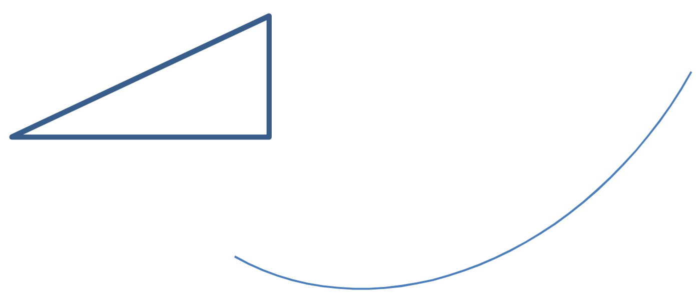
a, bがともに3の倍数でないとすると、
a, b は$3k+1$ または $3k+2$ （kは自然数）
$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$
$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod{3}$　より
$a^2+b^2 \equiv 2 \pmod{3}$つまり　$c^2 \equiv 2 \pmod{3}$・・・☆
ところが、cが3の倍数でないときは$c^2 \equiv 1 \pmod{3}$
cが3の倍数のときは　　$c^2 \equiv 0 \pmod{3}$
となるから☆は不合理である。
∴ a, bの少なくとも一方は3の倍数。

② a, b, cの少なくとも一方は5の倍数

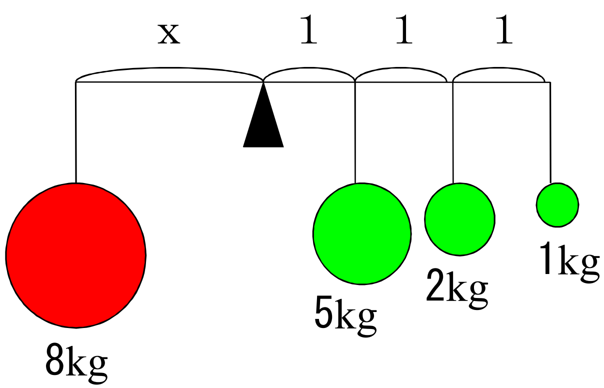
a, b, cがともに5の倍数でないとすると、
a, b, c は$5k+1$ または $5k+2$または $5k+3$または $5k+4$
（kは自然数）

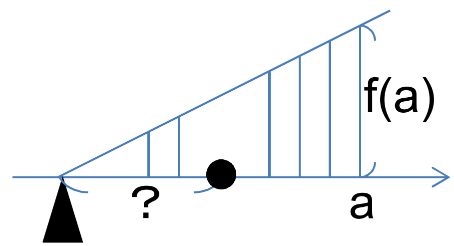
$$\left.\begin{aligned}(5k+1)^2 &= 25k^2 + 10k + 1 \equiv 1 \pmod{5}\\ (5k+2)^2 &= 25k^2 + 20k + 4 \equiv 4 \pmod{5}\\ (5k+3)^2 &= 25k^2 + 30k + 9 \equiv 4 \pmod{5}\\ (5k+4)^2 &= 25k^2 + 40k + 16 \equiv 1 \pmod{5}\end{aligned}\right\}(*)$$

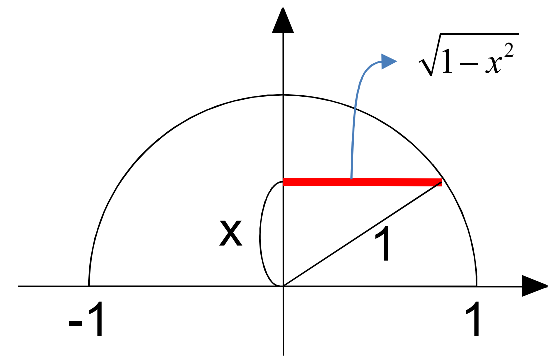
より$a^2+b^2 \equiv 0,2,3 \pmod{5}$つまり　$c^2 \equiv 0,2,3 \pmod{5}$・・・☆
ところが、cが5の倍数でないとき$(*)$より$c^2 \equiv 1, 4 \pmod{5}$
となるから☆は不合理である。
∴ a, b, cの少なくとも一方は5の倍数。



積分と重心







$$x\times 8 = 1\times 5 + 2\times 2 + 3\times 1$$

$$x\times 8 = 5 + 4 + 3$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

右側の3つの物体を一つのもの
ととらえると重さは8。

支点から重心までの水平距離

$$= \frac{(距離\times 重さ)の合計}{重さの合計}$$

$$= \frac{\int_0^a x\, f(x)dx}{\int_0^a f(x)dx}$$

半円の重心は

$$\frac{\int_0^1 x\times 2\sqrt{1-x^2}\,dx}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

水くみ問題

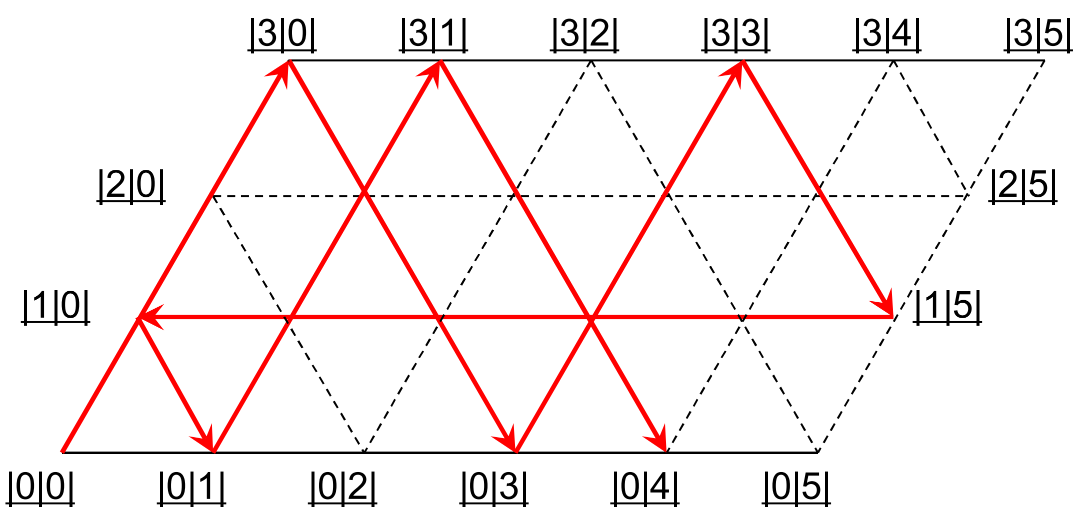
3リットルと5リットルの容器を用いて4リットル量る方法を考えよう。

|0|0| → |3|0| → |0|3| → |3|3| → |1|5|

|3|0|：③に水を入れる
|0|3|：3リットル⑤に移す
|3|3|：③に水を入れる
|1|5|：③の2リットル分⑤に移す

→ |1|0| → |0|1| →|3|1|→|0|4|

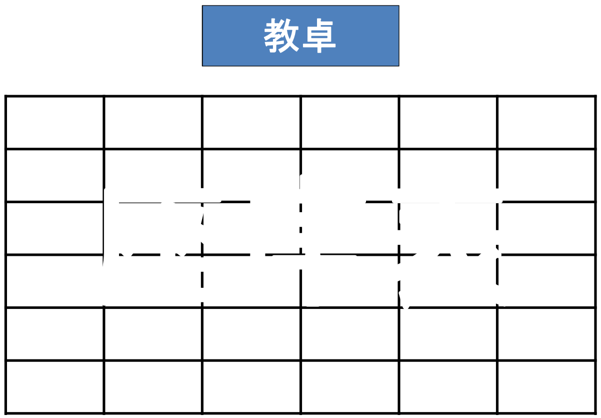
|1|0|：⑤の水を捨てる
|0|1|：③の1リットル分⑤に移す
|3|1|：③に水を入れる
|0|4|：3リットル⑤に移す



これは斜めのビリヤードテーブルを使って幾何学的に解くことが出来る。

『7リットルと10リットルの容器を用いて15リットル量る方法』等も同様

かけがえのない・・・座席表



$30! = 2.6525286 \times 10^{32}$

・・・・・・

$35! = 1.0333148 \times 10^{40}$

$36! = 3.71993327 \times 10^{41}$

・・・・・・

$40! = 8.15915283 \times 10^{47}$

「この席順になる」確率と比べてみよう。

「世界中の人（約72億人）から自分が一人だけ選ばれる確率」

「地球上にいる生物（3×10^{33}）から自分が一人だけ選ばれる確率」

「コインを100回投げて、全て同じ側が出る確率」7.889×10^{-31}

ちなみに

1！=1
2！=2
3！=6
4！=24
5！=120
6！=720
7！=5040
8！=4,0320
9！=36,2880
10！=362,8800
11！=3991,6800
12！=4,7900,1600
13！=62,2702,0800
14！=871,7829,1200
15！=1,3076,7436,8000

16！=20,9227,8988,8000
17！=355,6874,2809,6000
18！=6402,3737,0572,8000
19！=12,1645,1004,0883,2000
20！=243,2902,0081,7664,0000
21！=5109,0942,1717,0944,0000
22！=11,2400,0727,7776,0768,0000
23！=258,5201,6738,8849,7664,0000
24！=6204,4840,1733,2394,3936,0000
25！=15,5112,1004,3330,9859,8400,0000
26！=403,2914,6112,6605,6355,8400,0000
27！=1,0888,8694,5041,8352,1607,6800,0000
28！=30,4888,3446,1171,3860,5015,0400,0000
29！=884,1761,9937,3970,1954,5436,1600,0000
30！=2,6525,2859,8121,9105,8636,3084,8000,0000
31！=82,2283,8654,1779,2281,7725,5628,8000,0000
32！=2631,3083,6933,6935,3016,7218,0121,6000,0000
33！=8,6833,1761,8811,8864,9551,8194,4012,8000,0000
34！=295,2327,9903,9604,1408,4761,8609,6435,2000,0000
35！=1,0333,1479,6638,6144,9296,6665,1337,5232,0000,0000
36！=37,1993,3267,8990,1217,4679,9944,8150,8352,0000,0000
37！=1376,3753,0912,2634,5046,3159,7958,1580,9024,0000,0000
38！=5,2302,2617,4666,0111,1760,0072,2410,0074,2912,0000,0000
39！=203,9788,2081,1974,4335,8640,2817,3990,2897,3568,0000,0000
40！=8159,1528,3247,8977,3434,5611,2695,9611,5894,2720,0000,0000
41！=33,4525,2661,3163,8071,0817,0062,0534,4075,1665,1520,0000,0000
42！=1405,0061,1775,2879,8985,4314,2606,2445,1156,9936,3840,0000,0000
43！=6,0415,2630,6337,3835,6373,5513,2068,5139,9750,7264,5120,0000,0000
44！=265,8271,5747,8844,8768,0436,2581,1014,6158,9031,9638,5280,0000,0000

10^{1} 十 じゅう
10^{2} 百 ひゃく
10^{3} 千 せん
10^{4} 万 まん
10^{8} 億 おく
10^{12} 兆 ちょう
10^{16} 京 けい
10^{20} 垓 がい
10^{24} 秭{禾予} じょ
10^{28} 穣 じょう
10^{32} 溝 こう
10^{36} 澗 かん
10^{40} 正 せい
10^{44} 載 さい
10^{48} 極 ごく
10^{56} 恒河沙 ごうがしゃ
10^{64} 阿僧祇 あそうぎ
10^{72} 那由他 なゆた
10^{80} 不可思議 ふかしぎ
10^{88} 無量大数 むりょうたいすう

恒河沙とは恒河（ガンジス川）の砂の数という意味。ちなみに宇宙全体の粒子（陽子・中性子）の個数は約10^{79}だそうで、それをも越える数の呼び方がある　というのは面白い。昔の人はスゴイ・・・・

ちなみにｎ！が ちょうどn桁になるのは n＝22，23，24の3つ。

対称式・基本対称式・漸化式

$a = 1 + \sqrt{2}\,, b = 1 - \sqrt{2}$ のとき $a^2 + b^2\,, a^3 + b^3, a^4 + b^4\,, a^7 + b^7$ を求めよ。

$a + b = 2\,, ab = -1$だから、a, bは2次方程式$x^2 - 2x - 1 = 0$　の解。

$\therefore\ a^2 - 2a - 1 = 0$・・・①,　$b^2 - 2b - 1 = 0$ ・・・②

①× a^n +②× b^n　より

$$(a^{n+2} - 2a^{n+1} - a^n) + (b^{n+2} - 2b^{n+1} - b^n) = 0$$

$$(a^{n+2} + b^{n+2}) - 2(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n + b^n) = 0$$

ここで　$F(n) = a^n + b^n$ とおくと、

$F(n+2) - 2F(n+1) - F(n) = 0$より

$$F(n+2) = 2F(n+1) + F(n)$$

いま、$F(0) = 2$　,$F(1) = 2$ だから

$$a^2 + b^2 = F(2) = 2F(1) + F(0) = 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$a^3 + b^3 = F(3) = 2F(2) + F(1) = 2 \times 6 + 2 = 14$$

$$a^4 + b^4 = F(4) = 2F(3) + F(2) = 2 \times 14 + 6 = 34$$

・・・このように順に計算すれば、$a^7 + b^7$どころか$a^{10} + b^{10}$などを
簡単に計算することができる。

logの値を手計算で求めよう

$$2^{10} = 1024 \quad \Rightarrow \quad 2^{10} \approx 10^3$$

$$\log_{10} 2^{10} \approx \log_{10} 10^3$$

$$\log_{10} 2 \approx \frac{3}{10} \log_{10} 10$$

$$\therefore \ \log_{10} 2 \approx \frac{3}{10} \approx 0.3$$

$$3^4 = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^4 \approx 80$$

$$\log_{10} 3^4 \approx \log_{10} 80$$

$$\begin{aligned} 4\log_{10} 3 &\approx \log_{10} 8 + \log_{10} 10 \\ &= 3\log_{10} 2 + 1 \\ &= 3 \times 0.3 + 1 = 1.9 \end{aligned}$$

$$\therefore \ \log_{10} 3 \approx \frac{1.9}{4} = 0.475$$

$$7^4 = 2401$$

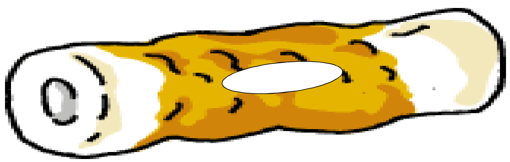
$$7^4 \approx 2400$$

$$\log_{10} 7^4 \approx \log_{10} 2400$$

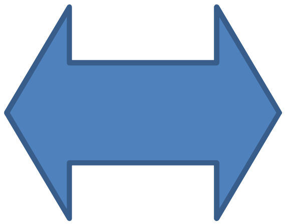
$$\begin{aligned} 4\log_{10} 7 &\approx \log_{10} 8 + \log_{10} 3 + \log_{10} 100 \\ &= 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2 \\ &= 3 \times 0.3 + 0.475 + 2 \\ &= 3.375 \end{aligned}$$

$$\therefore \ \log_{10} 7 \approx \frac{3.375}{4} \approx 0.844$$

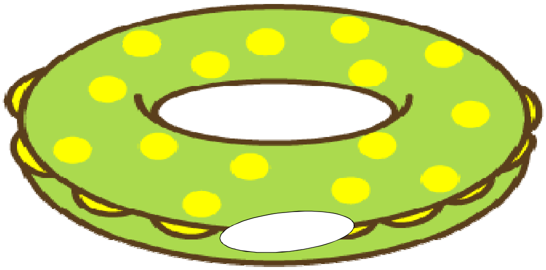
ちくわ　＝　うきわ　？



ちくわ型の局面に
穴をあけたもの



中身を引っ張り出し
裏返すと・・・



穴の開いた浮き輪型
になる

100円ショップで売っているヘアバンド(筒状に縫製されたもの)
に穴を空け、確認することができる。

うるう年の分数的解釈

現在私たちが使っているグレゴリオ暦

1年は365.2425日

$$
\begin{aligned}
365.2425 &= 365 + \frac{24}{100} + \frac{25}{10000} \\
&= 365 + \frac{25}{100} - \frac{1}{100} + \frac{25}{10000} \\
&= 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}
\end{aligned}
$$

だから・・・

4年に1回うるう年
100の倍数の年はうるう年にしない
400の倍数の年はうるう年にする

となっているけど、

$$
\begin{aligned}
365.2425 &= 365 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{25}{10000} \\
&= 365 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{400}
\end{aligned}
$$

