大阪大学大学院基礎工学研究科
数理科学　回答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

始めに

この資料は大阪大学大学院基礎工学研究科入学試験における科目のうち、数理科学の解答集である。私は２００９年の受験生であるが、２００９年４月から８月までに数理科学コースの友人たちと行った院試対策の勉強会で出された解答案を整理し、ここに記した。
この資料を作ろうと思った動機は

- 院試勉強会では良いアイディアがたくさん出されたが、そのアイディアが我々の間だけで留まるのはもったいないと思ったため
- 過去問題には解答がなく、２００９年以降の受験生が一人だけで勉強し、悩むことがないようにするため
- よく勉強会をさぼる友人が後で一人で自習できるようにするため

である。２０１０年以降の受験生にとって役立つものであると確信している。
この解答集は平成１２年度から平成２２年度までの１１年分の解答を収録している。使う際に留意してほしい点は以下の３点である。

- この解答集は学部４年生によって書かれたものであること（つまり解答としては極めて甘く試験で満点がもらえるような答案ではない）
- 誤植が多いこと（書いたのは私１人であり、多くの人の目が入ったものではない）
- 無料で公開していること（つまりこの解答が間違っていた時に何らかの損害をこうむっても私は一切の責任を持たない）

この解答集が２０１０年以降の受験生のみなさんのお役に立つことを願っている。
終りに、院試勉強会で多くの意見を述べてくれた S.U 君、S.N 君、H.M 君、Y.M 君、T.K 君、H.Y 君、N.Y 君、T.Y 君、T.Y 君、F.K 君、には厚くお礼申し上げる。難易度 4 以上の問題の多くを解いてくれた S.N 君、T.K 君、N.Y 君には特に感謝の意を表したい。

1　傾向と対策

出題されるのは次の５項目である。

- 微積分（ルベーグ積分を含む）
- 線形代数
- 常微分方程式
- 複素関数論
- 統計学

フーリエ解析や群論といった代数学は出題されたことがない。ルベーグ積分を除けば学部２年レベルの知識で解ける問題である。

1.1　傾向

1.1.1　専門１

１番が微積分の必答問題、２番が線形代数の必答問題というのはこの１０年以上変わっていない。ただ平成２０年までは１番はチェインルールの問題で２番は直交行列による対角化をする問題だったが、平成２１年以降傾向が変わったみたいで、出題傾向が読めなくなってしまった。だが、難問というわけではないので、微積分と線形代数の基本をしっかりと身につけておけば恐れる必要はないだろう。
３番から６番までは選択問題であり（年によっては７問あるが）３，４のうちどちらかは常微分方程式に関する問題で、どちらかは線形代数か微積分の問題である事が多い。２２年度の４番のような問題が今までに数回出題されているが、この手の問題はかなり難度が高いので、避けた方が良い。
５，６は統計の問題で２問とも取り組めないことは少ない。年にもよるが、取り組みやすい問題が多いのでここで統計から１問は取ることが望ましい。

1.1.2　専門 2

１０問あり、（年によっては１１ないしは１２問ある）１〜５くらいまでが微積分、線形代数、複素関数論、常微分方程式の問題。６〜１０までが統計の問題である。近年は１番が複素積分の問題である事が多いが、２１年度のみ極座標変換させて図を描かす問題であった。その他のおもな傾向は

- 統計の問題の方が取り組みやすいことが多いので統計から最低２問は取るのが望ましい。
- 微積分の問題は取り組みにくいことが多い。
- 線形代数は取り組みいやすいことが多い。

1.2　対策

1.2.1　専門１

まず過去問でチェインルールの問題は全て解いてパターンになれることを勧める。ここ２年は２０年度までのチェインルールの問題は出題されていないが、いつあの形式が復活してもおかしくはない。

1.2.2　専門２

まず、複素積分の出題頻度がきわめて高いので留数定理を使った複素積分の問題のパターンを全て把握することを勧めたい。また統計が大きな得点力になるので統計の勉強に力を入れるといいだろう。ルベーグ積分の問題が過去に３回ほど出題されているが、どれも難しかったのでルベーグ積分ができなくても大きなマイナスにはならない。（**入ってから困るだろうが**）

1.2.3　専門１と専門２のどちらにも言えること

選択問題は難易度１の非常に簡単な問題から難易度５の手も足も出ない問題までが混ざっており、**どの問題を選択するか**というのは極めて難しい。これは高校受験の時から経験していると思うが、**見た目は難しそうだが実は簡単**ということが結構多い。逆に小問に分かれていて、(3) くらいまでは簡単だが (4) が難しくて完答が狙えない問題もいっぱい混ざっている。**どの問題を選択するかを慎重に見極める練習を過去問を使ってやってほしい。**

2　どれくらいできればいいのか？

年にもよるが、専門１と２を合わせて全体の６割できていれば間違いなく合格ラインは超えていると思われる。２２年は５割出来ていれば合格していた。専門１は８割から９割、専門２は６割から７割を目指して頑張ってもらえばいいと思う。

3　裏情報

3.1　英語の配点について

TOEIC や TOEFL の点数について色々な噂が飛びがっている。そのいくつかを紹介すると、

- TOEIC の点数は 1/20 に圧縮されて数学の点数に足される。
- TOEIC や TOEFL の点数は数学の点数がボーダーラインすれすれの時のみに参考程度に見られる

英語の配点は極めて低いというのは確かなようではあるが …

3.2　試験で取る問題について

基本的には選択問題は簡単そうな問題から順に選んでもらえばいいと思うが、研究室によって取るのが望ましくない問題がある。どういうことかというと

- 鈴木研で統計の問題を解いたら面接で「なぜ統計の問題を解いたのか」と糾弾された
- 長井研で専門２の４問を統計にしたら面接で怒られた

といった噂があり、どうもこれは本当のことのようである。例えば鈴木研はあまり統計をやらないので微積分等の問題で勝負しろというのが研究室の方針のようである。各研究室の方針は

- 鈴木研 ‥ 統計の問題は１問も選択しないのが望ましい

- 長井、会田研 ‥ 選択問題を全て統計でそろえるのは望ましくない
- 白旗研、狩野研、 内田・熊谷研 ‥ 選択問題で１問も統計を選ばないのは望ましくない
- 名和研 ‥ 微積分の問題を解くのが望ましい

という感じだと思われる。ただ、面接で嫌味を言われるだけで、合否には関係ないというのが通説である。

4　面接

4.1　面接での受け答え

面接は基本的に希望する研究室の教授または准教授から質問される。その受け答えの一部を公開する。ここの生徒は全員合格している。

4.1.1　生徒１の場合

教師１：大学院でやりたいことは何ですか？
生徒１：製薬です。
教師１：分かりました。では他の先生方で何かご質問はありますか？
他の先生から２，３の質疑応答。面接時間約５分

4.1.2　生徒２の場合

教師３：大学院でやりたいことは何ですか？
生徒２：関数解析をやりたいです。
教師４：君、僕の関数解析の授業取ってなかったよね？?
生徒２：‥‥
教師５：えらい痛いところつかれたなあ
一同笑い。面接時間約５分

4.1.3　生徒３の場合

教師６：この問題今だったらできますか？
生徒３：はい、
問題を説明する
教師５：それ、××君の解答と一緒だよね？教えてもらったの？
生徒３：‥‥ (冷や汗)
面接時間約１０分

4.1.4　生徒４の場合

教師６：なぜ統計の問題に一問も手を出さなかったんですか？
生徒４：どの問題も完答が狙いにくそうだったので敬遠してしまいました。
教師６：そうですか、微積分の問題の出来はどうでしたか？
生徒４：できたとは言えませんが、悪くはなかったと思います。
面接時間約５分

4.2　知っておいた方が良いこと

基本的に試験での出来が良ければ面接時間は５分程度で終わる。ボーダーラインすれすれの生徒は「この問題今だったらできますか？」と聞かれることが多い。ここで正しく答えられると点数がもらえる。なので**本番の出来が悪くてもあきらめず、試験問題を復習して欲しい**

平成１２年度　情報数理系
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ は

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で定義される。次の問に答えよ。
(1)$\sinh(x), \cosh(x)$ を微分せよ。
(2) 関数

$$u(x) = \frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)}$$

は $x > 0$ で単調増加であることを示せ。ここに k は $k > 1$ なる定数である。
(3)a, b, c, d を $a > b > c > d > 0 \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ なる定数とする。このとき

$$A = \sinh(a)\sinh(d), \quad B = \sinh(b)\sinh(c)$$

の大小を判定し、その理由を述べよ。

1.1　解答

1.1.1　(1)

$(\sinh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(\cosh(x))' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1.1.2　(2)

$u'(x) = (\frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)})'$
=$\frac{k\cosh(kx)\sinh(x) - \sinh(kx)\cosh(x)}{\sin^2 h(x)}$
（$u'(x)$ の分子）=$k\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} \bullet \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
=$\frac{1}{4}\{k(e^{(k+1)x} - e^{(k-1)x} + e^{(-k+1)x} - e^{-(k+1)x}) - (e^{(k+1)x} + e^{(k-1)x} - e^{(-k+1)x} - e^{-(k+1)x})\}$
=$\frac{1}{2}\{(k-1)\sinh((k+1)x) - (k+1)\sinh((k-1)x)\}$
ここで g(x)=$(k-1)\sinh((k+1)x) - (k+1)\sinh((k-1)x)$ とおくと
$g'(x) = (k^2 - 1)\{\cosh((k+1)x) - \cosh((k-1)x)\}$
$\cos h(x)$ は $x > 0$ で単調増加関数なので
$\cosh(k+1)x > \cosh(k-1)x$
よって $x > 0$ で $g'(x) > 0$ また $g(0) = 0$
以上より $x > 0$ で $g(x) > 0$
よって $x > 0$ で $u'(x) > 0$
以上より $u(x)$ は $x > 0$ で単調増加関数である。