だから・・・

5年に1回うるう年
25の倍数の年を2重うるう年(1年367日)にする
400の倍数の年は3重うるう年(1年368日)にする

これでもいいんだ！

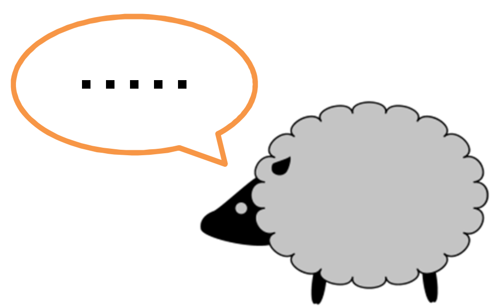
「少なくとも」ジョーク

　天文学者と物理学者と数学者の3人が、列車に乗って旅行中
窓の外に黒い羊を見つけた。

天文学者 「ごらん。この国の羊は黒いんだね。」

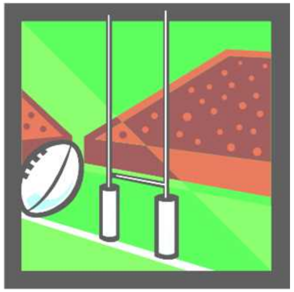
物理学者 「君が言いたいのは『この国には黒い羊もいる』だろう？」

数 学 者 「君たちが言いたいのは要するに
　『この国には、少なくとも一方の側が黒い羊が、少なくとも一頭はいる』
　ということだろう？」

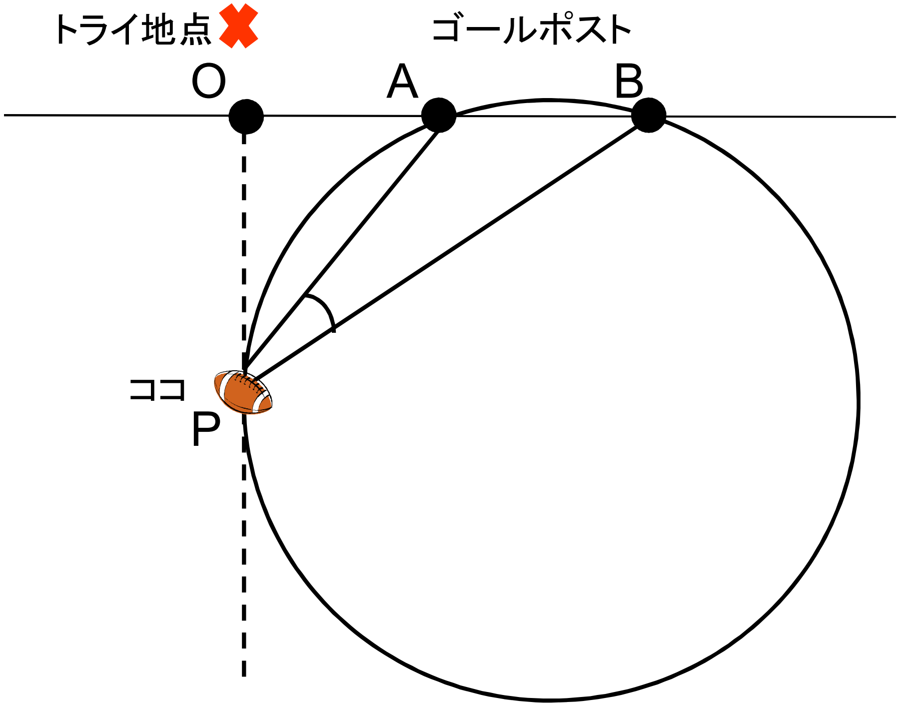


ラグビーにおける“円周角”作戦（解答）

トライの後のゴールキックは（点線上の）どこから蹴るのが有利か？



＜上から見た図＞



2本のゴールポストを通り，かつ点線と接する円を考える。接点から蹴るとき，ポストを結ぶ角度が一番大きくなり，有利である。

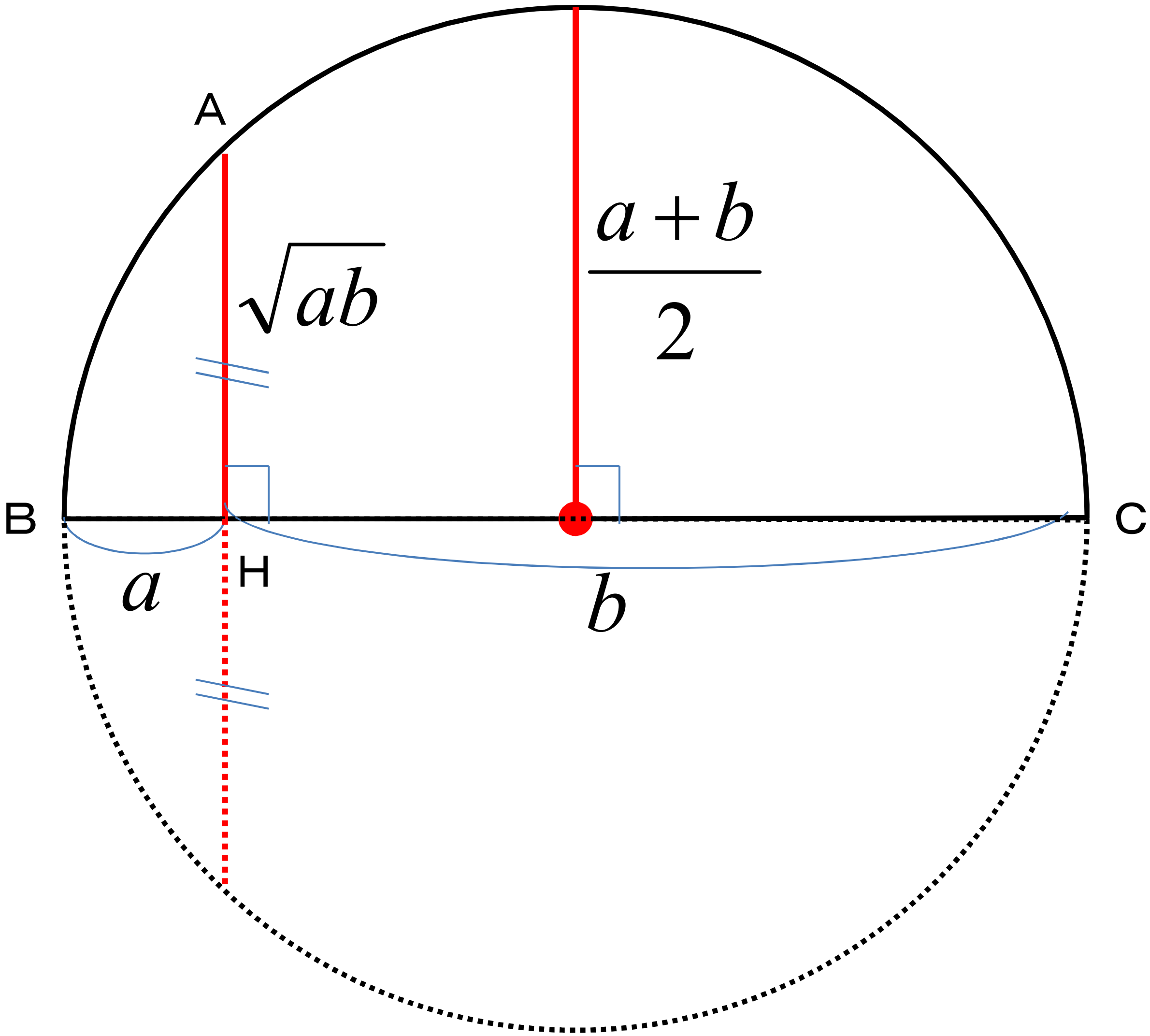
歩数で距離を測り、
方べきの定理で計算したらいい。

$$OP^2 = OA \cdot OB$$

$$OP = \sqrt{OA \cdot OB}$$

「わざわざ計算しなくても見たら分かる」？！

相加・相乗平均の図形的意味



直径$a+b$すなわち

半径$\frac{a+b}{2}$の円をかく。

方べきの定理より

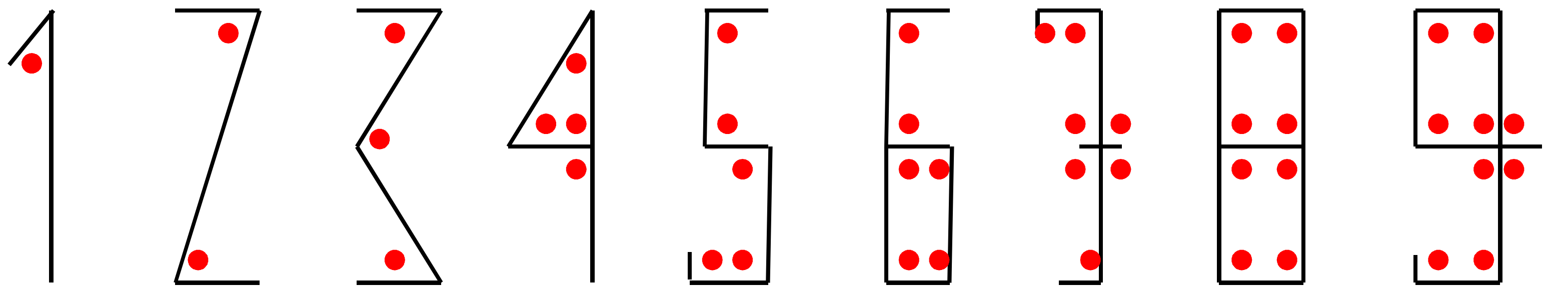
$AH \cdot AH = a \cdot b$

$\therefore AH = \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

１～９までの秘密と１１，１２の秘密

1～9までの数字は、その文字に含まれる角（かど）の数に合わせて作られたという説がある。



英語で

13以降は「teen」がつくのに11(eleven)と12(twelve)にはつかない。

これは昔の12進法の名残。
（過去の文明では12進法、20進法、60進法など、必要に応じた基数が選ばれていた）

合成数が2015個続く区間

自然数列1,2,3,･･･で素数が1個も出現せず合成数が2015個続く区間はあるか。

ある。

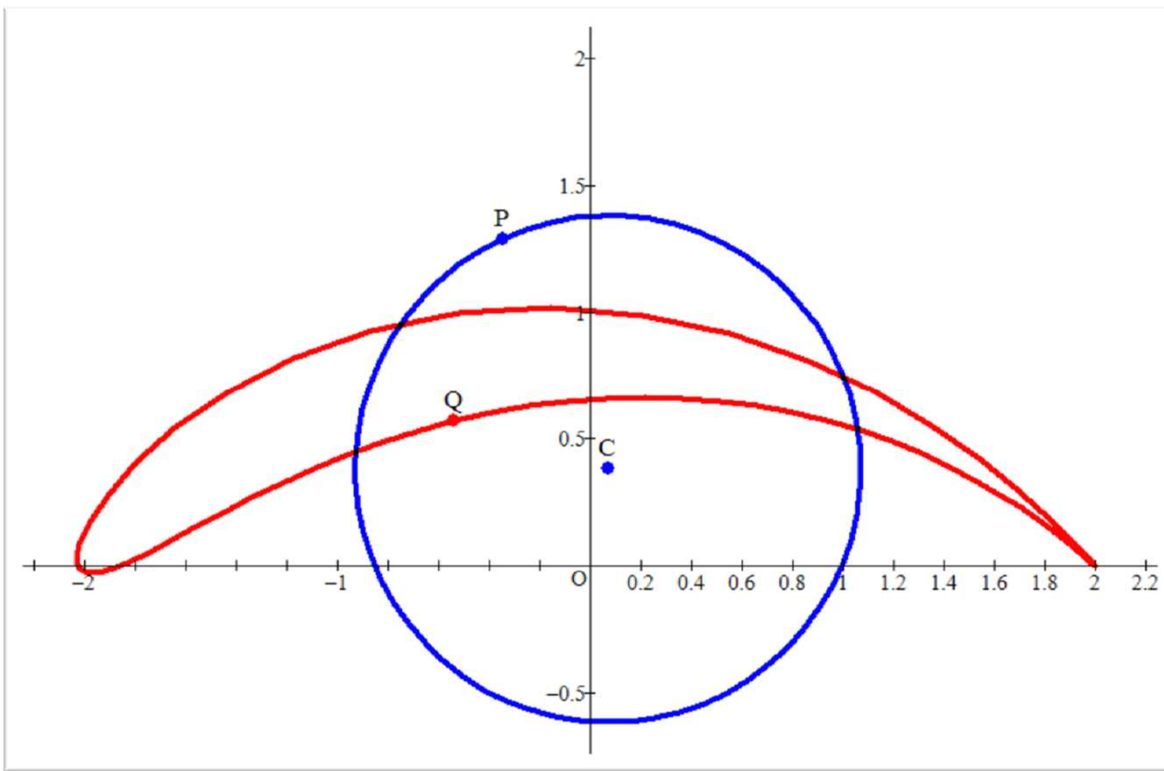
2016!+2,　2016!+3,　2016!+4,　2016!+5, ･･････

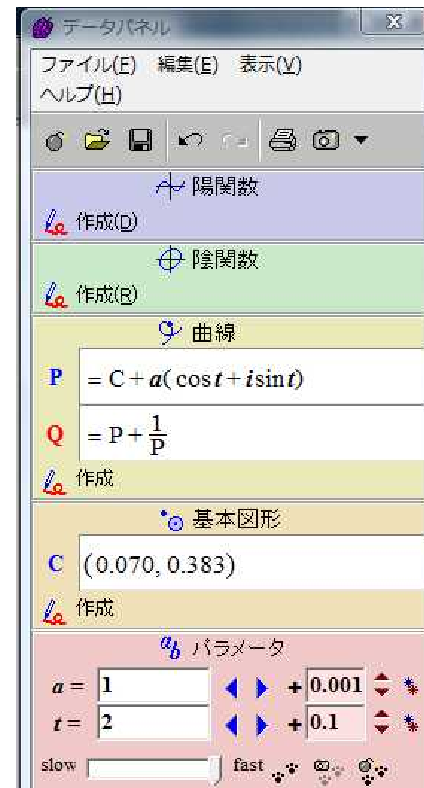
････････ , 2016!+2015,　2016!+2016

複素数平面と翼

＜ジューコフスキー翼＞

円周上の点 $P(z)$ に $z+\dfrac{1}{z}$ の計算を施すと航空機の翼の輪郭となる。





無理数$^{\text{無理数}}$を有理数にするのは無理?!

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$について

- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$が有理数の場合

  そのまま無理数$^{\text{無理数}}$が有理数といえる。

- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$が無理数の場合

  $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$を考える。

  $$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

  となり，やはり無理数$^{\text{無理数}}$が有理数といえる。

いずれにしても無理数$^{\text{無理数}}$が有理数となる数は存在する。

$$\sqrt{2}^{\log_2 100} = 10$$

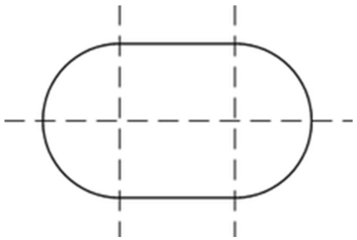
$$\left(\sqrt{2}^{\log_2 100} = \sqrt{2}^{2\log_2 10} = \left(\sqrt{2}^{2}\right)^{\log_2 10} = 2^{\log_2 10} = 10\right)$$

＜番外編＞　整数に非常に近い場合（ラマヌジャン定数）

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262,537,412,640,768,743.99999999999925$$

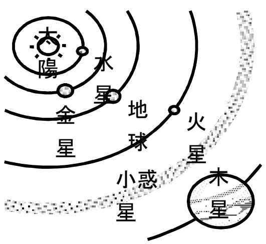
π はどこまで必要？

π＝3．14159265・・・・　2014年現在12.1兆桁まで計算が進んでいるπ。
実際に必要な桁数を調べてみると・・・。



指輪の製作工房　→　3 桁

陸上競技のトラック　→　5 桁



3億kmを旅した「はやぶさ」。
π＝3.14　だと15万kmの
軌道誤差が。
帰ってこられなかったかも・・。

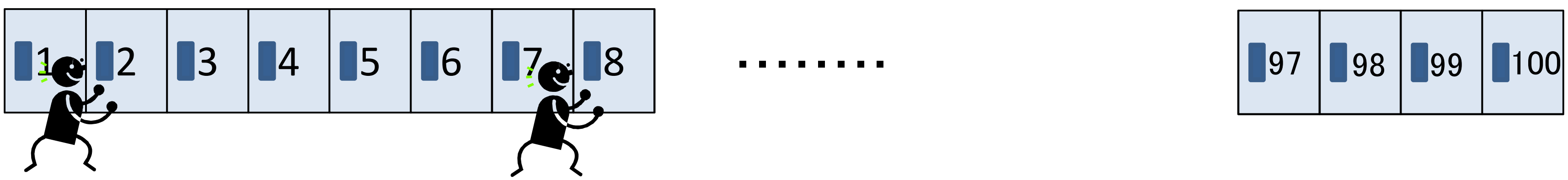
砲丸の工場　→　10 桁

小惑星探査　→　16 桁

ロッカーの扉問題

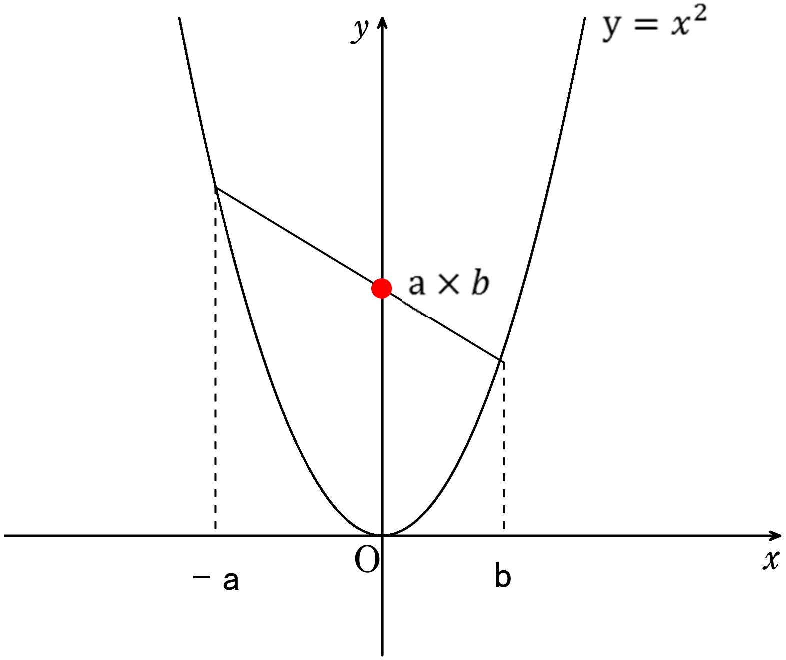
100人の生徒（出席番号1～100番）が、それぞれの出席番号のロッカーを持っている。
1番の子がすべてのロッカーを開けていった。
2番の子が偶数番号のロッカーを閉じていった。
3番の子が3の倍数のロッカーを、開いているものは閉じ、閉じているものは開けていった。
4番の子が4の倍数のロッカーを、開いているものは閉じ、閉じているものは開けていった。

同様に100番の子まで続けたとき、最後に開いているロッカーの番号は？



出席番号 n のロッカーは、n の約数の出席番号の生徒によって操作される。
1,4,9,16,25,36,49,64,81,100 の**約数は奇数個**だから、この番号のロッカーが開いていることになる。

放物線でかけ算を！



$A(-a, a^2)$, $B(b, b^2)$ を結ぶ直線は

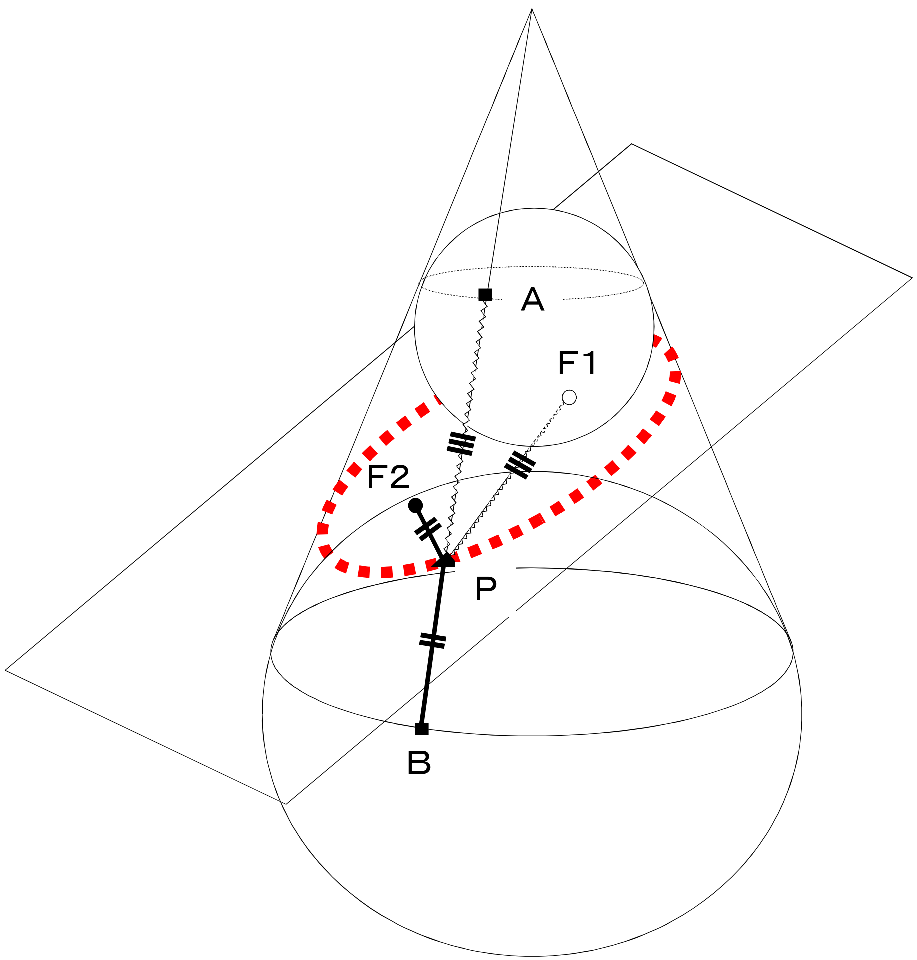
$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b + a}(x + a)$　より

$y = (b - a)(x + a) + a^2$

ここに　$x = 0$ を代入すると

$y = (b - a)a + a^2 = ab$　を得る。

円錐の切断面が楕円になることの証明



Ａ，Ｂ，Ｆ$_1$，Ｆ$_2$ は球面上の接点だから

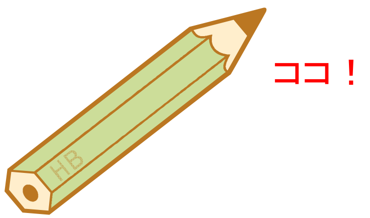
ＡＰ＝Ｆ$_1$Ｐ　，ＢＰ＝Ｆ$_2$Ｐ

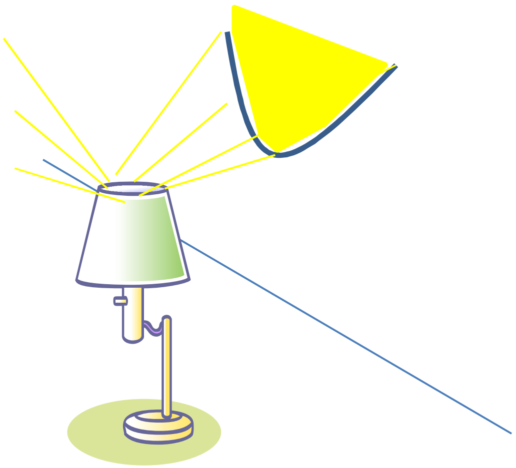
よって

Ｆ$_1$Ｐ＋Ｆ$_2$Ｐ＝ＡＰ＋ＢＰ＝一定

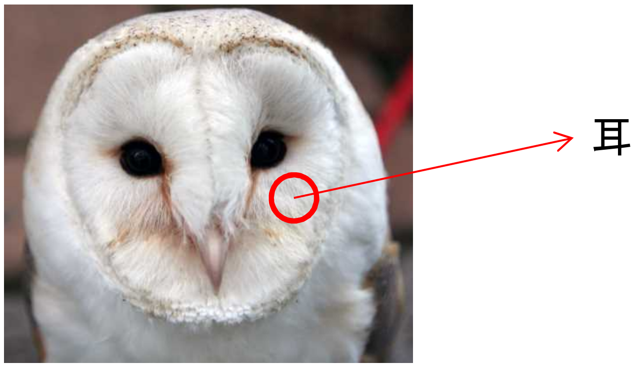
身近にある2次曲線

円錐を平面で切ったもの＝双曲線





顔や角がパラボラアンテナ状＝集音効果がある

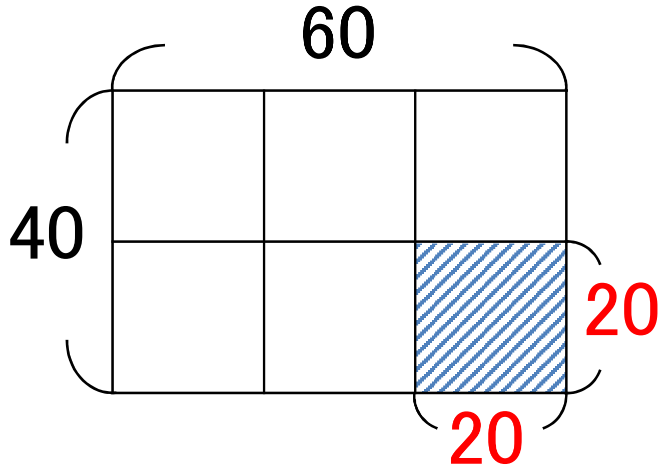


メンフクロウ

ヘラジカ

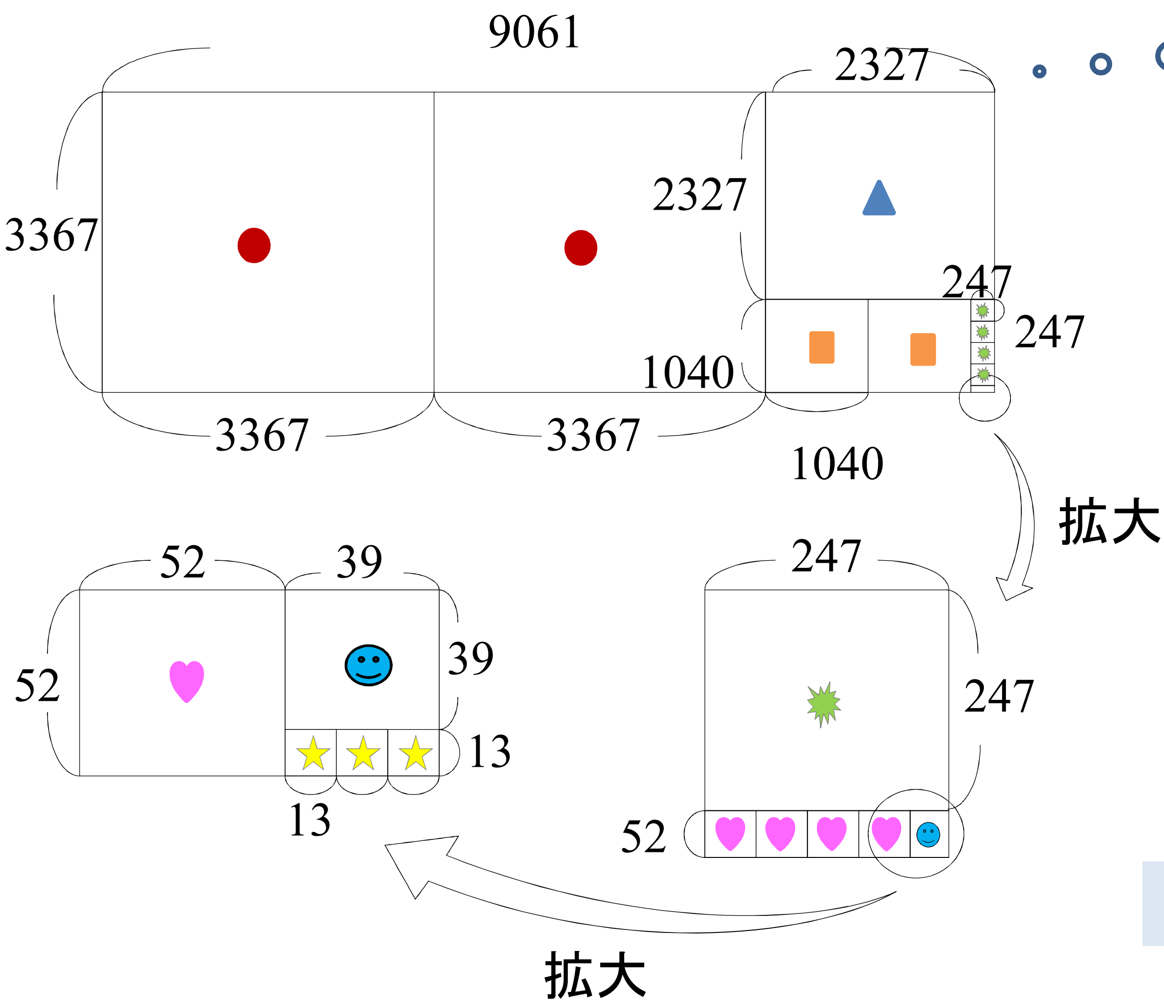
最大公約数は正方形探し

６０と４０の最大公約数



最大公約数正方形の探し方

長方形の短辺を一辺とする正方形で埋めると･･･正方形に行き着く。



式で書くと･･･

ユークリッドの互除法

- 9061=3367×2+2327
- 3367=2327×1+1040
- 2327=1040×2+247
- 1040=247×4+52
- 247=52×4+39
- 52=39×1+13
- 39=13×3

9061と3367の最大公約数は13

無理数の証明

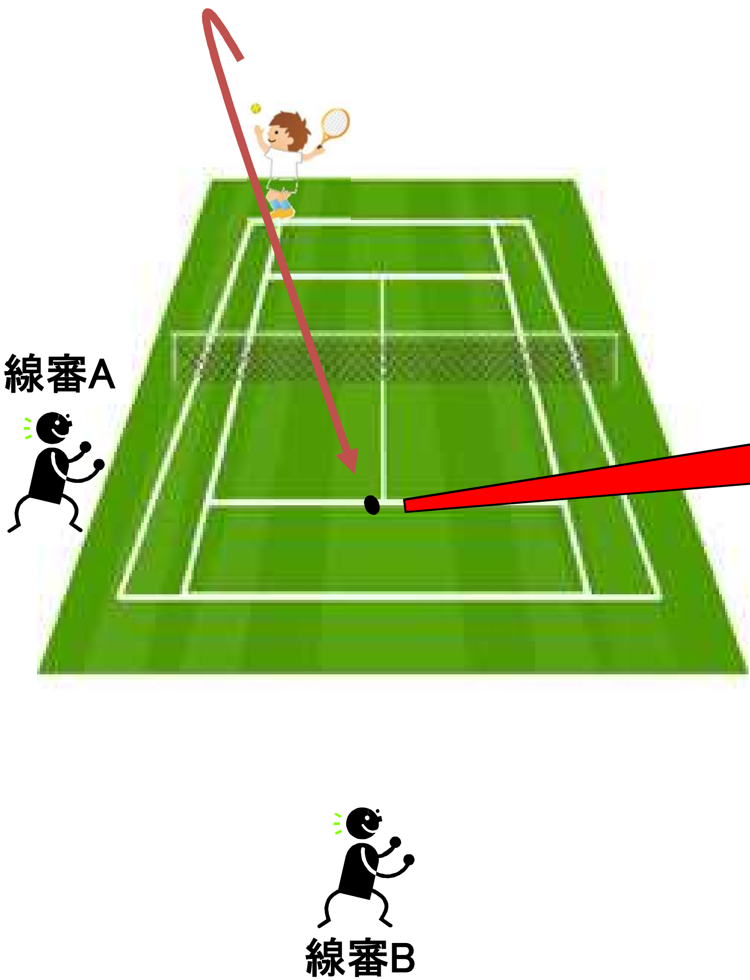
自然数a, b に対して,

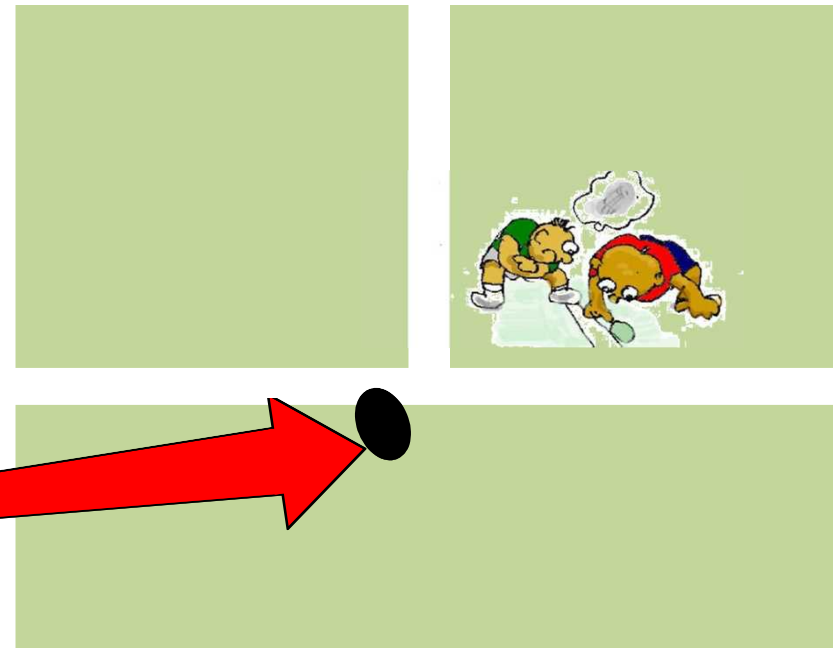
aaと$2bb$の素因数の個数は異なる。

（aaは偶数個、$2bb$は奇数個）

$$aa \neq 2bb \qquad\qquad \therefore \sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$$

テニスコート上の死角





ここに落ちると
実際にはフォルトのサーブでも
線審 A も 線審 B も “in”と判断してしまう･･。

1分席替え

①黒板に座席表を二つ描く(12人の場合)

A

B

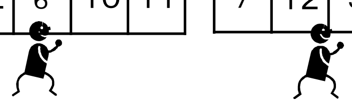
②二人の生徒にランダムに1～12を書いてもらう

A

1	8	5	9
3	2	7	4
12	6	10	11

B

11	6	4	9
2	10	5	1
7	12	3	8



③二人の生徒にジャンケンをしてもらう

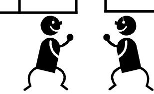
④勝った生徒の方から負けた生徒へ矢印を引く

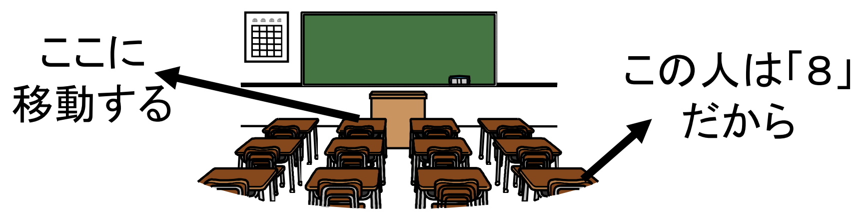
⑤自分が今座っている座席の番号をBで確認し、
その番号が書いてあるAの座席に移動する。

A ← B

1	8	5	9
3	2	7	4
12	6	10	11

11	6	4	9
2	10	5	1
7	12	3	8





e子（良い子）は同じ席?!

席替えで全員が前の席と違う席になる確率は$\dfrac{1}{e}=36.8\%$

$\Leftrightarrow$ 少なくとも一人が同じ席になる確率は$1-\dfrac{1}{e}=63.2\%$

$1,2,3,\cdots,n$を並べた順列のうち,どのi番目の数もiでないもの

(完全順列)の総数をa_nで表すと, $a_n=n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ が成り立つ。

$<$証明$>$ 1の移動先をiとすると

(1)iの移動先が1となる場合はa_{n-2}通り

(2)iの移動先が1以外となる場合はa_{n-1}通り

$\therefore a_2=1, a_3=2, a_n=(n-1)\left(a_{n-1}+a_{n-2}\right)\cdots$①

①の両辺を$n!$で割って

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{n-1}{n!}a_{n-1}+\frac{n-1}{n!}a_{n-2}\Leftrightarrow\frac{a_n}{n!}=\frac{n-1}{n\cdot(n-1)!}a_{n-1}+\frac{n-1}{n(n-1)\cdot(n-2)!}a_{n-2}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n!}$とおくと $b_2=\dfrac{1}{2}, b_3=\dfrac{1}{3},\ b_n=\dfrac{n-1}{n}b_{n-1}+\dfrac{1}{n}b_{n-2}$

$$\Leftrightarrow b_n-b_{n-1}=-\frac{1}{n}\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)=-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n-1}\right)\left(b_{n-2}-b_{n-3}\right)$$

$$=-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n-1}\right)\left(-\frac{1}{n-2}\right)\left(b_{n-3}-b_{n-4}\right)=(-1)^{n-3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots4}(b_3-b_2)$$

$$=(-1)^{n-3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{(-1)^n}{n!}$$

$b_n-b_{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{n!}$で $n=3,4,5,\cdots,n$として辺々加えると

$$b_n=b_2+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\therefore a_n=n!\cdot b_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

35人のクラスで席替えで全員が前の席と違う席になる確率は

$$\frac{a_{35}}{35!}=\frac{35!\displaystyle\sum_{k=2}^{35}\frac{(-1)^k}{k!}}{35!}=0.3678=36.8\%$$

nが十分大きいとき席替えで全員が前の席と違う席になる確率は

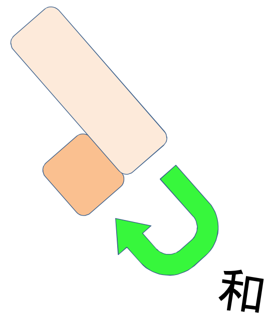
$$\frac{a_n}{n!}=\frac{n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}{n!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

プレゼント交換や、グループで脱いだスリッパを無作為にもう一度はくなどの時も同じことがいえる。

再び登場

ホッケーのスティックの定理

2年ぶり

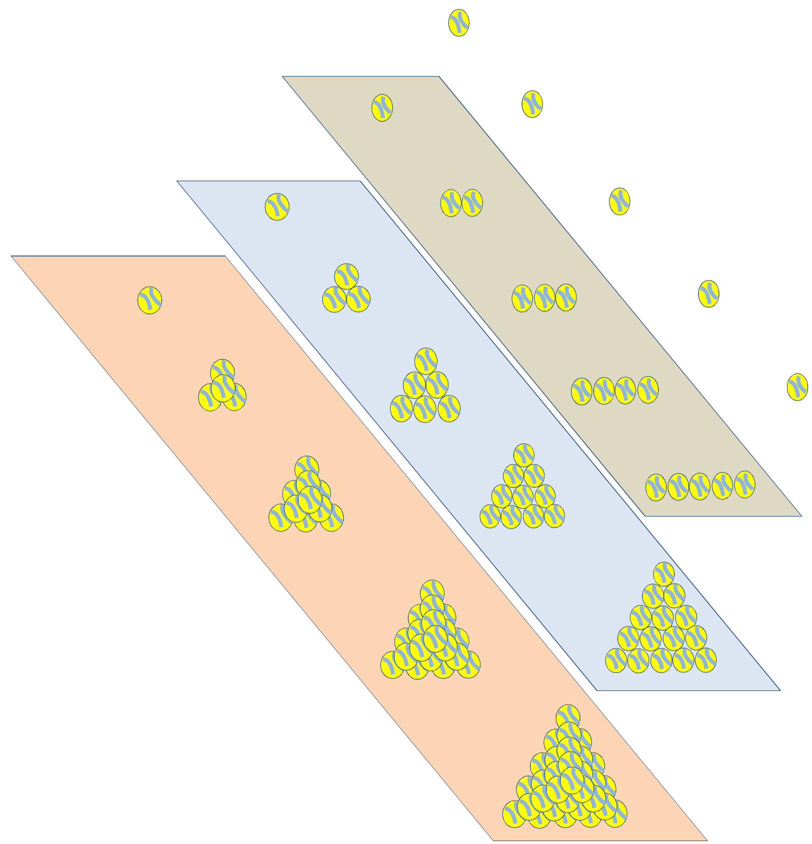


自然数

三角数

三角錐数

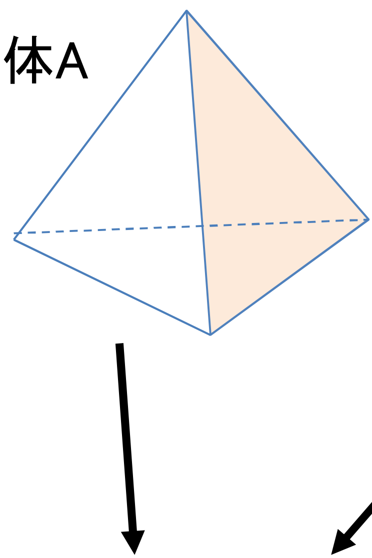
```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
```



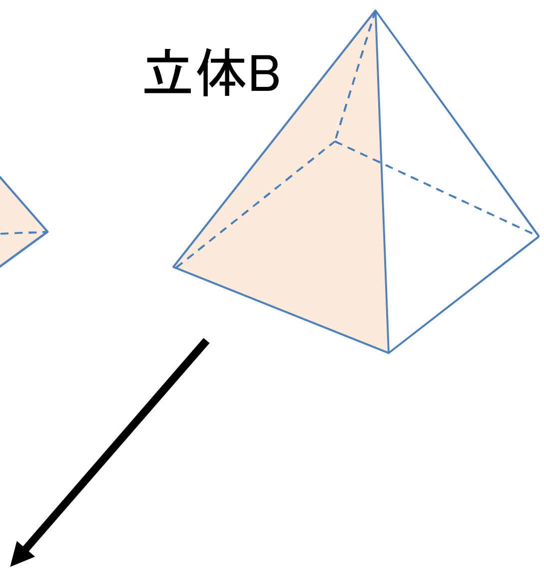
くっつけると何面体？

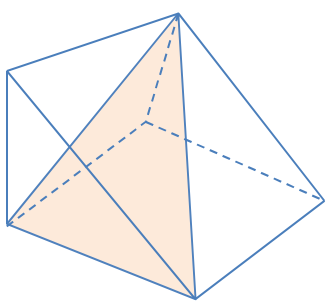
立体Bの底面以外は同じ大きさの正三角形によってできているものとします。
立体Aと立体Bを、くっつけると、新しくできた立体の面の数はいくつ？

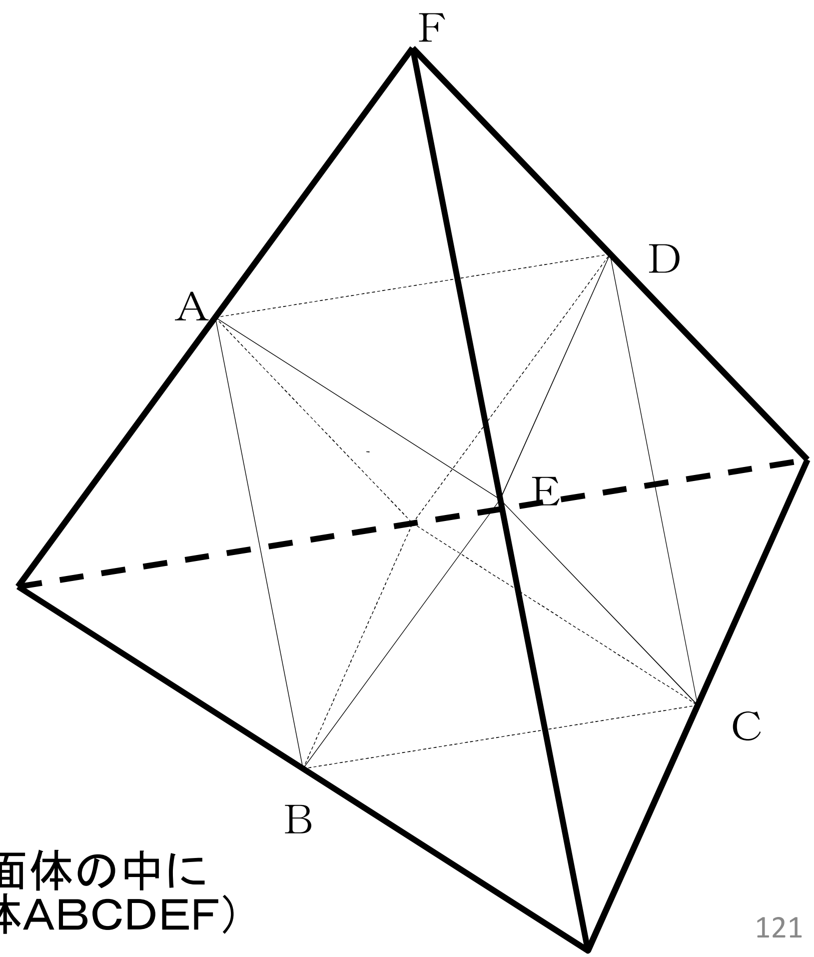
立体A



立体B







7面？　違います。

5面です！

1辺の長さが2倍の正四面体の中に
この立体はあります(立体ABCDEF)

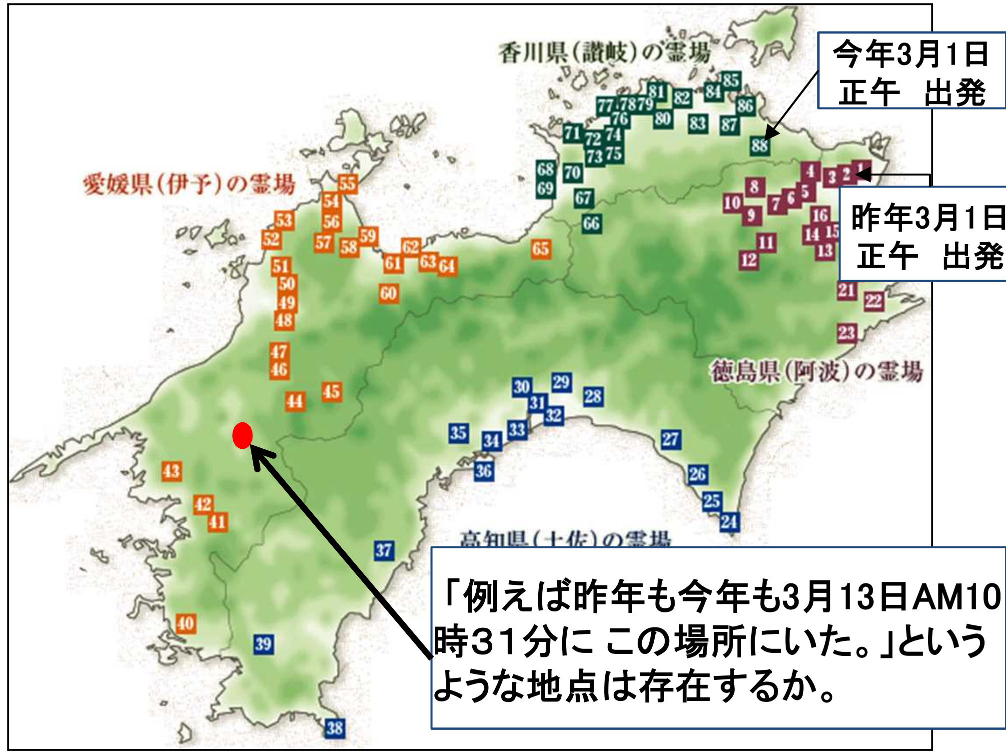
逆打ちと順打ち

四国88か所巡り。うるう年で申年（平成28年）は逆回りに巡礼する（逆打ち）とご利益が3倍といわれ、一段と人気が出ています。

問　題：昨年3月1日正午から4月1日正午にかけて順打ちで88か所を巡礼した人が、同じ道・宿舎・接待所を今年は逆打ちで、3月1日正午から4月1日正午にかけて巡礼しました。

このとき、「1年前の自分と全く同じ日付・時刻に、1年前と全く同じ位置にいる」ということはあり得るでしょうか。

各地点での滞在時間や、歩くスピードは昨年と違うこともあります。



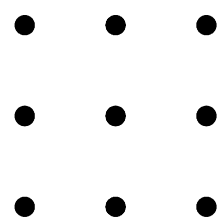
四国八十八ヶ所霊場会ホームページより

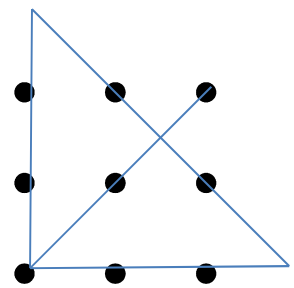
答　え：あ　る

頭の中で、昨年の3月1日正午と今年の3月1日正午，同時にその人を出発させる。
2人(過去と現在の自分)が出会った時間場所がそれである。

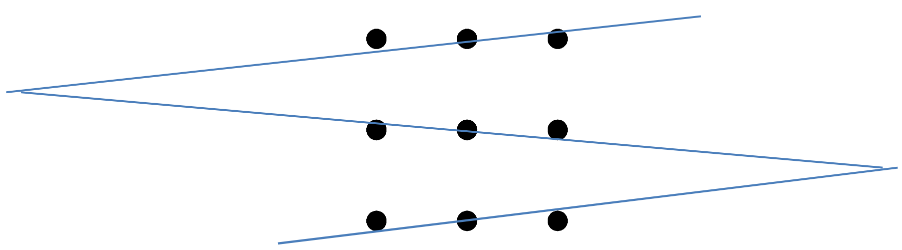
インチキ＝頭の柔らかさ?!