1.1.3 (3)

$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)}$ と $\frac{\sinh(c)}{\sinh(d)}$ を考える。
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ より $a=\frac{c}{d}b, c=\frac{a}{b}d$
$a>b>c>d$ なので $\frac{c}{d}>1, \frac{a}{b}>1$
(2) より $\frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)}$ は $k>1$ の時、単調増加関数なので、$b>d$ より
$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)}>\frac{\sinh(c)}{\sinh(d)}$
よって $\sinh(a)\sinh(d)>\sinh(c)\sinh(b)$ となるので $A>B$

1.2 １番の総評

(１) は高校生でもできる問題
(２) は計算がやや複雑で難しい。
(３) はちょっと難しい。解答を読めば十分理解できるとは思いますが。(２) を使うのがポイントです。
全体的な難易度は５段階で３と判断しました

2 (２)

２番

次の問に答えよ。
(１) 行列
$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。
(2) 任意の自然数 n について trA^n を計算せよ。ただし、trA^n は行列 A^n の対角成分の和を表す。

2.1 予備知識

一般に対称行列は直交行列を使って対角化することができる。しかし、これは特性方程式が重解をもたないときである。なぜなら、
「対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する」(線形代数　馬場敬之　マセマ出版社１９１ページ)
からである。例えば $\lambda=1$ が２重解であり、この λ に対して二つの固有ベクトルが求まった時、この二つの固有ベクトルは直交していない。
よってこの行列は直交行列では対角化できない。

2.2 解答

2.2.1 (1)

$$|A-tE|=\begin{vmatrix}-t&1&1\\1&-t&1\\1&1&-t\end{vmatrix}=-t^3+1+1+t+t+t=0$$
$\Leftrightarrow -t^3+3t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2=0$
$\Leftrightarrow t=2,-1$
t=2 の時、
$(A-2E)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は定数)
t=-1 の時、
$(A+E)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2は定数)
以上より固有値 2 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値-1 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2.2 (2)

（1）より $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
よって $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ となるので
$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$
ここで掃き出し法により P の逆行列を求めると
$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
よって $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ =$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n+3(-1)^n & 2^n+(-1)^{n+1} \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$
以上より
$tr(A^n) = \frac{1}{3} \cdot 3(2^n+2(-1)^n)$
=$2^n+2(-1)^n$

2.3　総評

教科書の例題レベルの問題。計算はやや煩雑かもしれないが、絶対にできなくてはならないと思う。

3　３番

3 番

$t \geq 0$ について $x(t)$ を常微分方程式
$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \sin t$
$x(0) = 1$
の解とする。次の問に答えよ。
(1) この方程式を解け。
(2) 上極限と下極限
$A = \overline{\lim}_{t\to\infty} x(t),\quad B = \underline{\lim}_{t\to\infty} x(t)$
を求めよ。

3.1　（1）

$\frac{dx}{dt} = -x(t)$ を解くと。
$x(t) = Ce^{-t}$(C は定数)
ここで $x(t) = C(t)e^{-t}$ とおくと（定数変化法）
$\frac{dx}{dt} = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} = -c(t)e^{-t} + \sin t$
よって $C'(t) = e^t \sin t$
これより $C(t) = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C_2$ (C_2) は定数
以上より $x(t) = e^{-t}C(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + C_2 e^{-t}$
x(0)=1 より $-\frac{1}{2} + C_2 = 1$
$\Leftrightarrow C_2 = \frac{3}{2}$
よって $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{3}{2}e^{-t}$

3.2　（2）

$\sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})$
よって $\overline{\lim}_{t\to\infty} x(t) = \lim_{k\to\infty} \sup_{t\geq k} x(t)$
=$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}e^{-k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\underline{\lim}_{t\to\infty} x(t) = \lim_{k\to\infty} \inf_{t\geq k} x(t)$
=$-\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.3　３番の総評

(1) はただの線形一階常微分方程式
(2) は上極限と下極限の意味さえ知っていれば難しくはない。難易度は５段階で２くらい

4　4番

4 番

次の各問に答えよ。
(1)$\alpha > -3, n = 1, 2, \cdots$ とする。積分
$I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$
について I_nを I_{n-1} で表せ。
(2) $\alpha \geq -3, n = 1, 2, \cdots$ とする。積分
$F(\alpha, n) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\log(x^2+y^2+z^2))^n dxdydz$
の収束、発散を判定し、収束する時はその値を求めよ。

4.1　（1）

$\log r = t$ とおくと、$r: 0 \to 1$ のとき $t: -\infty \to 0$
よって $I_n = \int_{-\infty}^0 (e^t)^{\alpha+2} t^n r \cdot dt$ ($\log r = t$ より $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}$)
=$\int_{-\infty}^0 (e^t)^{\alpha+3} t^n dt$
=$\int_{-\infty}^0 t^n (\frac{1}{\alpha+3} e^{(\alpha+3)t})'$
=$[\frac{1}{\alpha+3} t^n e^{(\alpha+3)t}]_{-\infty}^0 - n \cdot \int_{-\infty}^0 t^{n-1} \frac{1}{\alpha+3} e^{(\alpha+3)t} dt$
=$-\frac{n}{\alpha+3} I_{n-1}$

4.2　（2）

(1)$\alpha > -3$ の時
$x = r\sin\theta\cos\psi,\ y = r\sin\theta\sin\psi, z = r\cos\theta\ \ (0 \leq r, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \psi < 2\pi)$
と極座標変換すると $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ なので
$r^2 \leq 1$ すなわち $0 \leq r \leq 1$
またヤコビアンは
J=$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & r\cos\theta\sin\psi & r\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$ =$r^2\sin\theta$
よって $F(\alpha, n) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{\alpha}(\log r^2)^n r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$
=$2^n \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi$
=$2^n \cdot 2 \cdot 2\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$
ここで（1）より $I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$
=$-\frac{n}{\alpha+3} I_{n-1}$
=$-\frac{n}{\alpha+3}(-\frac{n-1}{\alpha+3} I_{n-2})$
=$\frac{n(n-1)}{(\alpha+3)^2} I_{n-2}$
= $\cdots$
=$\frac{n!}{(\alpha+3)^{n-1}} I_1 (-1)^{n-1}$
ここで $I_1 = \int_0^1 r^{\alpha+2} \log r dr = [\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \log r]_0^1 - \frac{1}{\alpha+3} \int_0^1 r^{\alpha+2} dr = -\frac{1}{(\alpha+3)^2}$
以上より $I_n = \frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}}$

よって $F(\alpha,n)$ は収束し、その値は $2^{n+2}\pi\frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}}$
(2)$\alpha=-3$ の時
$I_n=\int_0^1 r^{-1}(\log r)^n dr$
=$[\frac{1}{n+1}(\log r)^{n+1}]_0^1$
= $\begin{cases}\infty & n \text{が奇数の時} \\ -\infty & \text{nが偶数のとき}\end{cases}$
以上（1）、（2）より
$F(\alpha,n)=\begin{cases}\infty & \alpha=-3 \text{で} n \text{が奇数の時} \\ -\infty & \alpha=-3 \text{で} n \text{が偶数のとき} \\ 2^{n+2}\pi\frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}} & \text{それ以外}\end{cases}$

4.3 総評

三次元の極座標変換さえ知っていれば難しくはないでしょう。難易度は 5 段階で 2.5 くらい。

5 5番

5番

平均 μ_1, 分散 σ_1^2 の正規分布に従う 1 群（第一群）の観測値と平均 μ_2、分散 σ_2^2 の正規分布に従う別の 1 群（第二群）の観測値が得られたとする。ここに $\mu_1,\mu_2(\mu_2\geq\mu_1),\sigma_1^2,\sigma_2^2(\sigma_2\leq\sigma_1)$ は既知である。いずれの群に所属するか不明の個体の観測値 y が新たに得られた時、その個体をいずれかの群に判別したい。
(1) 第 1 群と第 2 群への所属を判別する点を y_* とおくとき、$y\geq y_*$ であれば第 2 群に、$y<y_*$ であれば第 1 群に判別する。このときそれぞれの対応する確率密度関数が交わる小さい方の値として y_* を定めよ。
(2)$\mu_1=1,\mu_2=3,\sigma_1^2=1,\sigma_2^2=\frac{1}{9}$ とするとき、y_* の値を求め、第 1 群に所属する個体が第 2 群に所属すると誤って判定される確率を評価せよ。ただし、$\sqrt{36+16\log 3}\doteqdot 7.320$ とし、標準正規分布関数
$\Phi()=\int_{-\infty}^u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$
にういて、$\Phi(1.335)=0.9091$ とする。

5.1 （1）

(1)$\sigma_2<\sigma_1$ の時
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})$
これを x について解いて、小さいほうの値が y_* である。その値は

$$y_*=\frac{(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}-\frac{\mu_2}{\sigma_2^2})+\sqrt{(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_1\sigma_2})^2+2(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2})\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}}$$

(2)$\sigma_2=\sigma_1$ の時
$x=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$

5.2 （２）

与えられた値を代入すると
$y_* = 2.335$ となる。
よって $X \sim N(1,1)$ とおくと、
$P(X \geq y_*) = P(\frac{X-1}{1} \geq \frac{2.335-1}{1})$
=$1 - \Phi(1.335) = 0.0909$

5.3 総評

計算は非常に複雑だが、考え方は大して難しくはない。（１）はもう少し詳しく書くべきである。（１）で計算間違いをしていないか、（２）で確認できる。難易度は５段階で 2.5 くらい