9つの点すべてを4本の直線で一筆書きできるか？
3本ではどうか？　1本ではどうか？

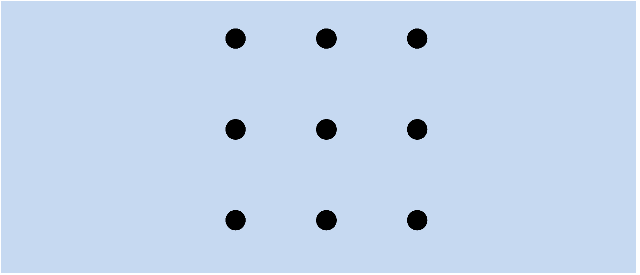




点をうまくかすめると3本・・・。



太い線だと1本・・・。



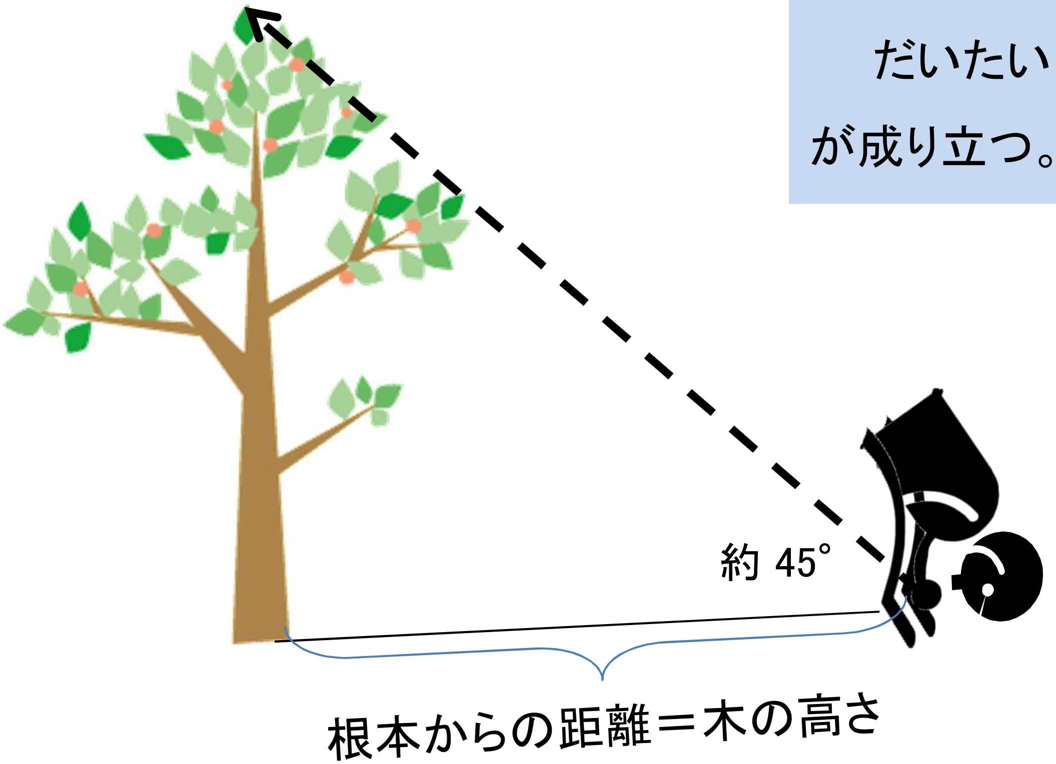
怒らないで～

手っ取り早い測量方法

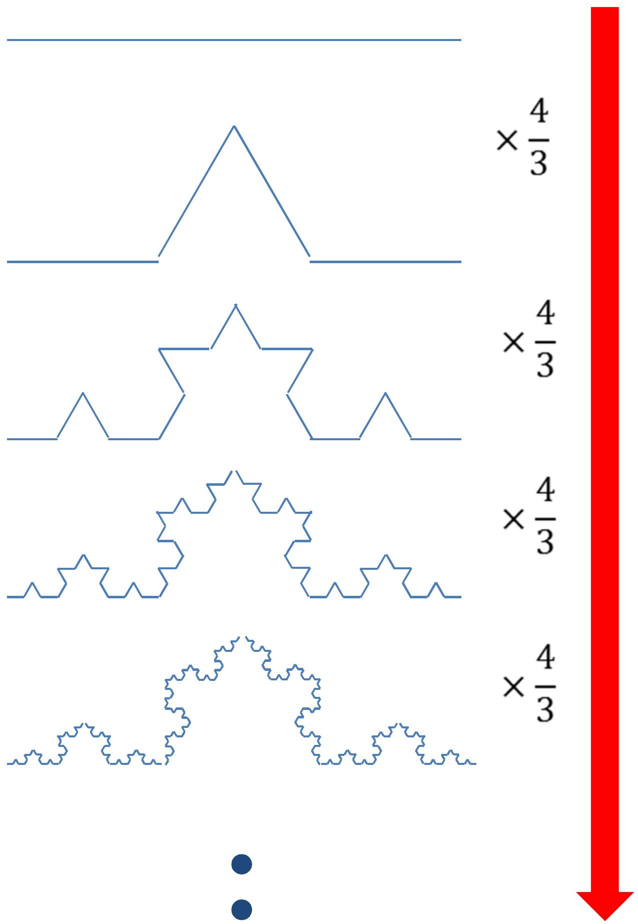
“股のぞき“で、木の先端が見える位置に立つと、

だいたい　木の高さ＝根本からの距離

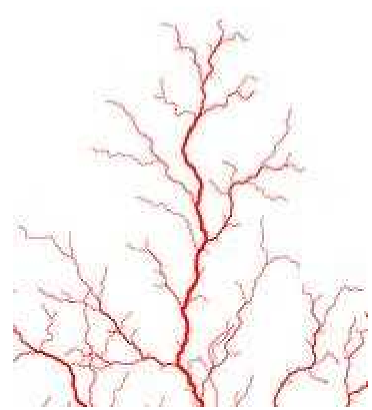
が成り立つ。



コッホ曲線というフラクタル



体内の血管の枝分かれもフラクタル



人間の血管の長さ合計は

10万km

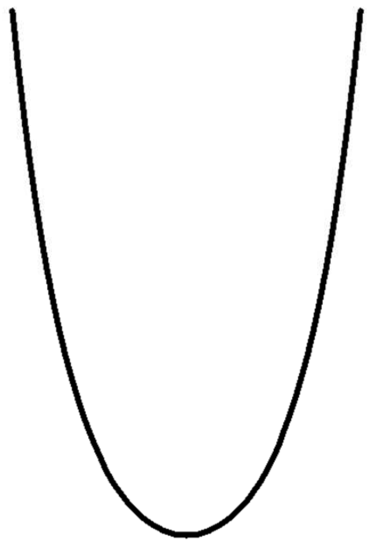
なんと地球2周半！！

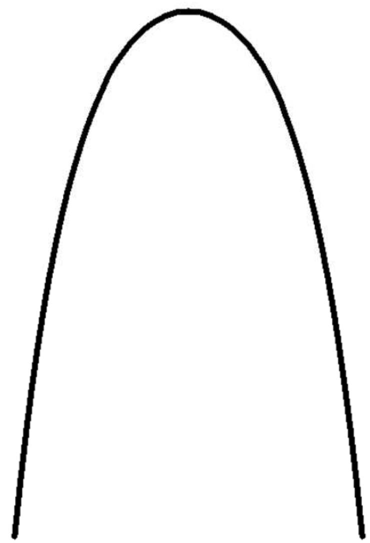
・
・
・
・

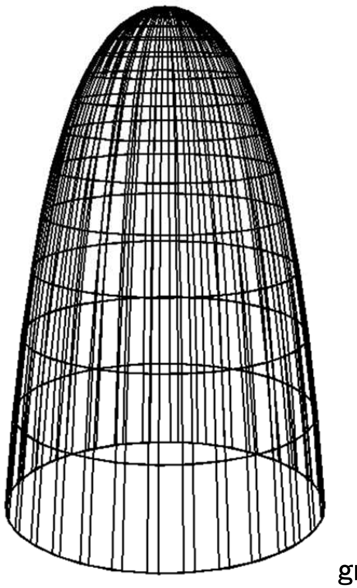
無限大の長さの曲線に

カテナリーの反対

～自立するアーチとしてもっとも安定した形～







grapes3D

鎖をつり下げると、その内力がすべて曲線に沿った張力になるような形に落ち着く。

上下逆さまにすると張力が圧縮力に変わり･･･、

カテナリーは、すべての圧縮力が曲線に沿った方向に作用する唯一のアーチ型になる。

ガウディもこの性質を建築設計に使った！

7，13，17などの整除性　その1

与えられた数の最下位桁の数字を除去し、残った数から除去した<u>2倍</u>の数字を引く。その結果が7で割り切れるとき、そしてそのときの限り元の数は7で割りきれる。判定を下すには結果がまだ大きすぎるときには、この操作を何度でも繰り返すことができる。

176029
↓
17602−9×2＝17584
↓
1758−4×2＝1750
↓
175−0×2＝175
↓
17−5×2＝7
↓
7で割り切れる

与えられた数の最下位桁の数字を除去し、残った数から除去した<u>9倍</u>の数字を引く。その結果が13で割り切れるとき、そしてそのときの限り元の数は13で割りきれる。

87165
↓
8716−5×9＝8671
↓
867−1×9＝858
↓
85−8×9＝13
↓
13で割り切れる

与えられた数の最下位桁の数字を除去し、残った数から除去した<u>5倍</u>の数字を引く。その結果が17で割り切れるとき、そしてそのときの限り元の数は17で割りきれる。

76483
↓
7648−3×5＝7633
↓
763−3×5＝748
↓
74−8×5＝34
↓
17で割り切れる

7，13，17などの整除性　その2

19以上の素数の整除性判定に用いる乗数は次の通り。

整除性を判定したい素数	7	11	13	17	19	23	29	31	37	43	43	47
乗　数	2	1	9	5	17	16	26	3	11	4	30	14

①9を取り除き
②残った数から18を引く
⇒189引くことになる

①4を取り除き
②残った数から 8を引く
⇒84引くことになる

①0を取り除き
②残った数から 0を引く
⇒ 0引くことになる

①5を取り除き
②残った数から10を引く⇒105引くことになる

176029
↓ ↑
17584
↓ ↑
1750
↓ ↑
175
↓ ↑
★**7**

17584×10＋189
　＝176029も7の倍数

1750×10＋84
　＝17584も7の倍数

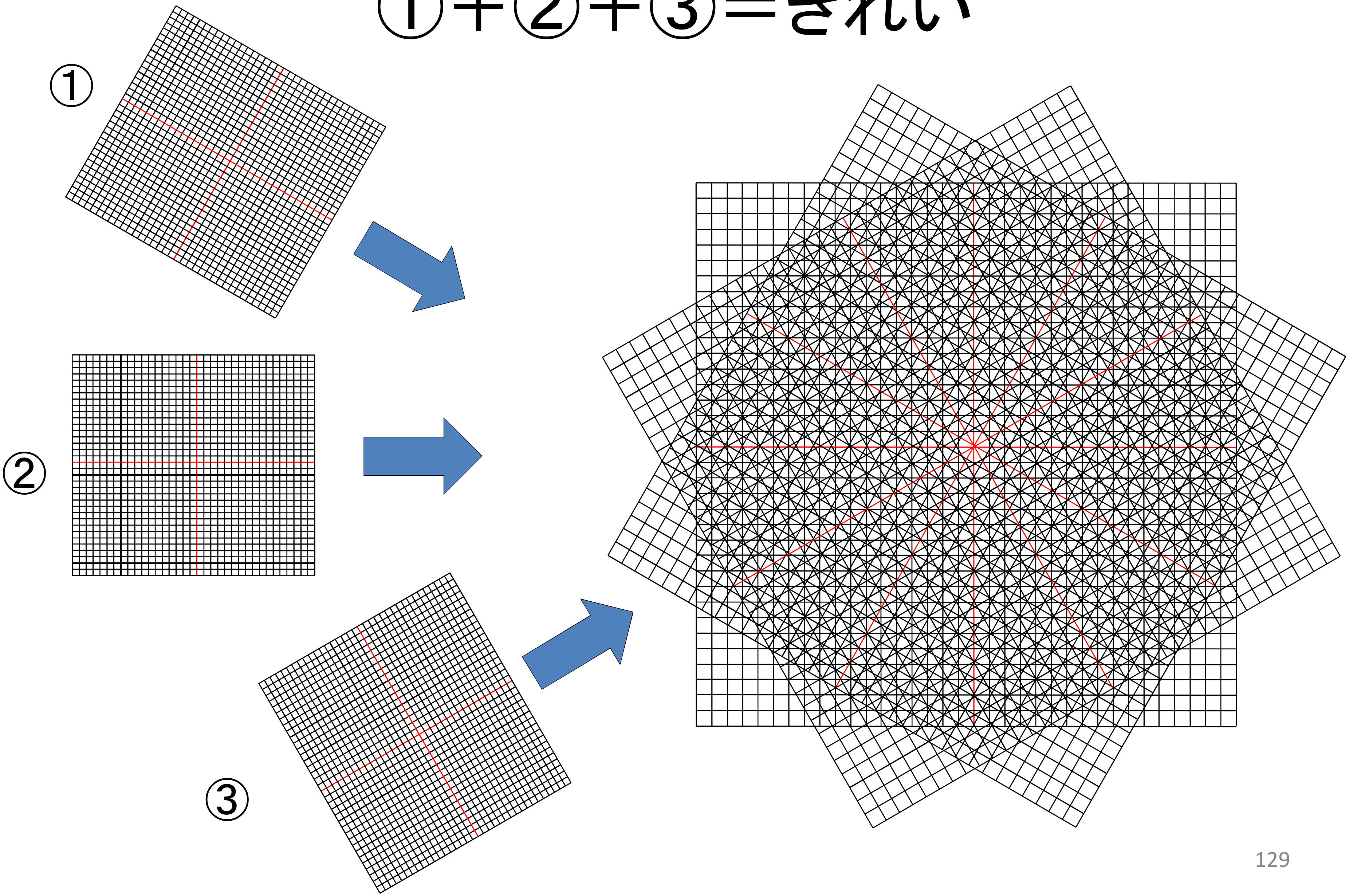
175×10
　＝1750も7の倍数

★×10＋105
　＝175も7の倍数
★が7の倍数なら

最下位桁	引かれる数
1	21
2	42
3	63
4	84
5	105
6	126
7	147
8	168
9	189

2倍して引くと、引かれる数はすべて7の倍数になっているのがミソ！

①＋②＋③＝きれい



変だけど･･･和は正しい･･･さいころ

2つのさいころを投げて目の和がmとなる場合の数は
$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ を展開した式の
x^mの係数に等しい。（ネタ帳Ⅱ）

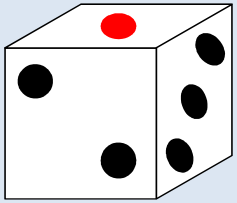
いま、

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$
$$=\{x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\}^2$$
$$=x(x+1)(x^2+x+1)+x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$$
$$=(x+2x^2+2x^3+x^4)\times(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8)$$

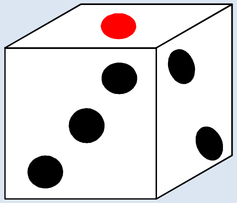
だから、
　１，２，２，３，３，４ の目のさいころ と
　１，３，４，５，６，８ の目のさいころ
2個を振っても、出る目の和がmとなる場合の数は
通常のさいころを2個振った時と同じになる。

＜豆知識１＞
BC600　のさいころが中国で
BC2000 のさいころがエジプトで
発見されている。

＜豆知識２＞
2種類のさいころがある。



麻雀以外の
すべてのゲーム



麻雀はこっち

こんな紙が落ちていました

破れたところに書いてあった数字を考えてください。

この紙の上には

1という数字が　個

2という数字が　個

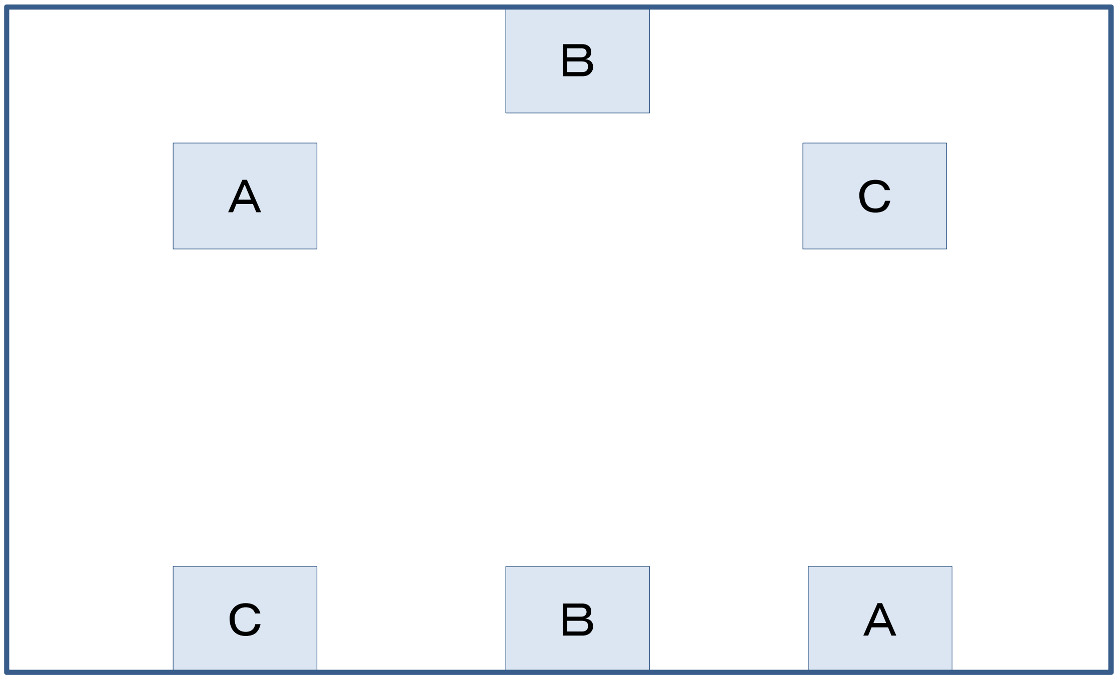
3という数字が　個

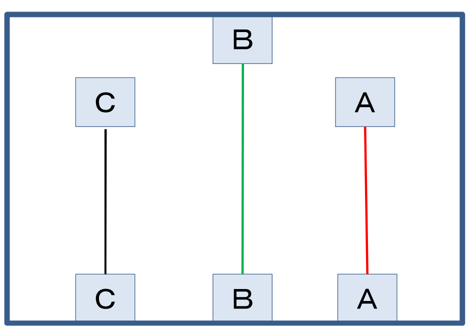
1から3まで以外の数字が　個

書いてある。

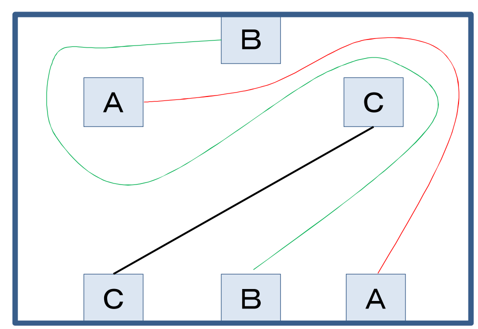
（答）上から
4131

ひもを交差せずに同じ文字を結ぼう



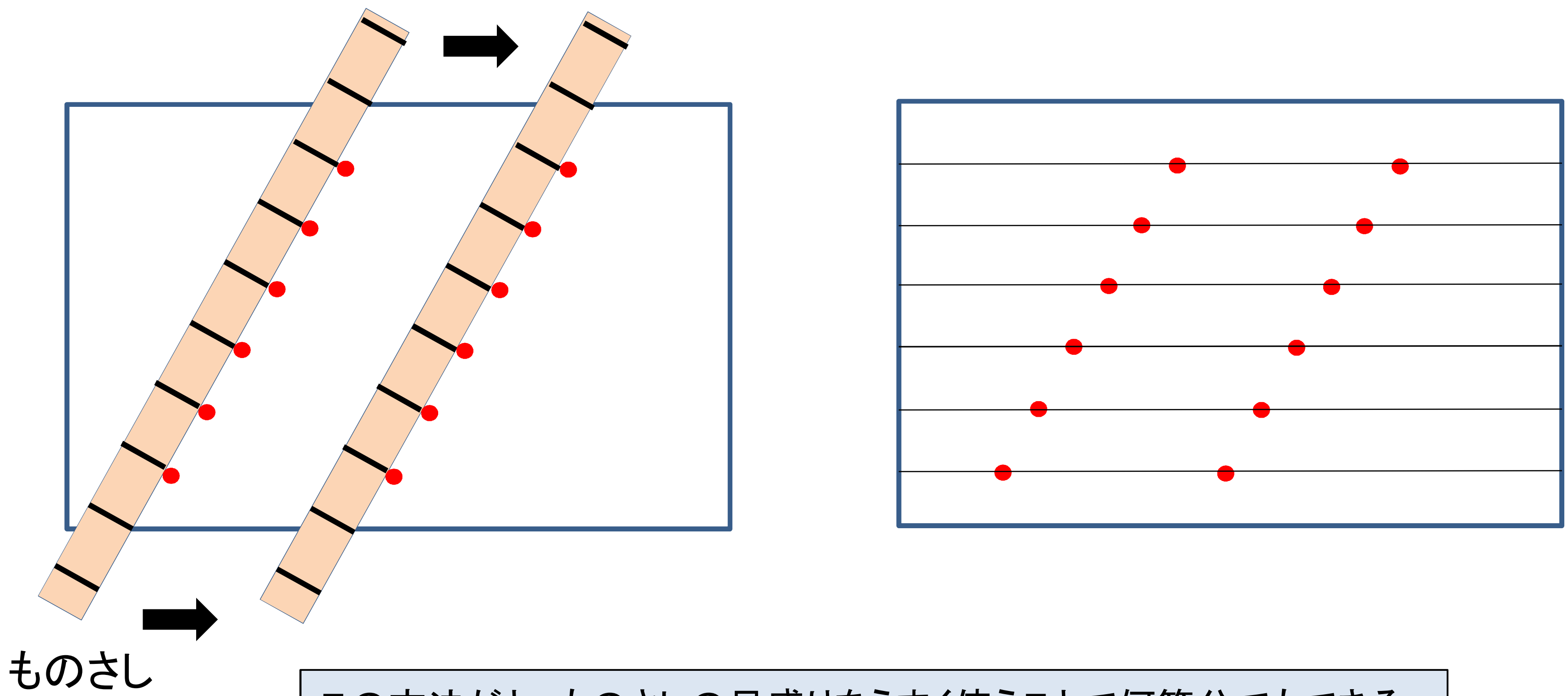


ゴムひもで結んで
移動させるイメージ



履歴書の線引き

空欄に7行作るためには、高さを測って7で割るより・・・



この方法だと、ものさしの目盛りをうまく使うことで何等分でもできる。

15と16で作る平方数

$$16 = 4^2$$
$$1156 = 34^2$$
$$111556 = 334^2$$
$$11115556 = 3334^2$$

16のなかに15を
入れていくと・・・
平方数ができる！

$$333\cdots34^2 = (333\cdots3+1)^2 = \left\{\frac{1}{3}(999\cdots9+3)\right\}^2 \quad = \left\{\frac{1}{3}(10^n-1+3)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{9}(10^n+2)^2 \quad = \frac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot10^n+4)$$