6 ６番

6 番

確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立で、平均 μ、分散 σ^2 を持つ同一の分布に従うものとする。X_1, X_2, X_3 について、２つの実数係数の一次結合を考え
$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$
$z = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$
と置いたとき、以下の問に答えよ。
(1)Y が μ の不偏推定量（E[Y]=μ）になるように、a_1, a_2, a_3 の満たすべき条件を求めよ。
(2)(1) の条件の下で、Ｙが最小の分散を持つように a_1, a_2, a_3 を決定せよ。
(3)Z^2がσ^2 の不偏推定量（$E(Z^2) = \sigma^2$）になるように、b_1, b_2, b_3 の満たすべき条件を求めよ。
(4)(2) で求めたＹと（３）で求めたＺの共分散は０であることを示せ。

6.1 （１）

$E[Y] = \mu(a_1 + a_2 + a_3) = \mu$ より
$a_1 + a_2 + a_3 = 1$

6.2 （２）

$V[Y] = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$
よって $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ を $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ という条件の下で最小にすればよい。
シュワルツの不等式
$(x,y)^2 \leq || x ||^2 || y ||^2$
を使う。$x = (1,1,1), y = (a_1, a_2, a_3)$ とおくと、
$1 = (x,y)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$
$\frac{1}{3} \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
等号が成立するのは

$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}=\frac{a_3}{1}$
よって $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$ の時、最小となる。

6.3　（2）の別解（こっちの方が良いかも）

$V[Y]=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\sigma^2$
よって $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ を $a_1+a_2+a_3=1$ という条件の下で最小にすればよい。
$f(a)=a_1+a_2+a_3-1, g(a)=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ としてラグランジュの未定乗数法を使うと
$\frac{\frac{\partial g}{\partial a_1}}{\frac{\partial f}{\partial a_1}}=\frac{\frac{\partial g}{\partial a_2}}{\frac{\partial f}{\partial a_2}}=\frac{\frac{\partial g}{\partial a_3}}{\frac{\partial f}{\partial a_3}},\ f(a)=0$
これを解くと $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$
この時に最大または最小となる。
ここで $a_1=1, a_2=0, a_3=0$ とおくと、$\frac{1}{3}<a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$
よって $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$ の時最小となる。

6.4　（3）

$Z^2=b_1^2X_1^2+b_2^2X_2^2+b_3^2X_3^2+2b_1b_2X_1X_2+2b_1b_3X_1X_3+2b_2b_3X_2X_3$
ここで $E[X_1^2]=E[X_2^2]=E[X_3^2]=\sigma^2+\mu^2$
$E[x_1x_2]=E[x_2x_3]=E[x_3x_1]=\mu^2(X_1,X_2,X_3$は独立なので$)$
よって $E[Z^2]=(\sigma^2+\mu^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+2\mu^2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$
=$(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\sigma^2+(b_1+b_2+b_3)^2\mu^2$
よって $b_1+b_2+b_3=0, b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$ となればよい。

6.5　（4）

$Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]$
$E[YZ]=E[(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3)(b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3)]$
=$(\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3)(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{3}b_2\mu^2+\frac{1}{3}b_3\mu^2+\frac{1}{3}b_1\mu^2+\frac{1}{3}b_3\mu^2+\frac{1}{3}b_1\mu^2+\frac{1}{3}b_2\mu^2$
=$(\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3)(\sigma^2+\mu^2)+\frac{2}{3}\mu^2(b_1+b_2+b_3)$
=$0(b_1+b_2+b_3=0$ より$)$
$E[Y]E[Z]=\mu\cdot E[b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3]$
=$0(b_1+b_2+b_3=0$ より$)$
以上より $Cov(Y,Z)=0$

6.6　６番の総評

(2) は知っていないとできないし、(2) を間違えると (4) は絶対にできない。難易度は５段階で 2.5 くらい

全体的な総評

全体的に取り組みやすいと思われる。選択問題は統計の方がやりにくいので、微積分の方を選択する方が良い。

平成１２年度　情報数理系
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　平成１２年度専門２の１番

１番

n 次元列ベクトル $a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}$ とスカラー $u_1, u_2, \cdots u_{n+1}$ が
$u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n + u_{n+1}a_{n+1} = 0$
を満たすとする。$n \times n$ 行列
$A_n = (a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_{n+1}), \quad A_{n+1} = (a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n)$
の行列式を $\mid A_n \mid, \mid A_{n+1} \mid$ と書くとき
$u_n \mid A_{n+1} \mid = -u_{n+1} \mid A_n \mid$
を示せ。

1.1　予備知識

行列式の次のような性質を解答で使う。

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$ (同じ行または列があるとその行列の行列式は０になる。)

1.2　解答

$u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots u_na_n + u_{n+1}a_{n+1} = 0$ より
$a_{n+1} = -\frac{u_1}{u_{n+1}}a_1 - \frac{u_1}{u_{n+1}}a_2 - \cdots - \frac{u_n}{u_{n+1}}a_n$
よって $\mid A_n \mid = \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}(-\frac{u_1}{u_{n+1}}a_1 - \frac{u_2}{u_{n+1}}a_2 - \cdots - \frac{u_n}{u_{n+1}}a_n) \mid$
=$-\frac{u_1}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_1 \mid - \frac{u_2}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_2 \mid \cdots - \frac{u_1}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n \mid$-（A）(予備知識１を使った。)
ここで同じ列を持つ行列の行列式は０なので
$\mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_1 \mid = \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_2 \mid = \cdots \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_{n-1} \mid = 0$

よって（A）より $-u_{n+1}\mid A_n\mid = u_n \mid a_1 \cdots a_{n-1}a_n \mid$
=$u_n \mid A_{n+1}\mid$

1.3　１番の総評

行列式の性質さえ知っていれば簡単。１０問の中では一番易しい問題でしょう。難易度は５段階で１。

2　平成１２年度専門２の２番

２番

$x>0$ において $f(x)>0, f'(x)<0$ であるとき、関数
$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(\mid y\mid)dy$
について次の問に答えよ。
(1)$-u"(x)+u(x)=2f(\mid x\mid)$ を示せ。
(2)$u(x)$ は $x>0$ で単調減少であることを示せ。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$u(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} f(\mid y\mid)dy+\int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} f(\mid y\mid)dy$
$u'(x)=-e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy+e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy$
$u"(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy-e^{-x}e^{x}f(\mid x\mid)+e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy-f(\mid x\mid)$
=$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy+e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy-2f(\mid x\mid)$
よって $-u"(x)+u(x)=2f(\mid x\mid)$ が成立する。

2.1.2　（2）

$u'(x)=e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy-e^{-x}\int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy-e^{-x}\int_{-\infty}^{-x} e^{y} f(\mid y\mid)dy$
=$(e^{x}-e^{-x})\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy-e^{-x}\int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy$
ここで $A=(e^{x}-e^{-x})\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y\mid)dy$, $B=e^{-x}\int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y\mid)dy$ とおくと
$A<(e^{x}-e^{-x})\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(x)dy$ ($f(x)$ は $x>0$ で単調減少なので)
=$f(x)(e^{x}-e^{-x})[-e^{-y}]_{x}^{\infty}$
=$f(x)(e^{x}-e^{-x})e^{-x}$
=$f(x)(1-e^{-2x})$
$B>e^{-x}\int_{-x}^{x} e^{y} f(x)dy$
=$f(x)e^{-x}(e^{x}-e^{-x})=f(x)(1-e^{-2x})$ ($f(x)$ は $x>0$ で単調減少なので)
よって $u'(x)=A-B<f(x)(1-e^{-2x})-f(x)(1-e^{-2x})=0$
以上より $u(x)$ は $x>0$ で単調減少である。

2.2 総評

（1）はできるだろうが、（2）はかなり難しい。この解答は（2）において（1）を利用していない。もしかしたら（1）を利用する方法もあるかもしれない。難易度は５段階で４くらい

3 ３番（解答発案者 Y.M）

３番

漸化式
$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,\ \ f_0 = 0, f_1 = 1,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$
により定まるフィボナッチの数列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ とその母関数
$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$
について次の問いに答えよ。
(1)G(x) を用いて $A = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$ と $B = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^n$ を表せ。
(2)(1) の結果を用いて G(x) を x の有理式で表せ。

3.1 解答

3.1.1 （1）

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$
$= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$
$f_0 = 0$ なので
$\frac{G(x)}{x} = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + \cdots = A$
$f_1 = 1$ より
$\frac{G(x)-x}{x^2} = f_2 + f_3 x + f_4 x^2 + \cdots = B$ ー（L）

3.1.2 （2）

$B = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} + f_n) x^n$
$= A + G(x)$
$= (1 + \frac{1}{x}) G(x)$ ー (M)
(L) と (M) より
$\frac{G(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = G(x) + \frac{G(x)}{x}$
$\Leftrightarrow (\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x}) G(x) = \frac{1}{x}$
よって $(1 - x - x^2) G(x) = x$
以上より $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

3.2 ３番の総評

（2）で $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,\ \ f_0 = 0$ が使えるかどうかがポイントでしょう。難易度は５段階で 1.5 くらい

4　４番（解答発案者 N.Y）

４番

次の問に答えよ。
(1) 区間 $[a,b]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ がある定数Kについて
$\mid f_n'(x) \mid < K, \quad (x \in [a,b], \ n = 1,2,\cdots)$
を満たすとする。任意の $x \in [a,b]$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
ならば $f_n(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で０に一様収束することを示せ。
(2) 区間 $[0,\infty)$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
を満たす関数 $f(x)$、及び、ある定数 K について
$\mid f_n(x) \mid \leq \mid f(x) \mid, \ \mid f_n'(x) \mid \leq K \quad (x \in [0,\infty), n = 1,2,\cdots)$
を満たすとする。任意の $x \in [0,\infty)$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
ならば、$f_n(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上で０に一様収束することを示せ。