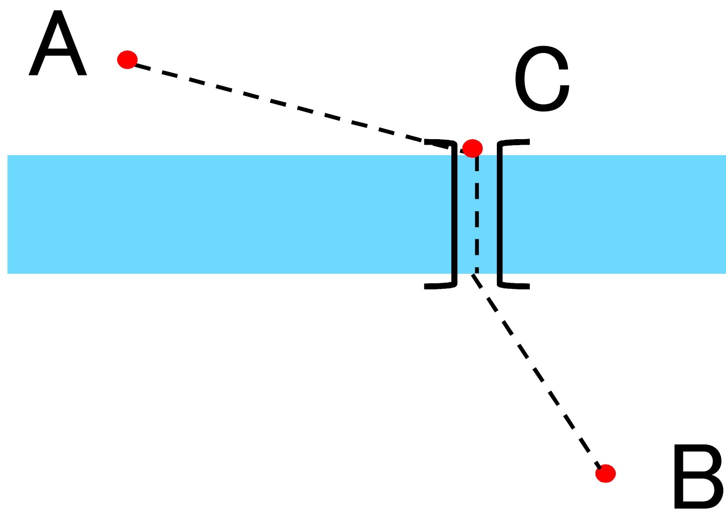
$$= \frac{1}{9}\{999\cdots9+1+4(999\cdots9+1)+4\}$$

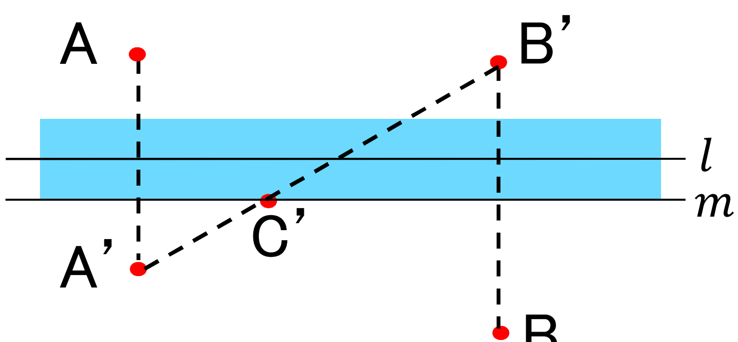
$$= 111\cdots1+444\cdots4+1 \quad = 111\cdots1555\cdots6$$

は n個

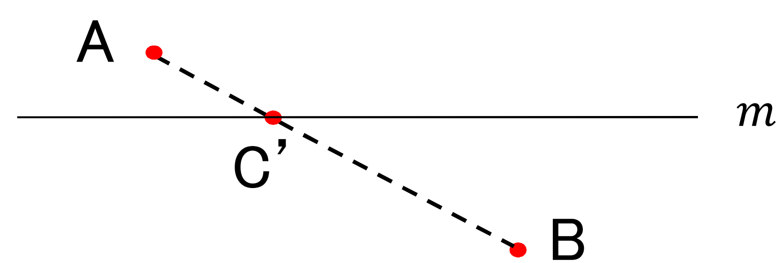
は 2n個

どこに橋を架けると最短距離？





l に関してAと対称な点をA’
m に関してBと対称な点をB’とすると、
線分A’B’とmの交点C’に橋を架けるとよい。



l を谷折り、m を山折りにすると川が消えるから、
線分ABと、mの交点C’に橋を架けるとよい。

カッコつけすぎ！！

$f(x) = x^2 + 12x + 30$ のとき

$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0$ を解け。

$$f(x) = (x+6)^2 - 6$$
$$f\left(f(x)\right) = \{(x+6)^2 - 6 + 6\}^2 - 6$$
$$= (x+6)^4 - 6$$
$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = \{(x+6)^4 - 6 + 6\}^2 - 6$$
$$= (x+6)^8 - 6$$ より

$$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = (x+6)^{32} - 6$$

よって
$$(x+6)^{32} - 6 = 0$$
$$x + 6 = \sqrt[32]{6}$$
$$\therefore \quad x = \sqrt[32]{6} - 6$$

856万ドルしたマイナス記号「−」

1962年7月28日　宇宙探査機マリナー1号

打ち上げ293秒後に大西洋に墜落

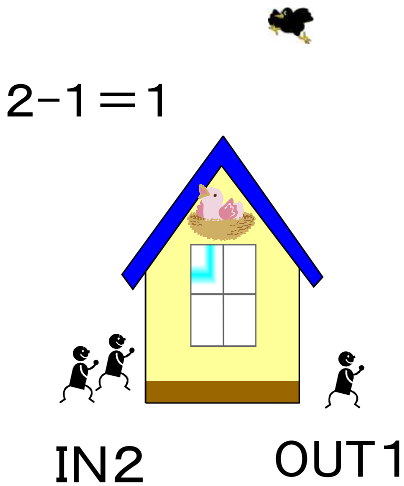
コンピューターの何百メートルに及ぶ指示の中で

たった一つ

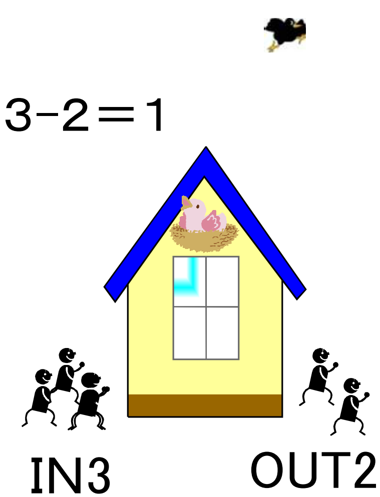
小さなマイナス記号（オーバーライン）が

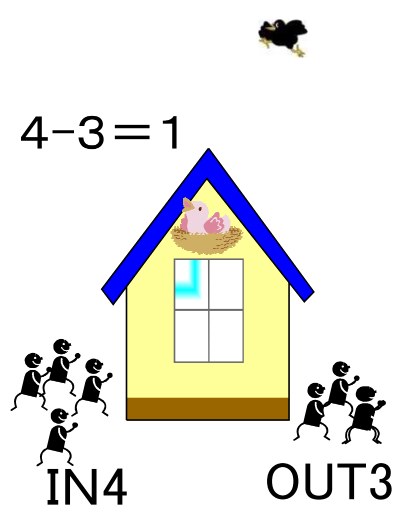
・・・・・抜けていた。

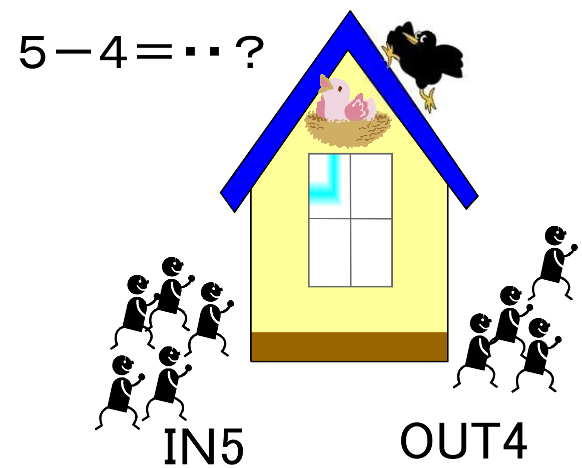
カラスの引き算能力



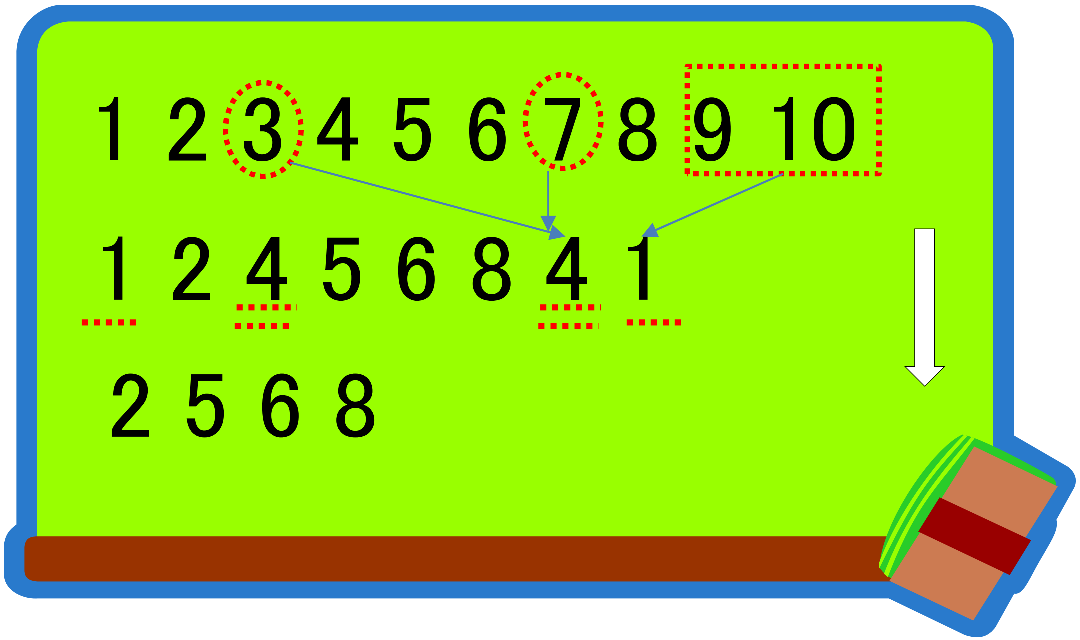
　家に住みついているカラスを捕まえたいのだが、人間が家の中にいるときは警戒して家に近づかない。
　そこで何人かが家へ入り、1人を残して出て家の中に誰もいないように見せかけた。
　するとカラスは，2ー1，3ー2，4ー3までは答えが1であること(中に1人いること)を計算し？！　近づこうとしなかった。　・・・・・という実験結果が存在する。







いつか解けそうな問題



1,2,3,・・・,10 という数が黒板に書いてある。

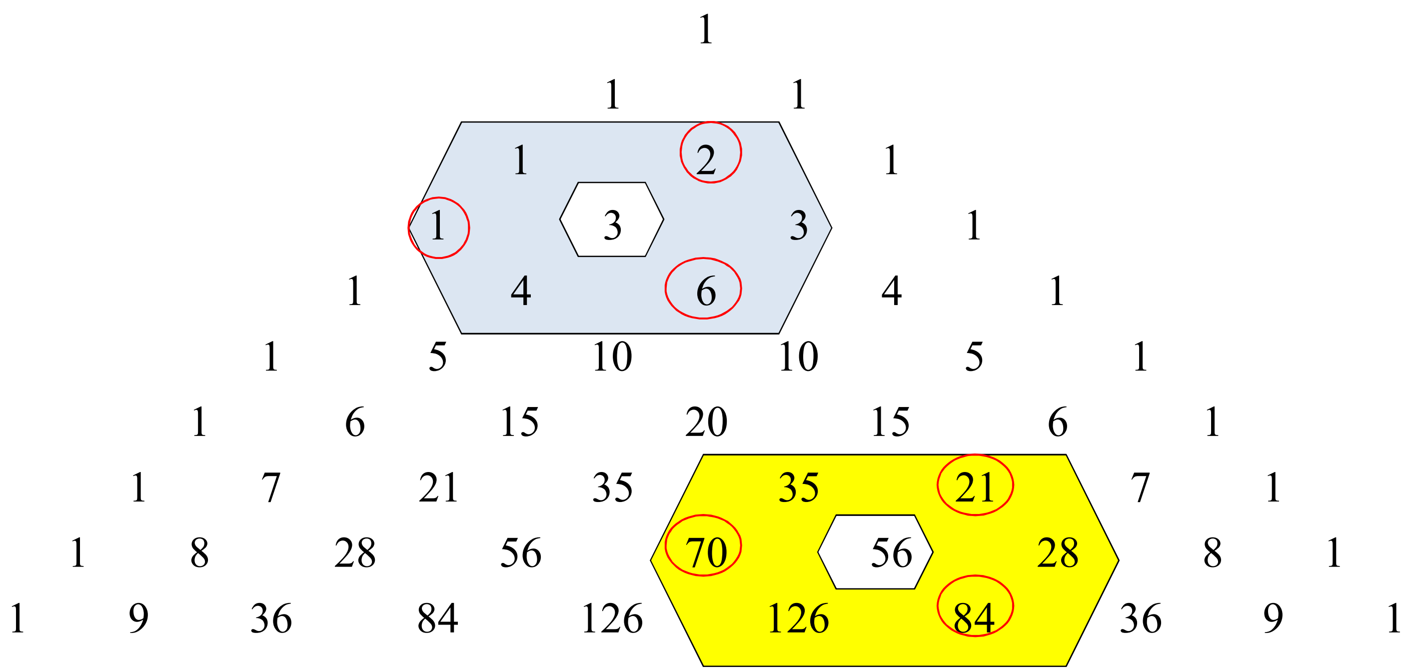
好きな数 a, bを消して、代わりに $a-b$ を書く。

これを何回か繰り返して1つだけ残った数を0にすることは可能か？

１＋2＋3＋・・・＋10＝55
a, bを消して、代わりに $a-b$ を書くと、総和の式の$a+b$ が $a-b$ に、つまり $2b$ (偶数)だけ減る。
55からいくら偶数を除いても、0にはならない。

答え：不可能

パスカルの三角形の中の六角形



パスカルの3角形の中の、1以外の数字を囲む6つの数字の積は、常に平方数。

3つの の積 ＝ それ以外の3つの数字の積 となる。

3x+1のおそろしさ

その数が偶数ならば、2で割る。
その数が奇数ならば、3倍して1を足す。

＜例＞

- 5→16→8→4→2→1
- 11 →34 →17 →52 →26 →13 →40 →20 →10 →5 →16 →8 →4 →2 →1

どんな数から始めても最後には　・・・ → 4→2→1　となりそうだが証明はされていない。
これは未解決問題。『数学はまだこの問題を解く用意ができていない』らしい。
現在 20×2^{58} までの数は検証済みらしい。

ちなみに27から始めてみると

- 111回の計算を繰り返したのちやっと1にたどり着く。
- それまでには 9232 という数まで登場する。

ので、ちょっとした時間つぶしや、根気強さを養うには効果的かも。

どちらが大きい？

第1ラウンド　333333×444444　と　222222×666667

第2ラウンド　$\dfrac{2015}{2016}$　と　$\dfrac{2016}{2017}$

第3ラウンド　$9^{9^{9^{9^{\cdots}}}}$　と　$9!!!\cdots!$

（100個の指数）　（100個の階乗）

～試合結果～

第1ラウンド

$$333333 \times 444444 = 3 \times 4 \times 111111^2$$

$$222222 \times 666667 = 222222 \times (666666 + 1)$$
$$= 2 \times 6 \times 111111^2 + 222222$$

222222 点差で　222222×666667 の勝ち

第2ラウンド

$$\frac{2015}{2016} = 1 - \frac{1}{2016}$$

$$\frac{2016}{2017} = 1 - \frac{1}{2017}$$

$\frac{2016}{2017}$の勝ち

$9^{9^{9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$　と　$9!!!\cdots!$　どちらが大きい？

（100個の指数）　　　　（100個の階乗）

$a_0 = b_0 = 9$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$, $b_{n+1} = b_n!$ として a_{100} と b_{100} を比べる。

$n > 0$ のとき　$a_n > 2b_n \log_9 b_n$ が成り立つ。

＜証　明＞

・$n = 1$のとき

$$a_1 = 9^9 > 8^9 = 2^{27} = 2^7 \cdot (2^{10})^2 > 128000000 (\because 2^{10} = 1024 > 1000)$$

$$2b_1 \log_9 b_1 = 2(9! \times \log_9 9!) < 2(9! \times 9) < 800\text{万} (\because 9! < 9^9 \text{ , } 9! = 362880)$$

・$n = k$のとき成り立つと仮定すると　$a_k > 2b_k \log_9 b_k \cdots$①

$n = k + 1$のとき

$$\text{①の左辺} = a_{k+1} = 9^{a_k} > 9^{2b_k \log_9 b_k} = \left(b_k{}^{b_k}\right)^2 > (b_k!)^2$$

これが　①の右辺$= 2b_{k+1} \log_9 b_{k+1} = 2(b_k!) \log_9 (b_k!)$　より大きいことを示す。（★）

$x > 2$のとき　$9^x > x^2 \Leftrightarrow x > 2\log_9 x$　が成り立つから

$$b_k! > 2\log_9 (b_k!) \Rightarrow (b_k!)^2 > 2(b_k!) \log_9 (b_k!)$$　　（★）が示された。

～試合結果～　　***第3ラウンド***　　$9^{9^{9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$　　の勝ち

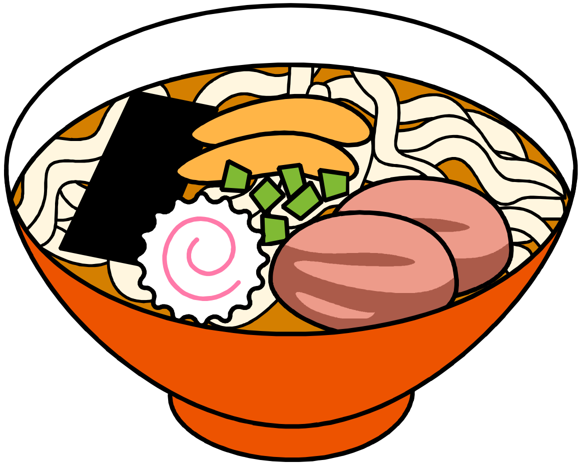
徳島ラーメンに欠かせない？　リトルの公式

待ち時間（分）＝行列の人数÷1分間の到着人数

〈例〉　行列に並んだ時、自分の前に30人いたとする。
その後1分間で自分の後ろに2人並んだ。

→　　３０÷２　＝　待ち時間15分

ということは店側からすると・・・・、
30席の店だったら滞在時間は15分ともいえる。



和の和の和の和の･･･和はいくつ？

100！の各桁の数の和の，その和の各桁の数の和の，その和の各桁の数の和の，
･･････････････････････････････ 和はいくつになるでしょう？

つまり

100！の各桁の和 ⇒ x
x の各桁の和 ⇒ y
y の各桁の和 ⇒ z
⋮
最後には ⇒ ？

こたえ

100！は9の倍数だから，各桁の和 x も9の倍数。
x　は9の倍数だから，各桁の和 y も9の倍数。
y　は9の倍数だから，各桁の和 z も9の倍数。
･･･　答えは　9

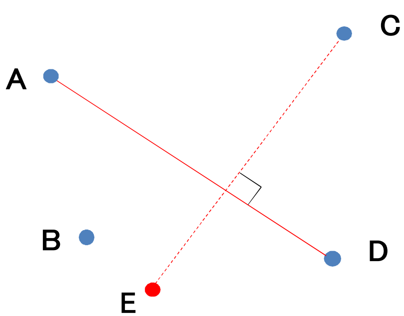
復　元

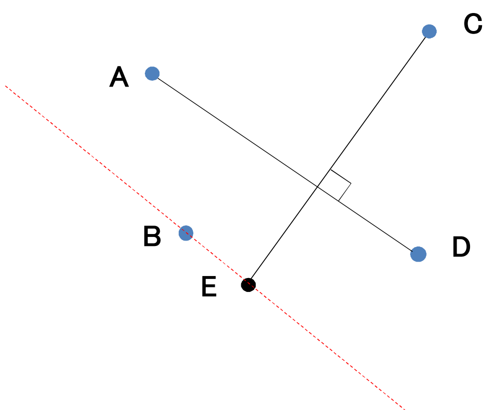
与えられた3点を通る円の作図はよく知られています。
では，4点A～Dを通る正方形を描いてください。