4.1　解答

4.1.1　（１）

$\forall x \in [a,b] \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ なので
$\forall x \in [a,b]\ \forall\epsilon > 0\ \exists N(x,\epsilon) \forall n \geq N \quad \mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$ ー (A) となる。
$f_n(x)$ が０に一様収束することを示すには、任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ が存在し、$n > N$ に対し任意の x で
$\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$
とできることを証明できればよい。
$\epsilon > 0$ を固定する。
$I > \frac{K(b-a)}{\epsilon/2}$ となるように I をおく。
この区間 [a,b] を I 等分し、$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_I < x_{I+1} = b$ とする。
この x_1〜x_I は (A) より $N(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ が存在する。
$Nmax = max_{i=1,2,\cdots I} N(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ をとると、$n > Nmax$ に対して $\mid f_n(x_i) - 0 \mid < \frac{\epsilon}{2}$-(b)
とできる。ここから任意の点 x で $\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$ とできることを示す。
$x \in [a,b]$ を固定する。
x には I 等分した点の中で x より小さくその中で最も大きい点 x_j が存在する。
１区間の大きさは $I > \frac{K(b-a)}{\epsilon/2}$ より高々$(b-a)/(\frac{K(b-a)}{\epsilon/2}) = \frac{e}{2K}$ となる。
$x - x_j < \frac{e}{2K}$ である。
ここで仮定 $\mid f_n'(x) \mid < K$ より
$\mid f_n(x) - f_n(x_j) \mid < K \cdot \frac{\epsilon}{2K} = \frac{\epsilon}{2}$-(C)
よって $\mid f_n(x) - f_n(x_j) + f_n(x_j) \mid < \mid f_n(x) - f_n(x_j) \mid + \mid f_n(x_j) \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon((B)、(C)$ より)
よって $\mid f_n(x) \mid < \epsilon$
これは任意の x, ϵ で言える。よって題意を示せた。

4.1.2　（2）

仮定より任意の $\epsilon > 0$ に対して $X(\epsilon)$ が存在し、$x > X$ に対し、$\mid f(x) - 0 \mid < \epsilon$ とできる。ー（A）
$f_n(x)$ が0に一様収束することを示すには、任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ が存在し、$n > N$ に対し、任意のxで $\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$ とできることを示せばよい。
$\epsilon > 0$ を固定する。
（A）より $X(\epsilon)$ が存在し、$x > X$ に対し、$\mid f(x) - 0 \mid < \epsilon$ すなわち、$x > X$ に対し、$\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$
が示せる。つまり、区間 (X, ∞) は任意のNで（1でもよい）$n > N$ に対し、$\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$ とできる。
区間 $[0, X]$ に関しては $a = 0, b = 1$ として（1）を適用して、ある $N(e)$ で $n > N$ に対し、$\mid f_n(x) - 0 \mid < \epsilon$ とできる。
よって、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(\epsilon)$ をとると、$x \in [0, \infty)$ で一様収束させることができる。

4.2　総評

非常に難しい。（2）は（1）ができれば何とかなるが‥難易度は5段階で5。

5　5番

5番

次の定積分の値を求めよ。
I=$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx$

5.1　解答

$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^4)^2}$ とおく。
$1 + z^4 = 0$ とおくと、$z^4 = -1 = e^{i\pi(1+2n)}$(n は整数)
よって $z = e^{\frac{\pi i}{4}(1+2n)} (n = 0, 1, 2, 3)$
このうち上半平面にあるのは $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$
z_1, z_2 は共に2位の極である。
ここで $Res_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\{(z - z_1)^2 f(z)\}$
=$\lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{4}}} \{\frac{z^2}{(z-e^{\frac{3\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{5\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{7\pi i}{4}})^2}\}'$
=$\frac{\sqrt{2}i - \sqrt{2}}{16} + \frac{3}{16\sqrt{2}}(1 - i)$
同様に $Res_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz}\{(z - z_2)^2 f(z)\}$
=$\lim_{z \to e^{\frac{3\pi i}{4}}} \{\frac{z^2}{(z-e^{\frac{\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{5\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{7\pi i}{4}})^2}\}'$
=$\frac{\sqrt{2}i + \sqrt{2}}{16} - \frac{3}{16\sqrt{2}}(1 + i)$
ここで次のように積分路 C_1, C_2 を設定する。
$C_1 = [-R, R], C_2 = \{\mid z \mid = R, Imz \geq 0\}$(R は実数)
また $z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと $\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$
よって $\lim_{R \to \infty} \mid \int_{C_2} f(z) dz \mid \leq \lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \mid \frac{z^2}{(1+z^4)^2} \mid\mid dz \mid$
$= \lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \mid \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^4 e^{4i\theta} + 1)^2} \mid R d\theta$
$\leq \lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \frac{R^3}{\mid R^4 e^{4i\theta} + 1 \mid\mid R^4 e^{4i\theta} + 1 \mid}$

$\leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{R^3}{(|R^4e^{4i\theta}|-1)(|R^4e^{4i\theta}|-1)}$(| $\alpha+\beta$ |≥| α | − | β | を使った)
=$\lim_{R\to\infty}\pi\frac{R^4}{(R^4-1)^2}$ =0-(１)
さらに I=$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx$ ($\frac{x^2}{(1+x^4)^2}$の対称性より)
よって $I=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2}f(z)dz$
$=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)dz$ （（１）より)
=$\frac{1}{2}$・$2\pi i\{Res_{z=z_1}f(z)+Res_{z=z_2}f(z)\}$ =$\pi i\{Res_{z=z_1}f(z)+Res_{z=z_2}f(z)\}$
=$\pi i\{\frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{16}+\frac{3}{16\sqrt{2}}(1-i)+\frac{\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{16}-\frac{3}{16\sqrt{2}}(1+i)\}$
=$\pi i\{\frac{\sqrt{2}}{8}i-\frac{3i}{8\sqrt{2}}\}$
=$\pi\{\frac{3}{8\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{8}\}$
=$\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$

5.2　５番の別解

$x^2=t$ とおくと、$\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx=\int_0^\infty\frac{t}{(1+t^2)^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}dt$
$f(z)=\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}$ とおくと $f(z)$ の上半平面における極は $z=i$ で２位の極。
$Res_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\frac{\sqrt{z}}{(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{\frac{1}{2\sqrt{z}}(z+i)^2-2\sqrt{z}(z+i)}{(z+i)^4}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{16}$
ここで積分路 $C_1=[0,R], C_2=Re^{i\theta}(0\leq\theta\leq\pi), C_3=[-R,0]$ を設定し $C=C_1+C_2+C_3$ とおく。
留数定理より $\int_C f(z)dz=2\pi iRes_{z=i}f(z)=\frac{2\sqrt{2}\pi(1+i)}{16}$ ー(１)
$\int_{C_1}f(z)dz$ において $z=xe^{i\pi}$ とおくと
$-\int_{C_3}f(z)dz=\int_{C_1}\frac{\sqrt{x}e^{\frac{i\pi}{2}}}{(1+x^2)^2}e^{i\pi}dx=-i\int_{C_1}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx=-i\int_{C_1}f(z)dz$
これより $\int_{C_3}f(z)dz=i\int_{C_1}f(z)dz$
また $\deg((1+t^2)^2)\geq\deg(\sqrt{t})+2$ なのでジョルダンの補題より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz=(1+i)\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2\sqrt{2}\pi(1+i)}{16}$ （(1) より）
よって $\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2\sqrt{2}\pi}{16}$
以上より $\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$

5.3　５番の総評

基本的な複素積分の問題であるが、教科書レベルの解法（始めの方の解き方）だと計算が非常に複雑。最悪の場合１時間以上かかる。別解のような解法であれば計算量は５分の１程度になる。是非このような解法も身につけましょう。難易度は５段階で 3.5 くらい。

6 6番

6番

次の問に答えよ。

(1)f(x) を条件

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid f(x)dx < \infty$

を満たす関数とする。恒等式

$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

を証明せよ。

(2) $t > 0, -\infty < x < \infty$ について

$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

で定義される関数 $g(t,x)$ は

$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2}$

を満たすことを示せ。

(3) G(t,x)=$\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy$

で定義される関数 $G(t,x)$ は

$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}$

を満たすことを示せ。

6.1 解説

6.1.1 （１）

$y - x \leq 0$ のとき、$max(y-x,0) = 0$

$y - x \geq 0$ のとき、$max(y-x,0) = y - x$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

=$\int_{-\infty}^{x} 0 \cdot f(y)dy + \int_{x}^{\infty}(y-x)f(y)dy$

=$\int_{x}^{\infty} yf(y)dy - x\int_{x}^{\infty} f(y)dy$

よって $\frac{d}{dx}\{\int_{x}^{\infty} yf(y)dy - x\int_{x}^{\infty} f(y)dy\}$

=$-xf(x) - \int_{x}^{\infty} f(y)dy + xf(x)$

=$-\int_{x}^{\infty} f(y)dy$

$\frac{d}{dx}\{-\int_{x}^{\infty} f(y)dy\} = f(x)$

以上より $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

6.1.2 （２）

$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}(-\frac{1}{2})e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(\frac{x^2}{2t^2})$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2t}\}$ =$\frac{1}{2\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1 + \frac{x^2}{t}\}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(-\frac{x}{t})$ =$-\frac{x}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ =$-\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}} - \frac{x}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}(-\frac{x}{t})$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1 + \frac{x^2}{t}\}$

以上より $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

6.1.3　（３）

$\int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)dx < \infty$
$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid g(t,x)dx < \infty$
なので（１）より
（右辺）＝ $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy$ =$\frac{1}{2}g(t,x)$
（左辺）＝ $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy$ =$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty}(y-x)g(t,y)dy$
=$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy - x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
ここで $\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = \frac{\partial}{\partial t}[-\frac{t}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}]_{x}^{\infty}$
=$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{t}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}})$
=$\frac{1}{2}g(t,x) + \frac{x^2}{2t}g(t,x)$
また $0 < \epsilon < t < \eta$ の範囲内で $g(t,y)$ を考える。（ϵ は任意に小さく、 η は任意に大きく取れるので）
$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1+\frac{x^2}{t}\}$
なので $\mid \frac{\partial g}{\partial t} \mid \leq e^{-Cx^2}\cdot\{\frac{C_1}{\epsilon^3} - \frac{C_2}{\epsilon^2}\}(C_1, C_2, C$ はある定数)
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Cx^2}\cdot\{\frac{C_1}{\epsilon^3} - \frac{C_2}{\epsilon^2}\}dx < \infty$
よって微分積分の順序交換可能定理より
$-x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$ =$-x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} g(t,y)dy$ =$-x\int_{x}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,y)dy$ =$-\frac{x}{2}\int_{x}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t,y)dy$
=$\frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy - \frac{x}{2t^2}\int_{x}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
ここで $-\frac{x}{2t^2}\int_{x}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
=$\frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-\frac{y^2}{2t}})'dy$
=$\frac{x}{2t}(-x\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}) - \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
=$-\frac{x^2}{2t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} - \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
以上より $-x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = -\frac{x^2}{2t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} = -\frac{x^2}{2t}g(t,x)$
よって（左辺）＝ $\frac{1}{2}g(t,x) + \frac{x^2}{2t}g(t,x) - \frac{x^2}{2t}g(t,x) = \frac{1}{2}g(t,x)$
よって $\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}$

6.2　６番の総評

（１）、（３）はかなり難しいと思う。計算も複雑。（３）において微分積分の順序交換可能定理が使えることを示すのが特に難しい。選ばない方が良いかもしれない。難易度は５段階で５。

7　７番

７番

確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ は互いに独立で
$E[Y_i] = \theta x_i,\quad Var(Y_i) = x_i^2,\ i = 1, 2, \cdots n$
である。ただし、$x_1, x_2, \cdots x_n$ は与えられた定数であり、すべての i で $x_i \neq 0$ である。θ を推定したい。以下の問に答えよ。
(1)$\sum_{i=1}^n (Y_i - \theta x_i)^2 / x_i^2$ を最小にする $\theta = \hat{\theta}$ を求めよ。
(2)$\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示せ。
(3)$\hat{\theta}$ の分散 Var($\hat{\theta}$) を求めよ
(4)$\sum_{i=1}^n a_i Y_i$ の形の不偏推定量の中で $\hat{\theta}$ が最も分散を小さくすることを示せ。

7.1　予備知識

7.1.1　ヘッセ行列について（すいません、これはこの問題には必要ありません。）

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ を C^2 関数とし、点 P=$(a_1, a_2, \cdots a_n)$ で
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$
を満たすとする。n 次対称行列
$[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)]$
(f のヘッセ行列という) の固有値が
(1) すべて正ならば $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極小
(2) すべて負ならば $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極大
(3) 正負が混合しているならば、$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極値をとらず、(P,f(P)) がグラフの峠の点となる。

7.1.2　ラグランジュの未定乗数法について

n と k を自然数で $k < n$ とする。n 次元閉領域Ｄ上に、k+1 個の C^1 関数 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$,$\phi_1(_1, x_2, \cdots x_n) \cdots \phi_k(_1, x_2, \cdots x_n)$ が与えられているとする。$\lambda_1, \cdots \lambda_k$ を k 個のパラメータとして
$F(x_1, \cdots x_n, \lambda_1, \cdots \lambda_k) = f(x_1, x_2, \cdots x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_j(x_1 \cdots x_n)$
とおく。
条件　$\phi_j(x_1 \cdots x_n) = 0\ \ (1 \leq j \leq k)$
のもとでの $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ の最大値、最小値を与える点、$(x_1, x_2, \cdots x_n)$ は、次の（１）～（３）のどれかの点である。
（１）D の境界の点で、$\phi_j(x_1 \cdots x_n) = 0, (1 \leq j \leq k)$ を満たす点。
（２）D から R^k への写像
Φ：$(x_1, x_2, \cdots x_n) \to (\phi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots \phi_k(x_1 \cdots x_n))$
のヤコビ行列 $d\Phi$ の階数が k より小さくなる点
（３）$x_1, \cdots x_n, \lambda_1, \cdots \lambda_k$ を未知数とする次の連立方程式の解を与える点:
$F_{x_i} = 0 (1 \leq i \leq n),\qquad \phi_j = 0\ \ (1 \leq j \leq k)$
（１)、（２）はあまり気にしなくてもいいと思う。（３）についてしか言及していない本もある。これはあくまで必要条件であるので、求まった点で本当に最大、最小となるかについては確かめる必要がある。

7.2 解説

7.2.1 （1）番

$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\theta x_i)^2}{x_i^2}=-2\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\theta x_i}{x_i})$
$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\theta x_i}{x_i})=0$ を解くと
$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}=n\theta \Leftrightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$
ここで増減表を書くと

θ	$\cdots$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$	$\cdots$
($\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2$)'	-	0	+
$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

表 1: 増減表

となり $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2$ を最小にする $\theta=\hat{\theta}$ は $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$

7.2.2 （2）番

$E[\hat{\theta}]=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}]=\frac{1}{n}\theta\cdot n=\theta$

7.2.3 （3）番

$V[\hat{\theta}]=V[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}]=\frac{1}{n^2x_i^2}x_i^2\cdot n=\frac{1}{n}(Y_1\cdots Y_n$は独立なので$)$

7.2.4 （4）番

$\sum_{i=1}^{n}a_iY_i$ が θ の不偏推定量であるので
$E[\sum_{i=1}^{n}a_iY_i]=\theta\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\theta$
よって $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$
また $V[\sum_{i=1}^{n}a_iY_i]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2(Y_1,Y_2,\cdots Y_n$は独立なので$)$
よって $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$ という条件の下で $\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2$ の最小値が $\frac{1}{n}$ であることを示せばよい。
ラグランジュの未定乗数法を使うと
$f(a)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-1$
$g(a)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2$ において
$\frac{f_{a_1}}{g_{a_1}}=\frac{f_{a_2}}{g_{a_2}}=\cdots=\frac{f_{a_n}}{g_{a_n}}$ より
$\frac{x_1}{2a_1x_1^2}=\frac{x_2}{2a_2x_2^2}=\cdots\frac{x_n}{2a_nx_n^2}$
よって $a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n$
$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$ より $a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n=\frac{1}{n}$
以上より $a_1=\frac{1}{nx_1},a_2=\frac{1}{nx_2},\cdots a_n=\frac{1}{nx_n}$ において最大値または最小値を取る可能性がある。
このとき $\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$

また $a_1=\frac{1}{2nx_1}, a_2=\frac{3}{2nx_1}, a_i=\frac{1}{nx_i}(3\le i\le n)$ とおくと、
$\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2=\frac{2n+1}{2n^2}>\frac{1}{n}$
以上より $\sum_{i=1}^n a_ix_i=1$ の下での $\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2$ の最小値は $\frac{1}{n}$ なので $\sum_{i=1}^n a_iY_i$ の形の中で $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}$ が分散を最も小さくする推定量である。

7.3 ７番の総評

（３）までは統計の知識があれば難しくはないが、（４）はラグランジュの未定乗数法を使いこなせないとちょっとやりにくい。ただ１０問の中では比較的やりやすい問題。難易度は５段階で２くらい。

8 ８番（解答発案者 S.N）

８番

$N(t), t\in T=[0,\infty)$ は時刻 t までに、ある店に到着した店の数を表すとし、(1)N(0)=0,(2) 任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n, t_i\in T$ に対して、$N(t_2)-N(t_1), N(t_3)-N(t_2),\cdots N(t_n)-N(t_{n-1})$ が互いに独立、(3) 任意の $s,t\in T$ に対し、$P(N(t+s)-N(s)=x)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, x=0,1,2,\cdots$
を満たすとする。ただし、λ は正の定数、店に到着した客は、当たる確率 $p>0$ のくじを引き、当たった客の時刻 t までの総数を $N_1(t)$、外れた客の時刻 t までの総数を $N_2(t)$ とする。m,n を非負の整数として次の問に答えよ。
(1) 条件付き確率
$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)$
を求めよ。
(2) 確率
$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n)$
を求めよ。
(3)$N_1(t)$, と $N_2(t)$ が独立であることを示せ。

8.1 解説

8.1.1 （1）

$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)$ は (m+n) 人の客が時刻 t までに来たという条件の下でくじに当たった客が m 人、外れた客が n 人という確率なので
${}_{m+n}C_m p^m(1-p)^n$

8.1.2 （2）

$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)=\frac{P((N_1(t)=m,N_2(t)=n)\cap(N(t)=m+n))}{P(N(t)=m+n)}=\frac{P((N_1(t)=m,N_2(t)=n))}{P(N(t)=m+n)}$
ここで条件より $P(N(t)=m+n)=P(N(t)-N(0)=m+n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}$
よって $P((N_1(t)=m, N_2(t)=n))=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}{}_{m+n}C_m p^m(1-p)^n$
$=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!}p^m(1-p)^n$