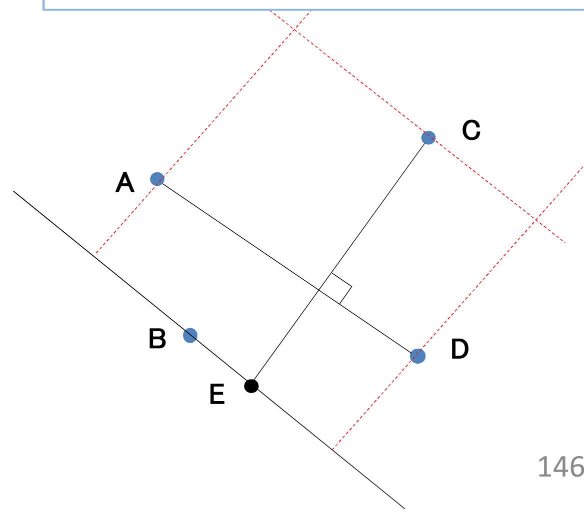
ADに垂直で，ADと同じ長さの線分CEをかく
。

BとEを結ぶ。

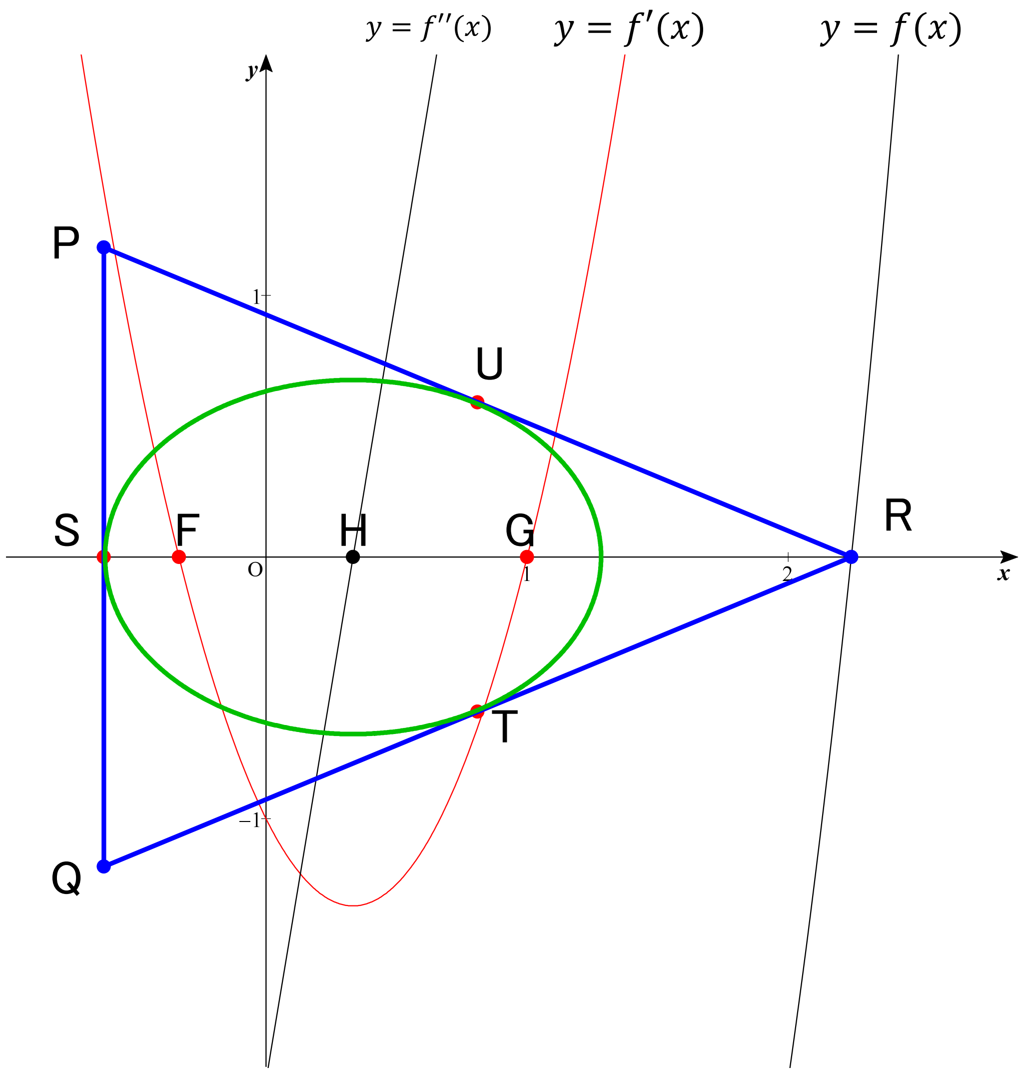
Aを通りBEに垂直な直線
Dを通りBEに垂直な直線
CDを通りBEに平行な直線　を引く。







もっとも驚嘆すべき数学の定理



～マーデンの定理～

$f(x)$: 3次関数

P, Q, R: 複素数平面上での$f(x)=0$の解

とすると、次の3つが成り立つ。

$f'(x)=0$の解F, GはΔPQR内にある。

さらにPQ, QR, RPの中点をS, T, Uとし、

3点S, T, Uに接する楕円を描くと、

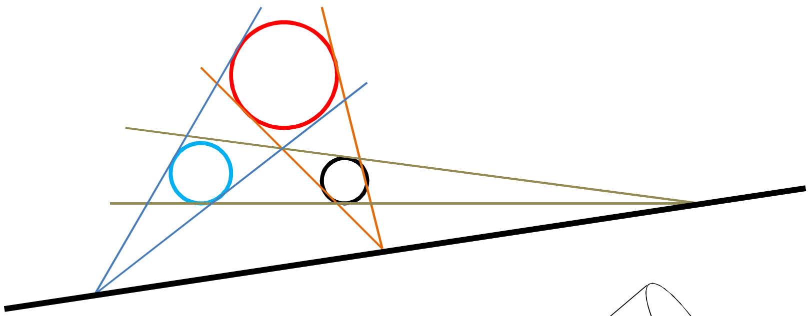
F, Gはその焦点となっている。

また、

$f''(x)=0$ の解 H はこの楕円の中心である。

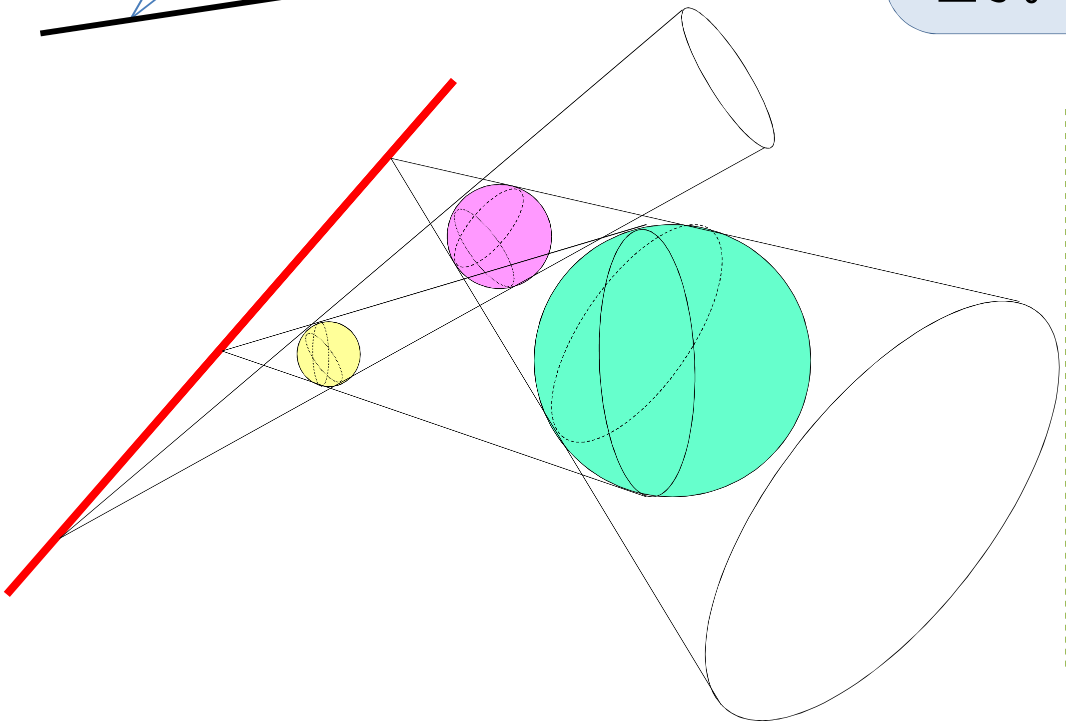
（ただしP, Q, R が一直線上に並ぶ場合は除く。）

次数を上げて見る



～モンジュの3円定理～

平面上に相異なる半径で互いに交わらない3つの円が与えられたとき、それらのうちの2つずつに接する接線の交点3つは一直線上に並ぶ。

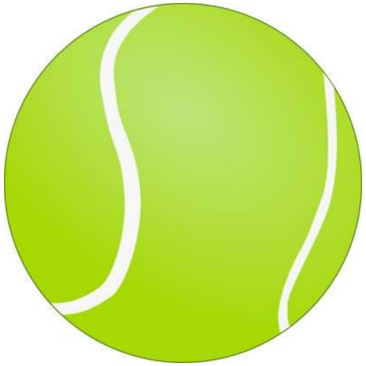


空間内に相異なる半径で互いに交わらない3つの球と、それらのうちの2つずつに接する円錐が与えられている。
円錐の頂点は3つの球の中心でできる平面α上にある。
また円錐の頂点は3つの球が乗っている平面β上にもある。
平面と平面は直線で交わるので3つの円錐の頂点は一直線上にある。

これを再度平面α上で見ると‥‥

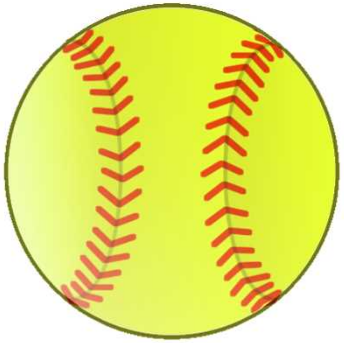
テニスボール定理

テニスボールや野球のボールを
①縫い目に沿ってボールを切り分けると、2つの同一の鉄アレイ状の形になる。
②ボールの縫い目に沿って指をはわせると、4カ所の点で右曲がりから左曲がり、またはその逆に切り替わる。
右にも左にも曲がっていない特別な点を変曲点という。



～テニスボール定理～

なめらかで閉じた曲線が球面を面積が等しい2つの領域に分けるならば、少なくとも4カ所の変曲点がある。



ただし球面を一周する赤道という自明な場合は、赤道上のすべての点が変曲点になる。

フェルマーの定理くつがえる？！①

～フェルマーの定理～

3以上の自然数 n について,

$$x^n + y^n = z^n$$

となる自然数の組(x, y, z)は存在しない。

$$3987^{12} + 4365^{12} = 63976656349698612616236230953154487896987106$$

$$\sqrt[12]{63976656349698612616236230953154487896987106}$$
$$= 4472.0000000070592 90$$

つまり、精度の低い(10ケタの)電卓だと･･　$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$　となる！
ただし12ケタ以上の電卓はこうはいかない･･･。

フェルマーの定理くつがえる？！②

$n=3$のときの『あと一歩解』がある。
次の母関数によって$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$を定義する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1+53x+9x^2}{1-82x-82x^2+x^3} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{2-26x-12x^2}{1-82x-82x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{2+8x-10x^2}{1-82x-82x^2+x^3}$$

このとき　${a_n}^3+{b_n}^3={c_n}^3+(-1)^n$

（ラマヌジャン）

n	a_n	b_n	c_n
0	1	2	2
1	135	138	172
2	11,161	11,468	14,258
3	926,271	951,690	1,183,258
4	76,869,289	78,978,818	98,196,140
‥	⋯	⋯	⋯

フェルマーの定理くつがえる？！③

～オイラーのべき乗和予想～
$n < k$ ならば 方程式 $a_1{}^k + a_2{}^k + \cdots\cdots + a_n{}^k = b^k$ は正整数解をもたない。

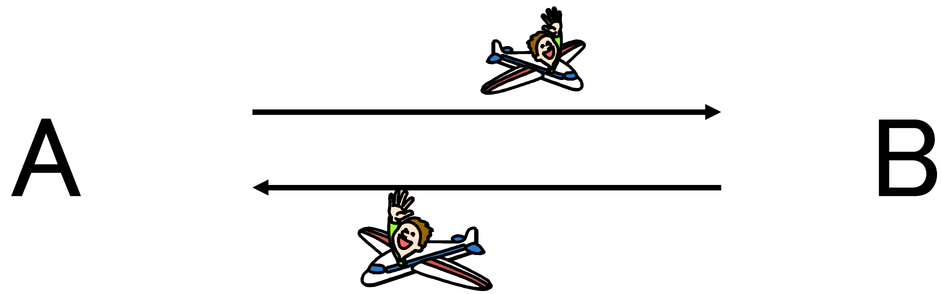
$n = 2$のときフェルマーの定理となることから、この予想はフェルマーの定理を含んでいることになる。
この予想も何世紀もの間未解決であったが、反例が発見された。

$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ （1966）
$85{,}282^5 + 28{,}969^5 + 3{,}183^5 + 55^5 = 85{,}359^5$ （2004）
$2{,}682{,}440^4 + 15{,}365{,}639^4 + 18{,}796{,}760^4 = 20{,}615{,}673^4$（1986）

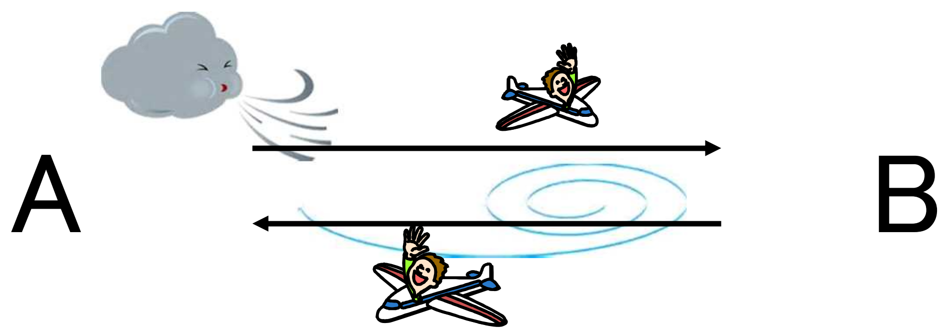
飛行時間は同じ？！

②のA→Bは速く，B→Aは遅く，相殺し合うので①②の飛行時間は同じ？

①無風



②一定の風あり



速さが増大している飛行時間は，速さが減少している飛行時間より短いので，
全体の効果は速さが減少する方に傾く。よって①より②の飛行時間が長い。
（相加相乗平均の関係から導き出すことも可。）

$\dfrac{1}{\text{素数}}$ の魅力

～Midyの定理～

p　が2,5以外の素数で，　$\dfrac{1}{p}$の循環節の長さが偶数の時，その２分割和は9が並ぶ。

$$\frac{1}{17}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 5 & 8 & 8 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 1 & 7 & 6 & 4 & 7 \\ \hline 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 7 \\ \hline 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$\frac{1}{19}=0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

なんと！
3分割の和も
9が並ぶ

$\dfrac{1}{529}$ の循環節の長さは506。

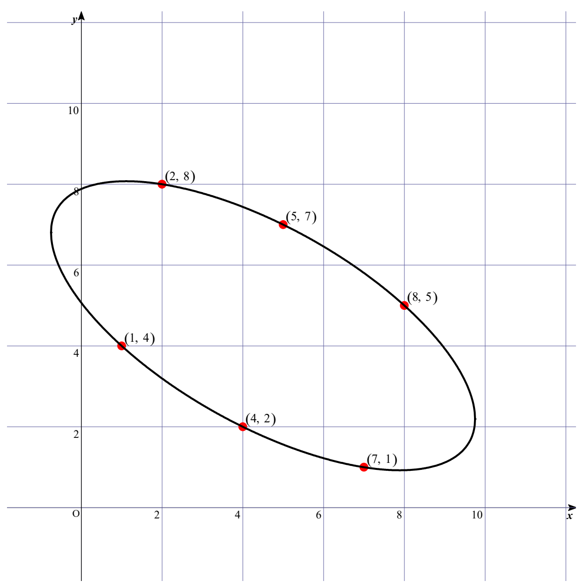
２分割して足すと9が253個ならぶ‥。

さらに $\frac{1}{7}$ の魅力

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

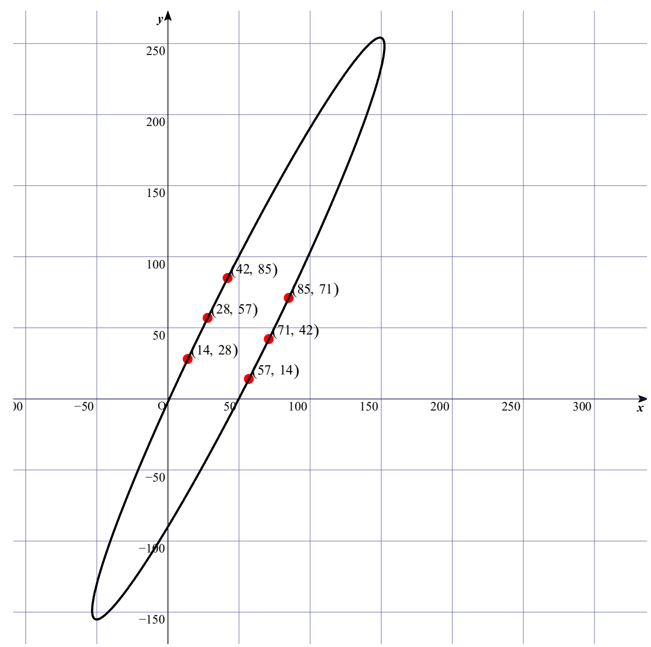
循環小数に現れる数字から作った6個の点を通る楕円が存在する。

(1,4),(4,2),(2,8),(8,5),(5,7),(7,1)



$$19x^2+36xy+41y^2-333x-531y+1638=0$$

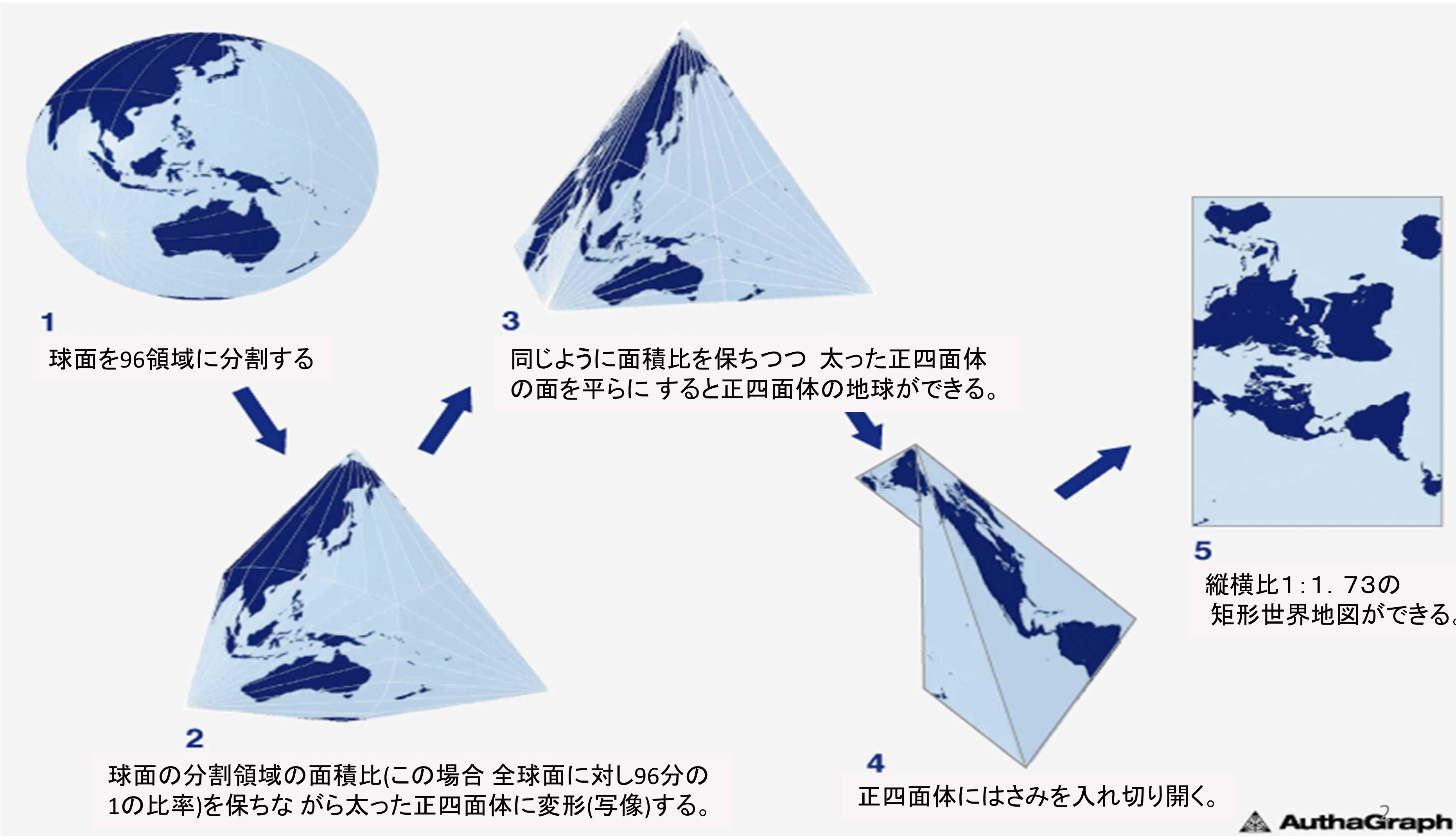
(14,28),(42,85),(28,57),(85,71),(57,14),(71,42)



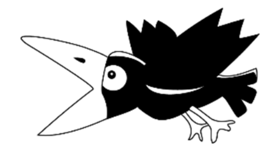
$$-165104x^2+160804xy-41651y^2+8385498x-3836349y+7999600=0$$

地球を正四面体に、そして地図に！

～すごい！オーサグラフ！～



奇跡？ただの偶然？・・確率の直感が乏しい？



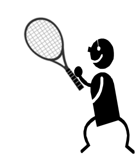
1：100万より少ない確率で起こる出来事を「奇跡」と呼ぶことにすると・・・。

＜リトルウッドの法則＞
普通の人間は誰でもごく普通の日常の中で、
平均してほぼ1ヶ月に1回奇跡を経験する。

2億5000万人に上るアメリカ全人口の中で、
何百人という人たちが日々まれな事象に出くわしている。（1953年）

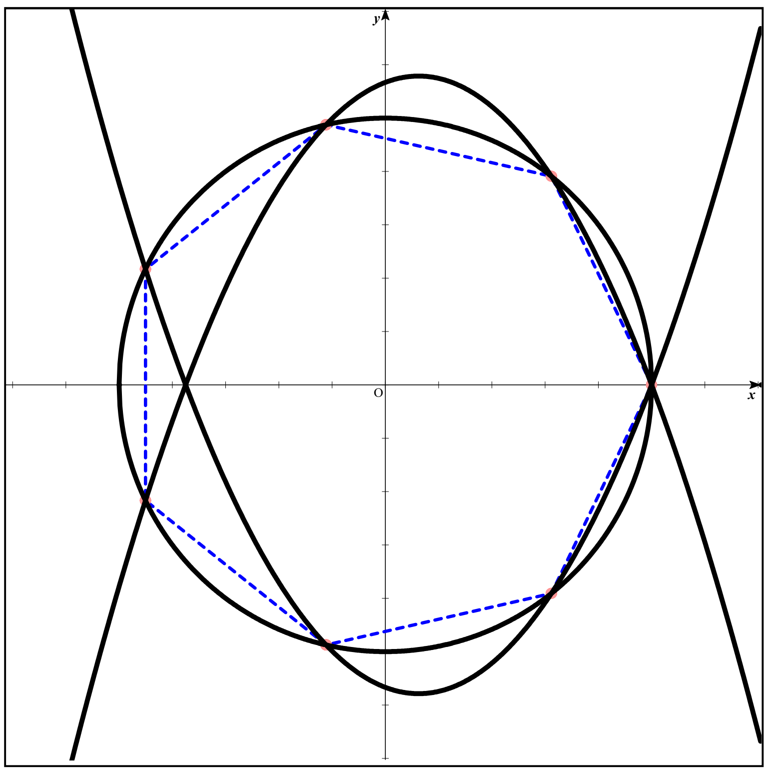
１日12時間は起きている。１秒あたりほぼ1つの割合で出来事を経験する。
60×60×12　で1日約4万の出来事があり、1ヶ月あたり約100万になる。

～ある高校生の話～
　高校入学直後の4月、テニス部に入部したくてやってきた1年生がいました。
ドキドキわくわくしながらテニスコートに足を踏み入れた、そのとたん！
空から降ってきたカラスのフンがまともに右腕に・・・。
しかし2年後全国大会出場を果たしたのはあの時の“運“のおかげ？！
　あなたの周りにもこういった“奇跡”あるはず。



放物線と円で作る正7角形

円　$C: x^2 + y^2 = 1$ と
放物線 $P_{\pm}: y = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}(4x^2 - x - 3)$
の交点は正7角形の頂点をなす。



円、放物線は$(1,0)$ を通る。

$\theta_k = \dfrac{2\pi k}{7}$とすると、

Cに内接し(1,0)を1つの頂点とする正7角形の座標は

$$(cos\theta_k, \pm sin\theta_k) \quad (k = 0,1,2,3) \qquad (★)$$

θ_kは　$cos4\theta_k = cos3\theta_k$　をみたすのでコサインの2倍角、3倍角の

公式より　$2(2cos^2\theta_k - 1)^2 - 1 = 4cos^3\theta_k - 3cos\theta_k$　すなわち

$$8cos^4\theta_k - 4cos^3\theta_k - 8cos^2\theta_k + 3cos\theta_k + 1 = 0$$

が成り立つ。

よって　$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$　の解が

$$x = cos\theta_k \quad (k = 0,1,2,3)$$

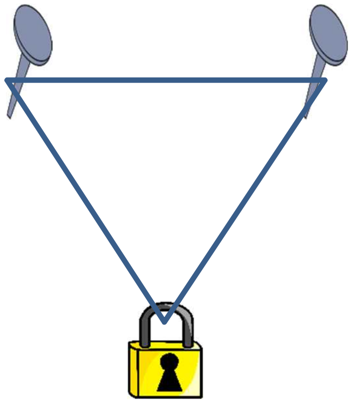
これを変形すると

$$x^2 + \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{7}}(4x^2 - x - 3)\right\}^2 = 1$$

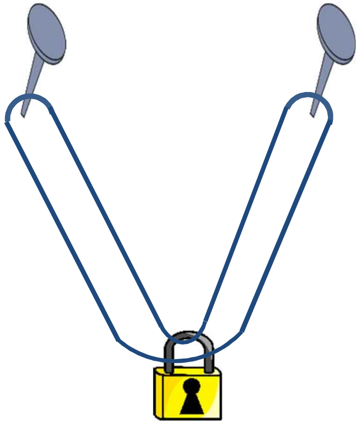
となり、C と　$P_{\pm}$　の交点が　(★) で与えられることがわかる。

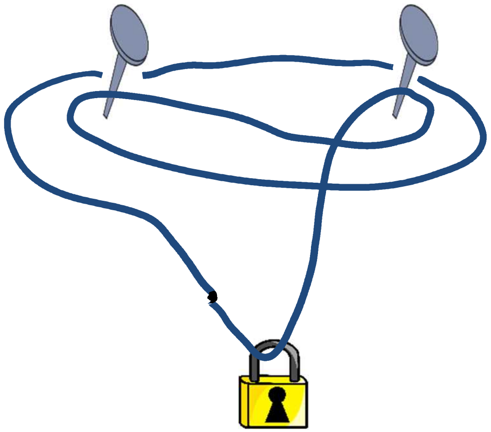
『数学セミナー2017.7』

２本の釘



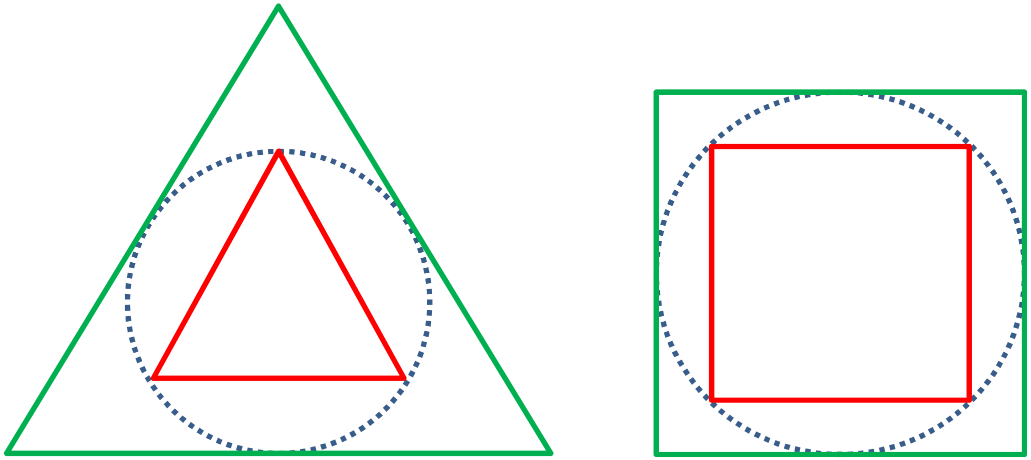
壁の釘2本に縄を絡め、おもりをつるす。
どちらの釘が抜けてもほどけておもりを落としてしまうような、
縄の絡め方を発明してください。



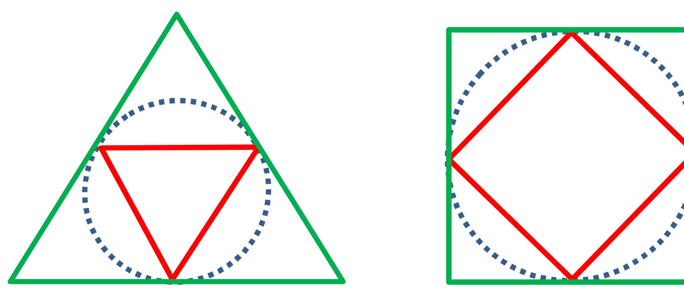


など･･。

面積比 $\frac{\text{小}}{\text{大}}$ は？



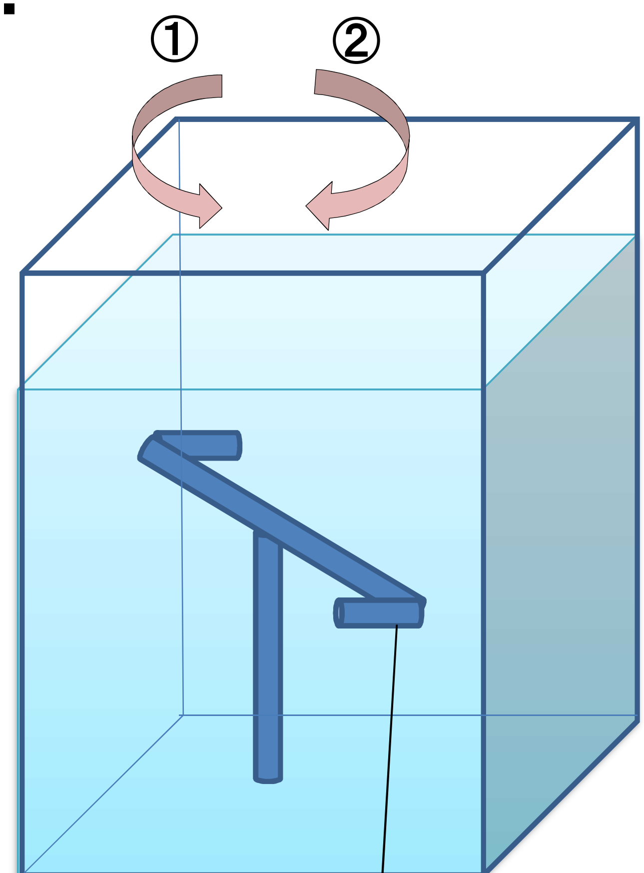
大きな正3角形に円を内接させ、
その円に小さな正三角形を入れた。
面積比を求めなさい。
正方形ではどうか。



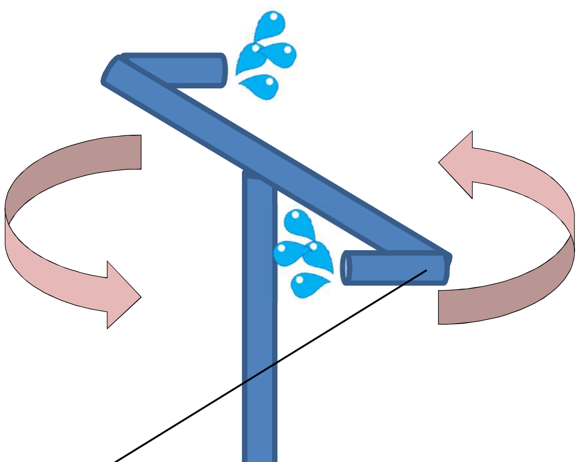
くるっと回すと・・・。

正3角形 $\frac{1}{4}$ 正方形 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

どっちに回る？



Z字型スプリンクラーを水の入った容器に入れ、下部から**水を吸い出す**ことにしました。
さて、通常なら反時計回りに回転するこのスプリンクラーは、水中なら①②どちらに回るでしょうか？



「水が出る＝中にいるピッチャーがボールを投げる」
と考えると・・・
「水を吸う＝中にいるキャッチャーがボールを受ける」
と考えられるので、答えは①

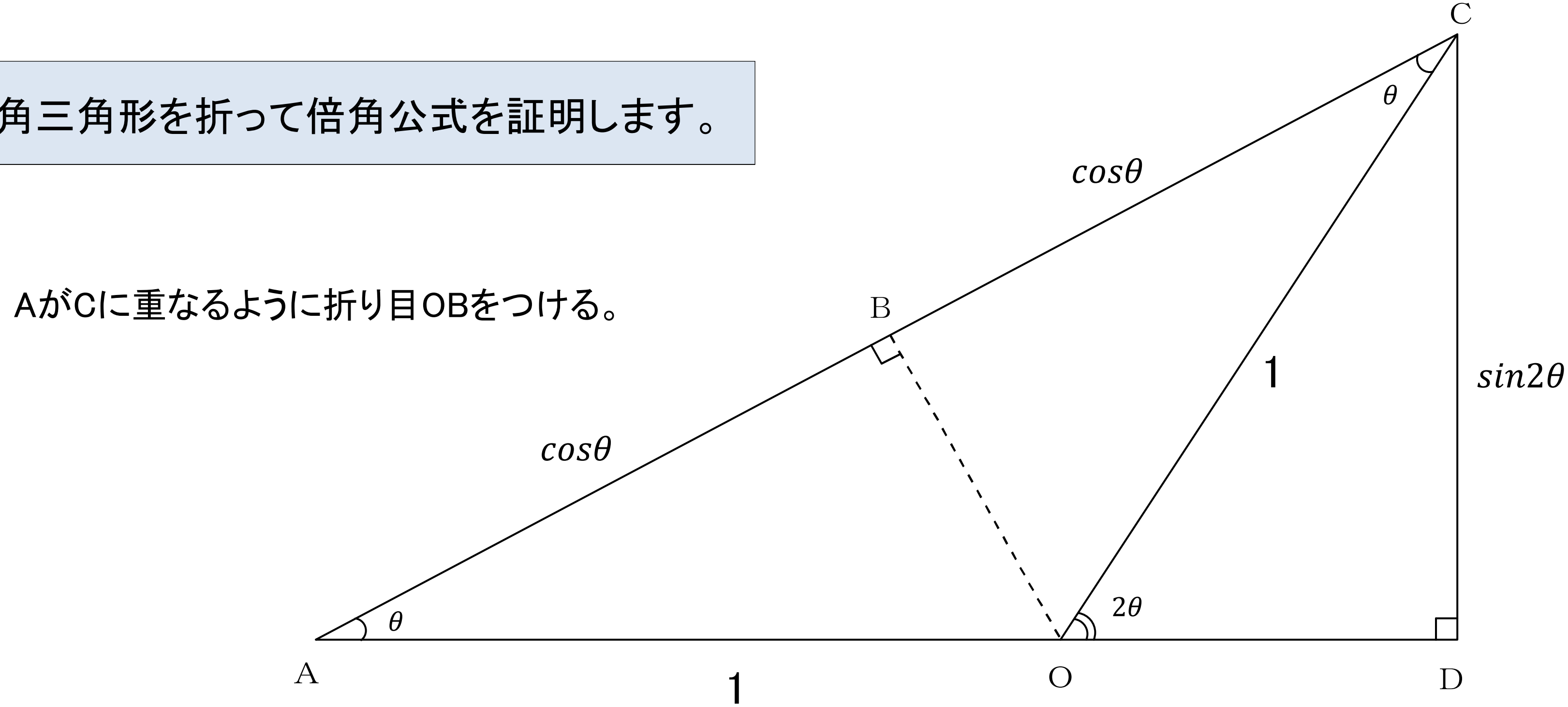
英語の月の不思議

～　素朴な疑問　～
1月は　直訳すると　FirstMonth　　なのに　January
7月は　直訳すると　SeventhMonth　なのに　August
・・・・というのはなぜ・・？

1月	January	ギリシャ神話の出入り口(始まりと終わり)を司る神ヤヌス(Janus)にちなむ。
2月	February	古代ローマで毎年2月15日に執り行われた慰霊祭フェブルアーリア (Februalia) の主神フェブルウス(Februus)にちなむ。
3月	March	ローマ神話の軍神「マルス(Mars)の月」の意。3月は気候も穏やかで、ローマ軍が行動を始めるに最適だったことから。
4月	April	古代ギリシャの愛と美の女神Aphroditeの月という説と、ラテン語で「開く」を意味するaperireからとする説がある。
5月	May	ローマ神話の春の女神Maia(マイア)の月。
6月	June	ローマ神話の結婚の女神Juno(ジュノー)の月。
7月	July	7月生まれのローマの将軍Julius　Caesar(ジュリアアス・シーザー)にちなむ。
8月	August	8月生まれのローマ皇帝Augustus(アウグスツス)にちなむ。
9月	September	古代ローマ暦が3月始まりの農耕暦であったため、９月は3月から数えると7番目。ラテン語で7を意味するseptem(セプテム)が語源。
10月	October	10月は3月から数えると8番目。ラテン語で8を意味するoctō (オクトー)が語源。
11月	November	11月は3月から数えると9番目。ラテン語で9を意味するnovem (ノウェム)が語源。
12月	December	12月は3月から数えると10番目。ラテン語で10を意味するdecem (デケム)が語源。

おりがみ証明

直角三角形を折って倍角公式を証明します。



$OA = 1$　$\angle A = \angle BCO = \theta$ とすると　$\angle COD = 2\theta$　$AB = cos\theta$　$CD = sin2\theta$　より

$$sin\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{sin2\theta}{2cos\theta} \qquad \therefore sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{AD}{AC} = \frac{1+OD}{2cos\theta} = \frac{1+cos2\theta}{2cos\theta} \Leftrightarrow 2cos^2\theta = 1 + cos2\theta \qquad \therefore cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

−１≦相関係数r≦１　のわけ

$$-1 \leqq r \leqq 1 \iff r^2 \leqq 1 \iff \left(\frac{c_{xy}}{s_x \cdot s_y}\right)^2 \leqq 1$$

$$\iff \left\{\frac{\frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+(x_3-\bar{x})(y_3-\bar{y})}{3}}{\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+(y_3-\bar{y})^2}{3}}}\right\}^2 \leqq 1 \cdots ①$$

ここで　$x_k - \bar{x} = X_k$　, $y_k - \bar{y} = Y_k$　$(k = 1,2,3)$　とおくと

$$① \iff \left\{\frac{\frac{X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3}{3}}{\sqrt{\frac{{X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{{Y_1}^2+{Y_2}^2+{Y_3}^2}{3}}}\right\}^2 \leqq 1$$

$$\iff (X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3)^2 \leqq \left({X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2\right)\left({Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2\right)$$

コーシー・シュワルツの不等式

x_n, y_n　のときも同じ

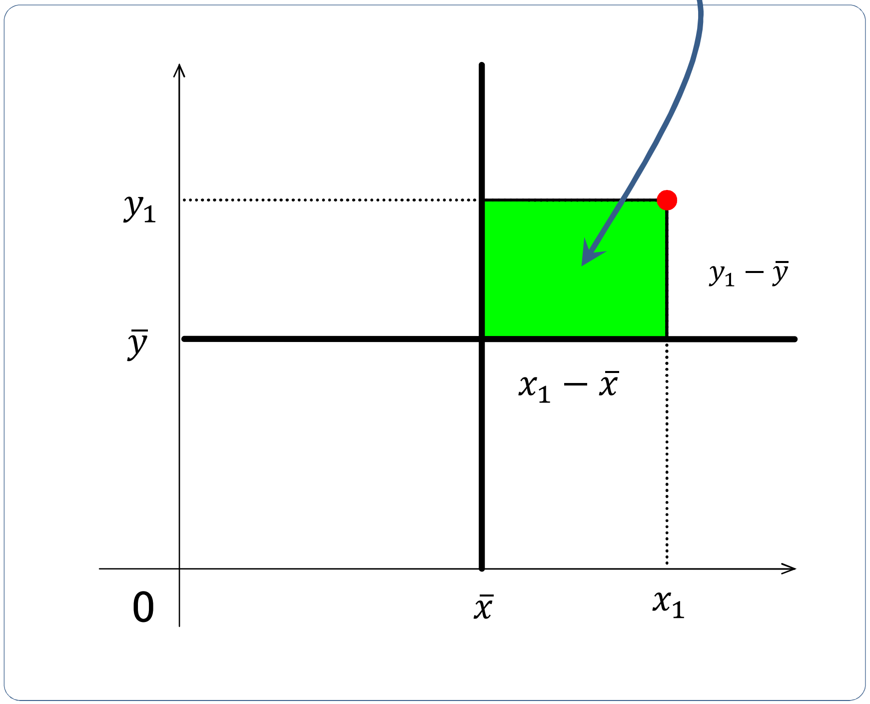
共分散の図形的意味は

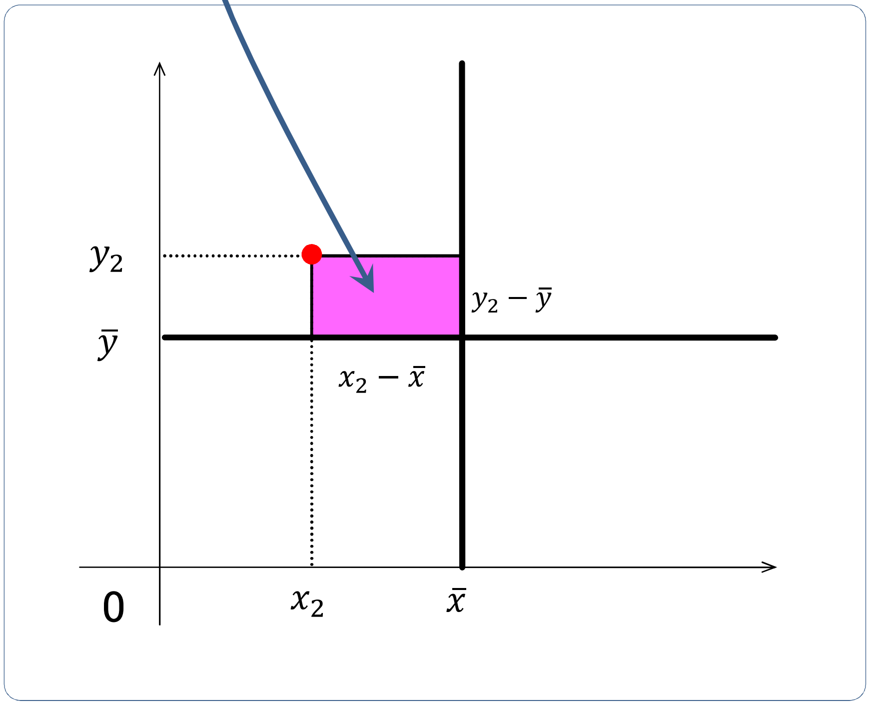
$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) > 0$