8.1.3 （３）

$\{N_1 = m\} = \{N_1 = m, N_2 = 0\} \cup \{N_1 = m, N_2 = 1\} \cup \cdots$
$=\cup_{n=0}^{\infty}\{N_1 = m, N_2 = n\}$ (ただし $\{N_1 = m, N_2 = p\} \cup \{N_1 = m, N_2 = q\} = \phi(p \neq q)$)
よって $P(N_1(t) = m) = P(\cup_{n=0}^{\infty}\{N_1 = m, N_2 = n\})$
$=\sum_{n=0}^{\infty} P(N_1 = m, N_2 = n)$(確率測度の完全加法性より)
$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!} p^m q^n$(（２）より、q=1-p とした)
$=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!} p^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda tq)^n}{n!} = \frac{e^{(q-1)\lambda t}(\lambda t)^m p^m}{m!} = \frac{e^{-p\lambda t}(\lambda t)^m p^m}{m!}$
同様に $P(N_2(t) = n) = \frac{e^{-q\lambda t}(\lambda t)^n q^n}{n!}$
よって $P(N_1(t) = m)P(N_2(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!} p^m q^n = P(N_1(t) = m, N_2(t) = n)$
以上より $N_1(t)$ と $n_2(t)$ は独立である。

8.2 ８番の総評

（１）と（２）はそこまでではないが、（３）はかなり難しい。部分点はとれるだろうが、完答は極めて難しいだろう。難易度は５段階で４くらい。

9 ９番（解答発案者 T.K）

９番

ある寿命 $T \geq 0$ の分布関数を F(t)、密度関数 f(t) とし、その平均 μ を、分散 σ^2 をとする。その時、寿命 R の分布関数は
$G(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]ds$
で表されるという。
次の問に答えよ。
(1)G(t) は分布関数の性質を満たすことを示せ。
(2) 平均余命 E(R) の寿命の平均 μ と分散 σ^2 で表せ。

9.1 予備知識

9.1.1 分布関数の性質について

分布関数の性質とは次のようなものである。
(1) 任意の $x \in R$ に対して、$0 \leq F(x) \leq 1$ であり、かつ
$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$
(2)F(x) は単調非減少である。$x < y \to F(x) \leq F(y)$
(3)F(x) は右側連続：$\lim_{y \to x+0} F(y) = F(x)$
ただし、この問題においては、$T \geq 0$ より証明することは少し違う。詳しくは解答

9.2　解説

9.2.1　（1）

(1)$t_1 < t_2$ とする。
F(s) は分布関数なので $1 - F(s) \leq 0$
よって $G(t_1) = \frac{1}{\mu}\int_0^{t_1}(1-F(s))ds \leq \frac{1}{\mu}\int_0^{t_2}(1-F(s))ds = G(t_2)$
よって $t_1 < t_2$ ならば $G(t_1) \leq G(t_2)$
(2)$G(\infty) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(1-F(s))(s)'ds$
=$\frac{1}{\mu}\{[(1-F(s))s]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(s)\cdot sds\}$
=$\frac{1}{\mu}\{0+\mu\}$ ー (A)
=1
(A) について
$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds$
$s > 1$ の時 $\int_t^{\infty} f(s)ds < s\int_t^{\infty} f(s)ds < \int_t^{\infty} sf(s)ds$
$t \to \infty$ とする時、$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} f(s)ds = 0, \lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} sf(s)ds = 0$（平均が存在するので）
よってはさみ打ちの原理より $\lim_{t\to\infty} s\int_t^{\infty} f(s)ds = 0$
また $G(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^0[1-F(s)]ds = 0$
(3)$\lim_{t\to x+0} G(t)$
=$\lim_{t\to x+0}\int_0^t(1-F(s))(s)'ds$
=$\lim_{t\to x+0}[(1-F(s))s]_0^t + \int_0^t f(s)sds$
=$\lim_{t\to x+0}\{(1-F(t))t + \int_0^t f(s)sds\}$
=$(1-F(x))x + \int_0^x f(s)sds$(F は右連続関数なので)
=$\int_0^x(1-F(s))(s)'ds$
=$\int_0^x(1-F(s))ds$
=G(x)
よって G は右連続関数である。

9.2.2　（2）

$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\mu}(1-F(t)) = g(t)$
よって
E[R]=$\int_0^{\infty} tg(t)dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} t(1-F(t))dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} t\{\int_0^{\infty} f(s)ds - \int_0^t f(s)ds\}dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_t^{\infty} tf(s)dsdt$
ここで $tf(s)$ は非負可測関数なのでフビニの定理より積分の順序を交換して
$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_0^s tf(s)dtds$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^s tdt\int_0^{\infty} f(s)ds$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\frac{s^2}{2}f(s)ds$
=$\frac{1}{2\mu}(\sigma^2+\mu^2)$

9.2.3 （2）（別解）

$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty t(1-F(t))dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(t))(\frac{1}{2}t^2)'dt$
=$\frac{1}{\mu}\{[(1-F(t))\frac{1}{2}t^2]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)\frac{1}{2}t^2dt\}$
$s>1$ とおくと $\int_t^\infty f(s)ds < s^2\int_t^\infty f(s)ds < \int_t^\infty s^2 f(s)ds$
ここで分散が存在するので、はさみ打ちの原理を使って $\lim_{t\to\infty} s^2\int_t^\infty f(s)ds = 0$
よって $\frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(t))(\frac{1}{2}t^2)'dt = \frac{1}{2\mu}\int_0^\infty f(t)t^2dt = \frac{1}{2\mu}(\sigma^2+\mu^2)$

9.3 ９番の総評

これは分布関数の性質についてちゃんと知っていないとできない。ちょっとやりにくいかも。難易度は５段階で 4.5 くらい

10 １０番

１０番

確率変数 $X_1, \cdots X_n$ は独立に、平均 λ のポアソン分布に従うとする。このとき次の問に答えよ。
(1)$T = X_1 + \cdots + X_n$ は平均 $n\lambda$ のポアソン分布に従うことを示せ。
(2) ある非負定数 x を固定する。次の統計量
Y=$\begin{cases} 1 & (X_1 = x \text{ の時}) \\ 0 & (X_1 \neq x \text{ の時}) \end{cases}$
は平均 λ のポアソン分布の x における確率 $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ の不偏推定量であることを示せ。
(3)T=t が与えられたときの条件付き確率 $P(Y=1|T=t)$ を求めよ。

10.1 解説

10.1.1 （1）

X が平均 λ のポアソン分布に従う時、積率母関数 $M(\theta)$ は
$M(\theta) = E[e^{\theta x}] = \sum_{x=0}^\infty e^{\theta x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$
=$e^{-\lambda}\sum_{x=0}^\infty \frac{(e^\theta\lambda)^x}{x!}$
=$e^{-\lambda}e^{e^\theta\lambda}$
よって $X_1 + X_2 + \cdots X_n$ の積率母関数 $M_n(\theta)$ は
$M_n(\theta) = E[e^{\theta(X_1+X_2+\cdots X_n)}]$
=$\{E[e^{\theta X}]\}^n (X_1, X_2, \cdots X_n$は独立同分布なので)
=$e^{-n\lambda}e^{ne^\theta\lambda}$
よって $M_n'(\theta) = e^{-n\lambda}e^{ne^\theta\lambda}ne^\theta\lambda$
以上より $M_n'(0) = n\lambda$
以上より T は平均 $n\lambda$ のポアソン分布に従う。

10.1.2　（２）

$E[Y]=1\cdot P(X_1=x)+0\cdot P(X_1=0)$
=$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$
よって Y は $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ の不偏推定量。

10.1.3　（３）

$P(Y=1|T=t)=\frac{P((Y=1)\cap(T=t))}{P(T=t)}$
P(T=t)=$e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!}$
$P((Y=1)\cap(T=t))=P(Y=1)\cdot P(X_2+X_3+\cdots+X_n=t-x)$
$=P(Y=1)\cdot P(X_2+X_3+\cdots+X_n=t-x)$
$X_2+X_3+\cdots+X_n$ は平均 $(n-1)\lambda$ のポアソン分布に従うので
$P(X_2+X_3+\cdots+X_n=t-x)=e^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^{t-x}}{(t-x)!}$
また $P(X_1=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$
よって $P(X_2+X_3+\cdots+X_n=t-x)P(X_1=x)=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^t(n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!}$
以上より $P(Y=1|T=t)=\frac{e^{-n\lambda}\frac{\lambda^t(n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!}}{e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!}}$
=$\frac{\lambda^t(n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!}\frac{t!}{(n\lambda)^t}$
=$\frac{(n-1)^{t-x}}{n^t}\frac{t!}{x!(t-x)!}$
=$\frac{(n-1)^{t-x}}{n^t}\begin{pmatrix}t\\x\end{pmatrix}$

10.2　１０番の総評

これもポアソン分布の確率量関数及び積率母関数を知っていれば難しくはない。７番と同様にやりやすい問題でしょう。選択すべきです。難易度は５段階で２くらい。

全体的な総評

１番が一番易しい。次に取り組みやすいのが３，７，１０。この４問をやるのが一番いいと思われる。５は解法を知っていれば手を付けるのもいいだろう。２，６、８、９は部分点はとれるかもしれないが、完答は極めて困難。４は部分点も取れないかもしれない。

平成１３年度　情報数理系
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1 番

f(x,y) は二変数 x,y の関数で、２階までの偏導関数がすべて連続であるとする。次の問に答えよ。
(1) 変数変換 $x=e^{\nu}\cos\theta, y=e^{\nu}\sin\theta$ を通じて f を (ν,θ) の関数と見なすとき
$(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})=\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$
を示せ。
(2) さらに $e^{\nu}=r$ とおくことによって、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を変数 r,θ およびそれらによる偏導関数のみを用いて表せ。

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$
よって $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v})$
$=\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
=$(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial y}{\partial v})\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial v})\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
=$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial x}{\partial v})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\frac{\partial y}{\partial v})^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
同様にして $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}+(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\frac{\partial y}{\partial \theta})^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$
ここで $\frac{\partial x}{\partial v}=x, \frac{\partial y}{\partial v}=y, \frac{\partial x}{\partial \theta}=-y, \frac{\partial y}{\partial \theta}=x, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=x, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=y, \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}=-x, \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}=-y$
以上より $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}y^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}-x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}$
=$(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$

1.1.2　（2）

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ より
$x^2+y^2=r^2$, よって $r=\sqrt{x^2+y^2}(r=e^{v}>0)$ より
また $\tan\theta=\frac{y}{x}$ より $\theta=\arctan(\frac{y}{x})$
また $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$
同様にして $\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$
$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$
$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$
よって $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$
$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial \theta}(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial \theta}{\partial x})+\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial x})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$
同様にして
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial \theta}(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial \theta}{\partial y})+\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial y})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$
以上より
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial\theta}{\partial x})+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial\theta}{\partial y})+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial y})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$

1.2　１番の総評

連鎖律の問題。計算は結構複雑だが、これくらいはできなくてはならないでしょう。ちなみにこういった連鎖律の問題がどれくらいできるかによって、微積分がどれくらいできるかが判断できるそうです。難易度は５段階で３。

2　２番

2 番

行列
$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
について次の問に答えよ。

(1)A=LR を満たす下三角行列

L= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix}$

と上三角行列

R= $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & r_4 & r_5 \\ 0 & 0 & r_6 \end{pmatrix}$

を求めよ。

(2)B=RL とおくとき、行列Ａと行列Ｂの固有値はすべて一致することを示せ。

2.1　解説

2.1.1　（１）

$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$E_1A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{5}{8}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\-5&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&\frac{5}{8}&\frac{31}{8}\end{pmatrix}$$

$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}$ とおくと、

$$E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&\frac{5}{8}&\frac{31}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}$$

A=$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{5}{8}&1&0\\-\frac{5}{8}&\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}=LR$

2.1.2　（２）

B=RL=$\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{5}{8}&1&0\\-\frac{5}{8}&\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2\end{pmatrix}$

よって

$\mid A-tE\mid=\begin{vmatrix}\frac{7}{4}&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2\end{vmatrix}=-t^3+6t^2-11t+6=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)(t-3)=0$

$\Leftrightarrow t=1,2,3$

$\mid B-tE\mid=\begin{vmatrix}\frac{7}{4}-t&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}-t&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2-t\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow -t^3+6t^2-11t+6=0$

$\Leftrightarrow t=1,2,3$

よってＡとＢの固有値は一致する。

2.1.3　（２）の別解

行列 A,B の固有方程式が一致することを示す。

$\mid A-\lambda I\mid=\mid LR-\lambda I\mid$

=$\mid LR-\lambda R^{-1}R\mid$

=$\mid R(L-\lambda R^{-1})\mid$

=$\mid R\mid\mid(L-\lambda R^{-1})\mid$

$\mid B-\lambda I\mid=\mid RL-\lambda I\mid$

=$\mid RL-\lambda R^{-1}R\mid$

=$\mid R(L-\lambda R^{-1})\mid$

=$\mid R\mid\mid(L-\lambda R^{-1})\mid$

よって $\mid A-\lambda I\mid=\mid B-\lambda I\mid$ より二つの行列の固有方程式は一致する。

2.2 ２番の総評

LU 分解についての知識があれば（１）がかなり解きやすくなる。もちろん LU 分解を知らなくても解ける。全体として易しめの問題。難易度は５段階で１。

3 ３番

３番

u=u(t) に関する常微分方程式
$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+3t\frac{du}{dt}+u=0 \quad (t>0)$
の一般解を $t=e^s$ とおくことで求めよ。

3.1 解答

$t=e^s$ より $\frac{dt}{ds}=e^s=t$ また $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}$
ここで $\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}$
=$\frac{du}{ds}\frac{1}{t}$
$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{t}\frac{du}{ds})$
=$\frac{-1}{t^2}\frac{du}{ds}+\frac{1}{t^2}\frac{d^2u}{ds^2}$
以上より（与式）$=-\frac{du}{ds}+\frac{d^2u}{ds^2}+3\frac{du}{ds}+u=0$
$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{ds^2}+2\frac{du}{ds}+u=0$
特性方程式を立てると
$\lambda^2+2\lambda+1=0$
$\Leftrightarrow \lambda=-1$
よって $u(s)=C_1e^{-s}+C_2se^{-s}(C_1,C_2$は定数)
$s=\log t$ より
$u(t)=C_1e^{-\log t}+C_2\log te^{-\log t}$
=$\frac{C_1}{t}+\frac{C_2}{t}\log t$

3.2 ３番の総評

かなり取り組みやすい。選択すべき。難易度は５段階で１。

4　4番

4 番

以下の問いに答えよ。（1）積分値
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
を用いて
$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$
の値を求めよ。ただし $a > 0$ とする。
(2)$0 < a < b$ に対して以下の値を求めよ。
$\int_a^b e^{-x^2y}dy$
(3)$0 < a < b$ に対して以下の値を求めよ。
$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$

4.1　解答

4.1.1　（1）

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ において $x = \sqrt{a}y$ とおくと
$\frac{dx}{dy} = \sqrt{a}$　また $x : 0 \to \infty$ のとき $y : 0 \to \infty$
よって $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-ay^2}\sqrt{a}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
よって $\int_0^\infty e^{-ay^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
y を x で置き換えて $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

4.1.2　（2）

$\int_a^b e^{-x^2y}dy = [-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y}]_a^b$
$=\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$

4.1.3　（3）

（2）より
$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx = \int_0^\infty \{\int_a^b e^{-x^2y}dy\}dx$
ここで e^{-x^2y} は非負可測なのでフビニの定理より、
$\int_0^\infty \{\int_a^b e^{-x^2y}dy\}dx = \int_0^\infty e^{-x^2y}dx \int_a^b dy$
$=\frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{\frac{\pi}{y}}dy$
$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}[2y^{\frac{1}{2}}]_a^b$
$=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

4.2　5番の総評

誘導に乗れば極めて易しい。選択すべき。難易度は５段階で 1.5 くらい。

5　5番

5番

X は自然数上に値をとる確率変数で
$P(X=x+1)=\frac{\theta x}{x+1}P(X=x),\quad x=1,2,3\cdots$
を満たすものとする。ここで、θ は $0<\theta<1$ を満たす定数である。このときに次の問いに答えよ。
(1)c=P(X=1) とおくとき、確率関数 P(X=x) を x と θ と c を用いて表せ。
(2)c を θ で表し、確率関数 P(X=x) を x とθ を用いて表せ。
(3)$X_1,X_2,\cdots X_n$ を X が従う分布からの無作為標本とするとき、標本平均 $X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ を θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を用いて表せ。

5.1　解説

5.1.1　（1）

$P(X=x)=\frac{\theta(x-1)}{x}P(X=x-1)$
$=\frac{\theta(x-1)}{x}\frac{\theta(x-2)}{x-1}P(X=x-2)$
= $\cdots$
=$\frac{\theta^{x-1}c}{x}$

5.1.2　（2）

$\sum_{x=1}^{\infty}P(X=x)=1$ ー（A）より
$c\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\theta^{x-1}}{x}=1$
ここで $0<t<1$ の時、
$1+t+t^2+t^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}t^i=\frac{1}{1-t}$
が成立する。この両辺を $(0,\theta)$ で項別積分すると
$\int_0^{\theta}(1+t+t^2+t^3+\cdots)dt=\int_0^{\theta}\sum_{i=0}^{\infty}t^i dt=\int_0^{\theta}\frac{1}{1-t}dt$
よって $\theta+\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^3}{3}+\cdots=-\log(1-\theta)$
これより $1+\frac{\theta}{2}+\frac{\theta^2}{3}+\cdots=-\frac{\log(1-\theta)}{\theta}$
以上より $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\theta^{x-1}}{x}=-\frac{\log(1-\theta)}{\theta}$ なので（A）において
$-\frac{c\log(1-\theta)}{\theta}=1$
$\Leftrightarrow c=-\frac{\theta}{\log(1-\theta)}$
=$\frac{\theta}{\log\frac{1}{(1-\theta)}}$
よって $P(X=x)=\frac{\theta^x}{x\log(\frac{1}{1-\theta})}$

5.1.3　（3）

$f(\theta)=\Pi_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}}{x_i\log(\frac{1}{1-\theta})}$ とおく。
$\log f(\theta)=\log\frac{\theta^{x_1+x_2+\cdots\ x_n}}{x_1x_2\cdots\ x_n\{\log(\frac{1}{1-\theta})\}^n}$
=$\log\theta^{x_1+x_2+\cdots\ x_n}-\log x_1-\log x_2-\cdots\log x_n-n\log(\log\frac{1}{1-\theta})$

よって $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta} - n\frac{\frac{1}{1-\theta}}{\log(\frac{1}{1-\theta})} = 0$
を解くと、
$\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta} = n\frac{\frac{1}{1-\theta}}{\log(\frac{1}{1-\theta})}$
よって $\overline{X} = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} = \frac{-\hat{\theta}}{(1-\hat{\theta})\log(1-\hat{\theta})}$

5.2　５番の総評

（２）で項別積分をするのはなかなか難しい。統計以外のところで悩むだろう。ただ、最尤推定量くらいは求められる必要がある。難易度は５段階で３程度。

6　６番

６番

各成分が０か１の値を取るベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して関数 $\phi(x)$ を
$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$
で定義する。独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots X_n$ は $P(X_i = 1) = p_i, P(X_i = 0) = 1 - p_i, (p_i \geq 0), i = 1, 2, \cdots n$ を満たし、$X = (X_1, X_2, \cdots X_n)$ とする。この時次の問に答えよ。
(1) 全ての i に対して $p_i = p$ であるとき、$\gamma = E[\phi(X)]$ を求めよ。
(2)n=3,k=2 の時、p_1, p_2, p_3 の値が必ずしも等しいとは限らない場合、γ を p_1, p_2, p_3 を用いて表せ。