正の面積

$(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) < 0$

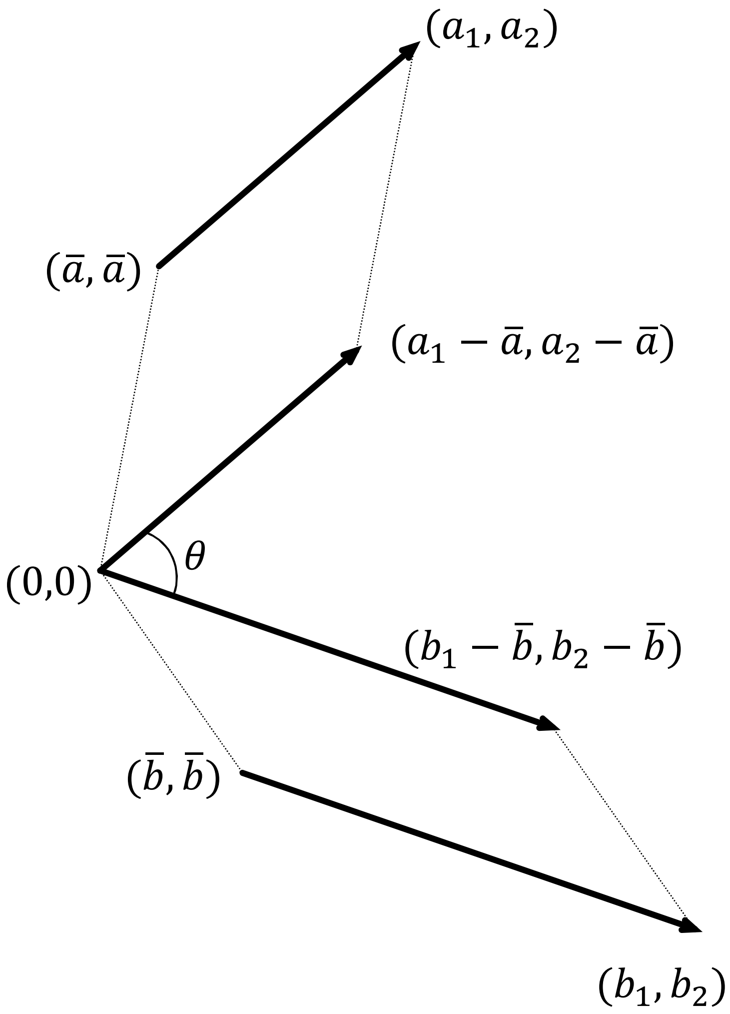
負の面積





正の面積、負の面積を加えて平均をとる ⇒ つまり平均面積？！

相関係数と内積



$$cos\theta = \frac{(a_1 - \bar{a})(b_1 - \bar{b}) + (a_2 - \bar{a})(b_2 - \bar{b})}{\sqrt{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2}\sqrt{(b_1 - \bar{b})^2 + (b_2 - \bar{b})^2}}$$

$$r = \frac{(a_1 - \bar{a})(b_1 - \bar{b}) + (a_2 - \bar{a})(b_2 - \bar{b})}{\sqrt{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2}\sqrt{(b_1 - \bar{b})^2 + (b_2 - \bar{b})^2}}$$

ん？同じ？

n個のデータの場合

相関係数 r は

『2つの変量をn次元空間上の2つの点』と考え、

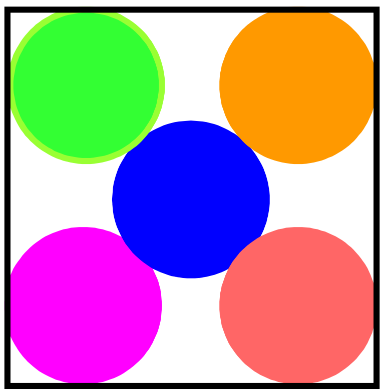
『それぞれの平均からのベクトルのなす角』

を測っている。

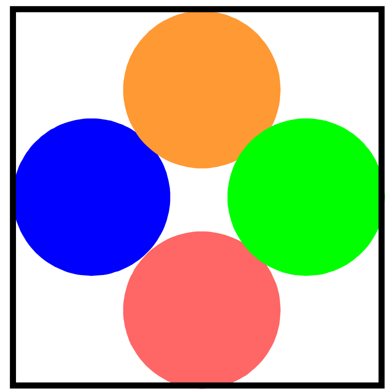
同じ大きさ

①②③の正方形の1辺の長さが同じであることを示してください。

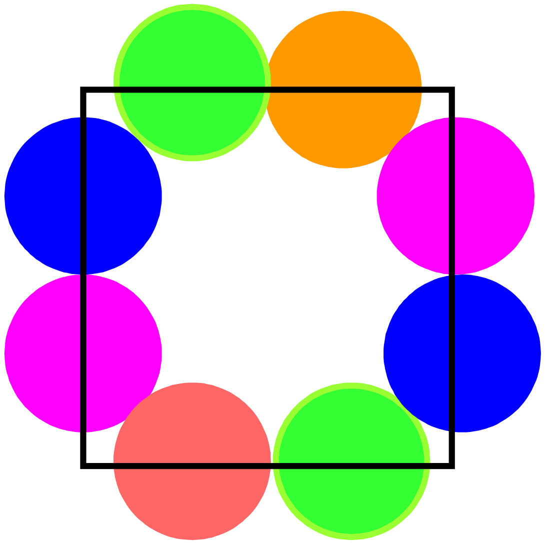
①

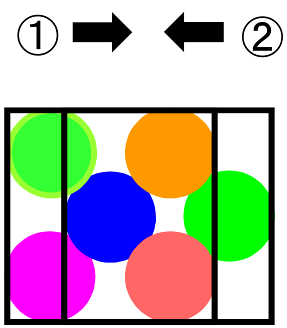


②

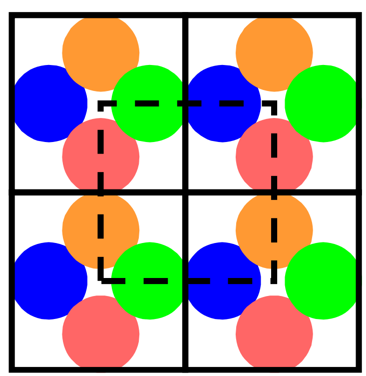


③



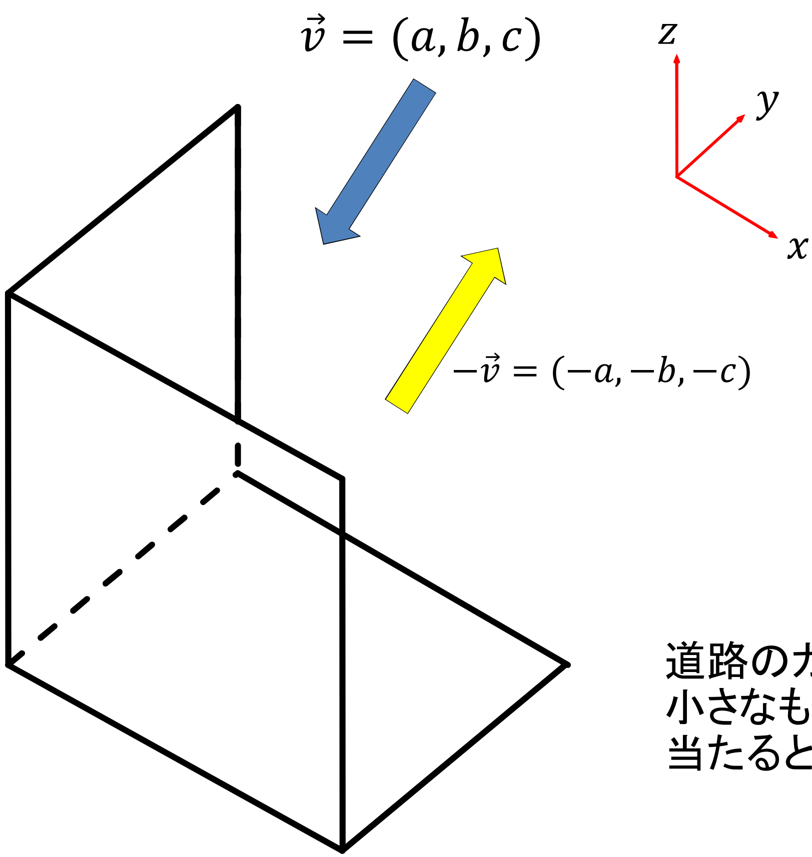


②×4



自転車の反射板の中にある立方体の半分

立方体の箱の半分の内側に鏡を張り付ける。このとき遠方からくる光線で、3つの鏡面で反射されるものは平行に戻って行く。



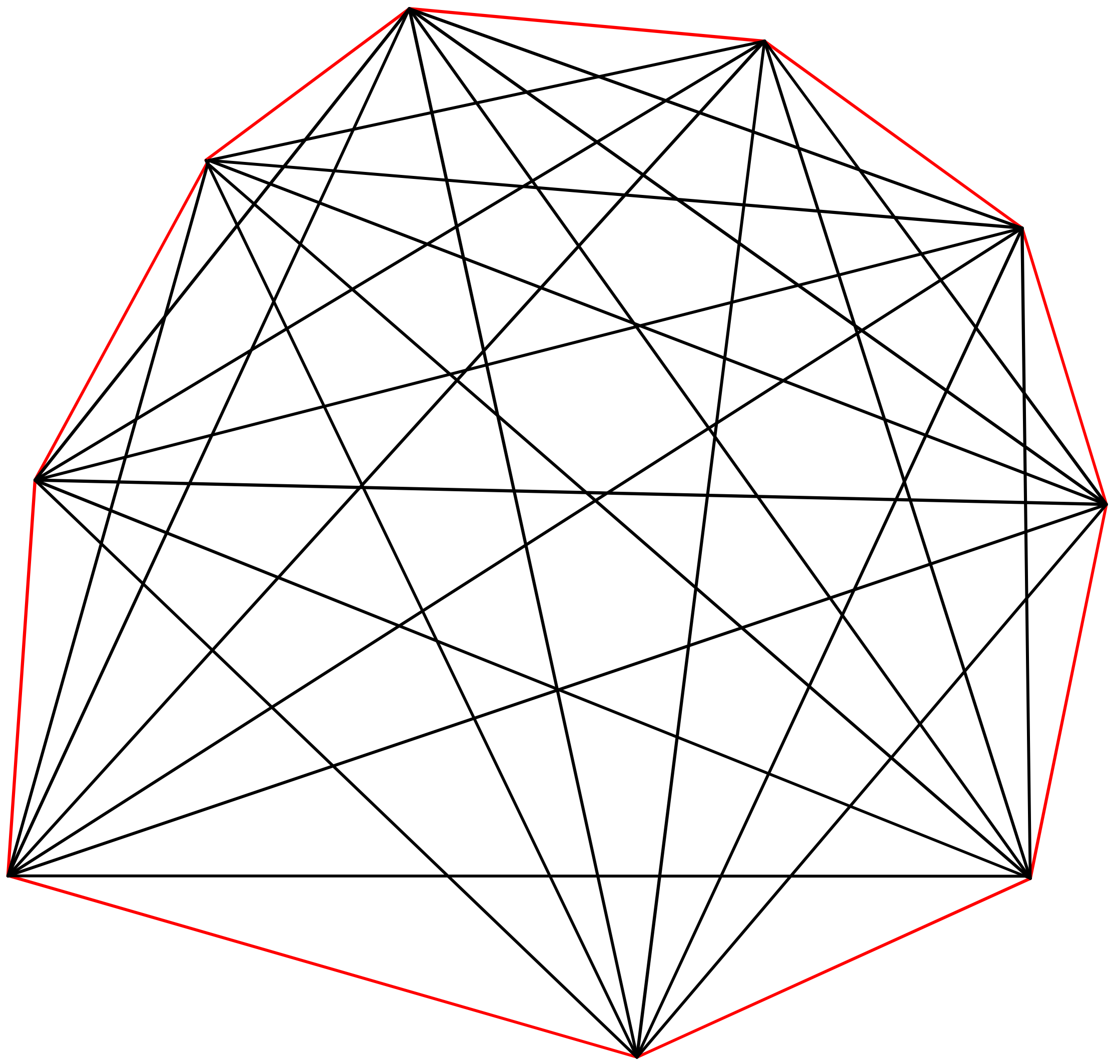
$\vec{v} = (a, b, c)$ の向きの光線が当たったとする。

xy　平面で反射されると　c が $-c$　に
yz　平面で反射されると　a が $-a$　に
zx　平面で反射されると　b が $-b$　に

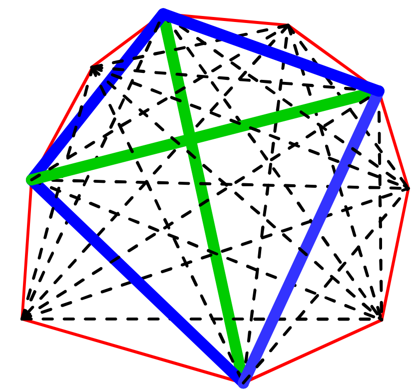
つまり3つの鏡面で反射されると
$\vec{v} = (a, b, c)$は　$-\vec{v} = (-a, -b, -c)$
の方向、つまり平行に戻って行く。

道路のガードレールや自転車の反射板には、この三面鏡の小さなものがたくさん埋め込まれている。車のヘッドライトが当たると光は来た道を帰り、運転者の目に届くのだ。

対角線の交点の個数は？



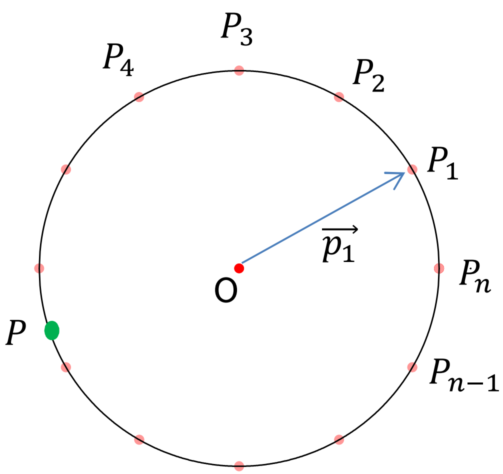
4角形1つにつき
　　1コあるから・・・・



$$\binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126 \text{ コ}$$

対角線全部の長さの和は？

半径1の円に内接する正n角形の辺および対角線すべての長さの平方の和S_nを求めよう



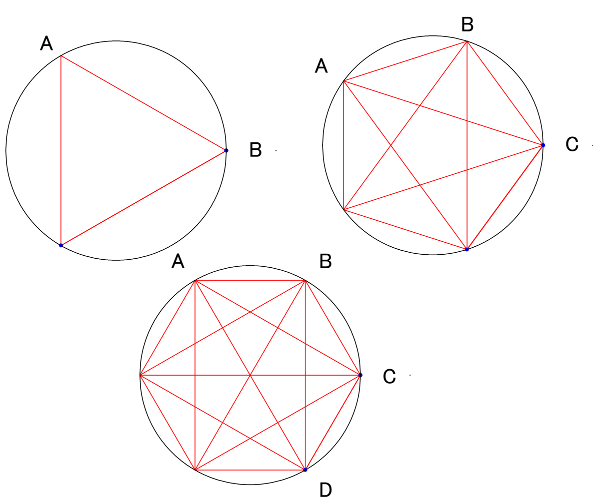
単位円周上にn 個 の点 P_k $(k = 1,2,3,\cdots)$ が等間隔で並んでいるとき、単位円周上の任意の点 P に対して

$$\sum_{k=1}^{n} PP_k{}^2 = 2n$$ が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} PP_k{}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\overrightarrow{p_k} - \overrightarrow{p}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left|\overrightarrow{p_k}\right|^2 - 2\overrightarrow{p_k}\cdot\overrightarrow{p} + \left|\overrightarrow{p}\right|^2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - 2\overrightarrow{p_k}\cdot\overrightarrow{p} + 1\right) = 2n - 2\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{p_k}\cdot\overrightarrow{p}$$

$$= 2n - 2\overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_3} + \cdots + \overrightarrow{p_n}\right) = 2n - 2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{0} = 2n$$



$$\therefore\ S_n = \frac{1}{2} n \cdot \sum_{k=1}^{n} P_1P_k{}^2 = \frac{1}{2} n \cdot 2n = n^2$$

$\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$ という愛情

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ において

$\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\therefore \quad i^{i} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{i} = e^{\frac{\pi}{2}i^{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$$

ロシア農民と2進数

$$\boxed{58 \times 27}$$

58	~~27~~
29	54
14	~~108~~
7	216
3	432
1	864

①58を2で割っていく。小数点以下は切り捨て。

②27を2倍していく。左の数が偶数なら消す。

③残った数をたす。

1566

＜理　由＞

$$58 \times 27 = \left(2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1\right) \times 27$$

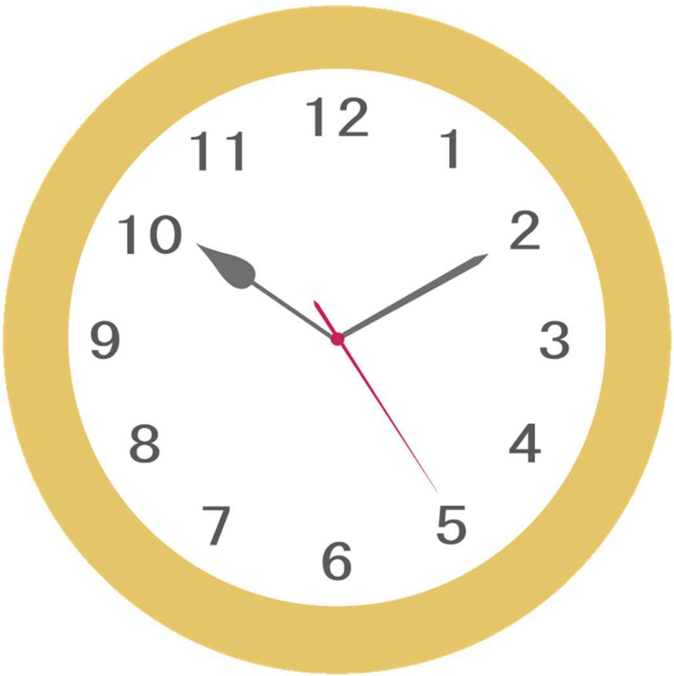
$$= 2^5 \times 27 + 2^4 \times 27 + 2^3 \times 27 + 2^1 \times 27$$

$$= 864 + 432 + 216 + 54$$

19世紀、ロシアのある地方で農民たちが使っていた計算法じゃ

時計の3針が重なる時刻は？

時計の3針（短針、長針、秒針）が同時に重なる時刻を求めよう



短針が1周する間（12時間）に、長針はちょうど12周、秒針は720周する。

→短針と長針は0時の地点を出発点として、円周を11等分する点で重なる。短針を秒針は円周を719等分する点で重なる。

→ $\dfrac{x}{11} = \dfrac{y}{719}$ $, 0 < x < 11,\ o < y < 719$

をみたす整数を求めればよい。（円周の長さを1とする）

→ $\dfrac{719x}{11} = y$ 11と719は互いに素だから

$0 < x < 11$ の範囲で整数解はない。

→ 0時0分0秒の時に限り3針は重なる。

暗算名人①

1分以内に暗算で□を埋めよ

(1) 58746×93417＝548□875082

(2) 71336×91□78＝6525674608

(1) $58746 \equiv 5+8+7+4+6 = 30 \equiv 3 \pmod 9$
$93417 \equiv 9+3+4+1+7 \equiv 24 \equiv 6 \pmod 9$
左辺$\equiv 3 \times 6 = 18 \equiv 0 \pmod 9$
右辺$\equiv 5+4+8+\square+8+7+5+0+8+2 \equiv 47+\square \equiv 2+\square \pmod 9$
$\therefore \ \square = 7$

(2) $71336 \equiv 7+1+3+3+6 \equiv 20 \equiv 2 \pmod 9$
$91\square78 \equiv 9+1+\square+7+8 \equiv \square+25 \equiv \square+7 \pmod 9$
左辺$\equiv 2 \times (\square+7) = 2\square+14 \equiv 2\square+5 \pmod 9$
右辺$\equiv 6+5+2+5+6+7+4+6+0+8 \equiv 4 \equiv 13 \pmod 9$
$\therefore \ \square = 4$

答え

（1） 7

（2） 4

暗算名人②

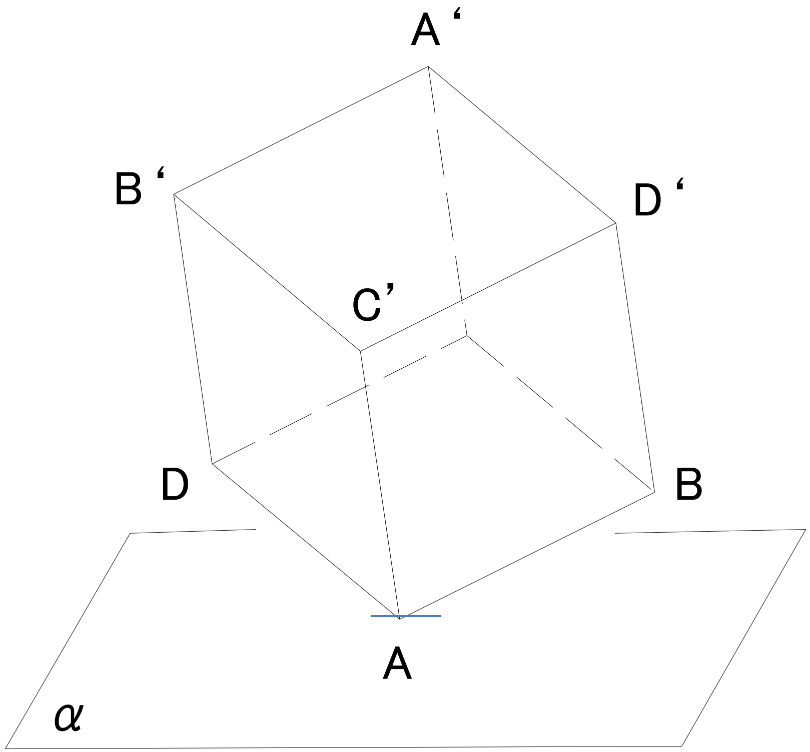
背番号が7，8，6，3の選手がいる。
適当に並べ替えてできる4桁の数を9の倍数にしてほしい。

7＋8＋6＋3＝24だからどう並べ替えても9の倍数にならないが･･･。
6の選手が逆立ちすれば良い････。　ちゃんちゃん♪

立方体の影の面積＝高さ

水平な机の上に置かれた単位立方体を机から離さずに傾ける。
真上から光を当てたときにできる影（正射影）の面積は、最も高い頂点の机からの高さに等しい。

平面A’B’C‘D’とαのなす角をθ、平面A’B’C‘D’とαの上向きの単位法線ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=\overrightarrow{AC'}$ 、$\vec{v}$ とする。



A’B’C‘D’の影の面積

$$= \text{A’B’C‘D’の面積} \times cos\theta$$

$$= 1 \times cos\theta \;=\; \vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AC'}\cdot\vec{v}$$

同様に考えて

立方体の影の面積＝A’B’C‘D’の影の面積
＋A’D’B C の影の面積
＋A’B’D C の影の面積

$$= \overrightarrow{AC'}\cdot\vec{v} + \overrightarrow{C'D'}\cdot\vec{v} + \overrightarrow{D'A'}\cdot\vec{v}$$

$$= \left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'A'}\right)\cdot\vec{v}$$

$$= \overrightarrow{AA'}\cdot\vec{v}$$

＝ 最も高い点A’ の高さ