6.1　解答

6.1.1　（１）

二項分布の再生性より
$\sum_{i=1}^n X_i \ B(n, p)$
よって $\gamma = E[\phi(X)] = P(\sum_{i=1}^n X_i \geq k) = \sum_{k \leq i \leq n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i q^{n-i}$

6.1.2　（２）

$\gamma = p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$

6.2　６番の総評

（１）はこれ以上整理する必要は多分ないと思う。ただ、次のような関係が知られている。
$\sum_{i=0}^k b(i; n, p) = \frac{1}{B(\frac{\phi_1}{2}, \frac{\phi_2}{2})} \int_{\frac{\phi_2 p}{\phi_1 q}}^{\infty} (\frac{\phi_1}{\phi_2})^{\frac{\phi_1}{2}} x^{\frac{\phi_1}{2}-1} (1 + \frac{\phi_1}{\phi_2} x)^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} dx$
この公式の証明は「確率統計演習２　統計　国沢清典　培風館」の１７４ページにあります。
(2) については何も言うことはないだろう。難易度は５段階で１。

全体的な総評

必答の２問は極めて標準的な問題。選択は３，４を選べば良いだろう。難度が４以上の問題は見受けられず、極めて取り組みやすいと言える。

平成１３年度　情報数理系
数理科学分野２　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

(1) 固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

(2)R^3 の部分ベクトル空間

W=$\{x\in R^3|A^n x$ は $n\to\infty$ のとき収束する $\}$

V=$\{\lim_{n\to\infty}A^n x|x\in W\}$

を求めよ。

(3) 零ベクトルでないベクトル $x\in R^3$ に対し、$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n x}{||A^n x||}$ を求めよ。ただし $||\ x\ ||$ はベクトル x の長さを表す。

1.1　解答

1.1.1　（1）

$|\ A-tE\ |=0$ とおくと、

$$\begin{vmatrix}1-t & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1-t & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-t\end{vmatrix}=0$$

これより $(t-1)(2t-1)(t-2)=0$

$\Leftrightarrow t=1,2,\frac{1}{2}$

$t=\frac{1}{2}$ のとき $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$t=1$ のとき $\begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$t=2$ のとき $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

1.1.2　（2）

A は対称行列なので直交行列によって対角化できる。

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ とおくと、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

よって

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n \\ (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n \\ (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{4}{6}2^n \end{pmatrix}$

よって $A^n x$ が $n \to \infty$ のとき収束するためには

$2^n\{\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{2}{6}x_3\} = 0$ であればよい。

よって W は $x_1 + x_2 = 2x_3$ このとき $\lim_{n\to\infty} A^n x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よってVは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる空間。

1.1.3 （3）

$y =^t Px$ とおくと

$A^n x = P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ y $=P\Lambda^n y$

よって $|| A^n x ||= \sqrt{x^T(A^n)^T A^n x}$

$=\sqrt{x^T(P\Lambda^n P^T)^T P\Lambda^n P^T x}$

$=\sqrt{x^T P\Lambda^n P^T P\Lambda^n P^T x}$

$=\sqrt{y^T \Lambda^{2n} y}$

$=\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}$

以上より $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{||A^n x||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(1)$y_3 \neq 0$ の時

$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{||A^n x||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^{2n} y_1^2 + (\frac{1}{2})^{2n} y_2^2 + y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{4})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \overrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{y_3} P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$=P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(2) $y_3=0, y_2\neq 0$ の時

$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n x}{||A^n x||}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2+y_2^2+2^{2n}y_3^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2+y_2^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n y_1\\ y_2\\ 0\end{pmatrix}\overrightarrow{n\to\infty}\ \frac{1}{y_2}P\begin{pmatrix}0\\ y_2\\ 0\end{pmatrix}$

= P $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$

(3) $y_3=y_2=0(y_1\neq 0)$ の時

$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n x}{||A^n x||}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n y_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

1.2　１番の総評

（３）の計算はかなり複雑なため、ちょっとやりにくいかも。難易度は５段階で 3.5 くらい。

2　２番

２番

$[0,\infty)$ で定義された関数 x(t) に関する積分方程式
$x(t)+a(t)\int_0^t x(s)ds=b(t)\ \ (t\geq 0)$
を考える。ただし、$a(t), b(t)$ は実数値関数とする。
(1)y(t)=$\int_0^t x(s)ds$ とおく。y(t) のみたす微分方程式を導き、それを解いて解 x(t) を関数 a(t),b(t) を用いて表せ。
(2)a(t),b(t) は有界であり、さらに $\inf_{t\geq 0}a(t)>0$ および $\lim_{t\to\infty}b(t)=0$ を仮定する。この時
$\lim_{t\to\infty}=0$
となることを示せ。

2.1　解答

2.1.1　（１）

$y(t)=\int_0^t x(s)ds$ より $\frac{dy}{dt}=x(t)$
よって与式は
$\frac{dy}{dt}+a(t)y(t)=b(t)$
積分因子として、$e^{\int_0^t a(s)ds}$をかけると
$\frac{dy}{dt}e^{\int_0^t a(s)ds}+a(t)y(t)e^{\int_0^t a(s)ds}=b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
よって $\frac{d}{dt}(ye^{\int_0^t a(s)ds})=b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
$ye^{\int_0^t a(s)ds}=\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C$(C は定数)

これより $y(t)=e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}$
よって $x(t)=\frac{dy}{dt}$
=$-a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+e^{-\int_0^t a(s)ds}b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
=$-a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+b(t)$

2.1.2 （2）

$\inf_{t\geq 0} a(t)>0$ より $\int_0^\infty a(t)dt=\infty$
よって $=\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{Ca(t)}{e^{\int_0^t a(s)ds}}+\frac{a(t)\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}$
$a(t)$ は有界で、$\int_0^\infty a(t)dt=\infty$ より
$\lim_{t\to\infty}\frac{Ca(t)}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
ここで $\lim_{t\to\infty}\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk<\infty$ の時
$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
$\lim_{t\to\infty}\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk=\infty$(または $-\infty$) の時
$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=\lim_{t\to\infty}\frac{b(t)e^{\int_0^k a(s)ds}}{a(t)e^{\int_0^k a(s)ds}}=\lim_{t\to\infty}\frac{b(t)}{a(t)}=0$（ロピタルの定理を使った）
以上より $\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
また条件より $\lim_{t\to\infty} b(t)=0$
よって $\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{t\to\infty} -a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+b(t)$
=0

2.2 ２番の総評

（2）はなかなか難しい。ロピタルの定理を使う。難易度は５段階で 3.5 くらい。

3　３番（解答提案者 T.K）

３番

n を自然数とし、n × n 行列、A_n をその (i,j) 成分 $(1 \leq i, j \leq n)$ が、
i=j=n のとき　1
i=j≠ n のとき　2
$| \ i - j \ | = 1$ のとき　-1
その他のとき　1
で与えられるものとして定義する。例えば、
$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
となる。このとき次の問に答えよ。
(1)det A_n の値を求めよ。
(2)A_3 の逆行列を求めよ。
(3)n を任意の自然数とするとき、A_n の逆行列を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（1）

(n-1) 行に n 行をたすと

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

n 列について余因子展開すると

$$\det A_n = 1 \times (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix} = \det A_{n-1}$$

これを繰り返していくと

$\det A_n = \det A_{n-1} = \cdots = detA_2 = 1$

3.1.2 （2）

吐き出し法により、逆行列を求めると

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.1.3 （3）

$A_n^{-1} =| b_{ij} |= \min(i,j) \;\; 1 \leq i,j \leq n$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & n \end{pmatrix}$

と仮定する。A_2^{-1} では満足する。

n 行に n+1 行を足すには (n+1) × (n+1) 行列

B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$

を左からかければよく、n 列に n+1 列を足すには (n+1) × (n+1) 行列

C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}$

を右からかければよい。この時

$$BA_{n+1}C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A'_n$$ となる。

ここで $A'^{-1}_n = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_n^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって $BA_{n+1}C = A'_n$ より

$A_{n+1} = B^{-1}A'_nC^{-1}$

よって $A_{n+1}^{-1} = CA'^{-1}_nB$

$$= C\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & n-1 & n & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} B = C\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & n-1 & n & n \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n & n+1 \end{pmatrix}$$

以上より n+1 の時が言えた。

3.2　３番の総評

（３）はかなり難しい。難易度は５段階で５。

4 4番

4番

関数 f_n を
$f_n(x)=\frac{1}{2}\{\tanh(nx)+1\}$, ただし、$\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
で定義する。このとき、次の問に答えよ。
(1) 次を示せ。
$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x>0 \text{ のとき}\\ \frac{1}{2} & x=0 \text{ のとき}\\ 0 & x<0 \text{ のとき}\end{cases}$
(2)$x\neq 0$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=0$
となることを示せ。
(3)$\phi:R\to R$ を微分可能で、$\mid \phi'(x)\mid \geq M(>0)$ が任意の x に対して成立しているような関数とする。このとき
$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)f_n'(x)dx=\phi(0)$
を示せ。

4.1 解答

4.1.1 （1）

$x>0$ の時
$\lim_{n\to\infty}\tanh(nx)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$
=$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-2nx}}{1+e^{-2nx}}$ =1($\lim_{n\to\infty}e^{-2nx}=0$) より
x=0 の時
$\lim_{n\to\infty}e^0=1$ なので
$f_n(0)=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$
$x<0$ の時
$\lim_{n\to\infty}\tanh(nx)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$
=$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2nx}-1}{e^{2nx}+1}$
=-1(($\lim_{n\to\infty}e^{-2nx}=0$) より)
よって $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x>0 \text{ のとき}\\ \frac{1}{2} & x=0 \text{ のとき}\\ 0 & x<0 \text{ のとき}\end{cases}$

4.1.2 （2）

$f_n'(x)=\frac{1}{2}\frac{n(e^{nx}+e^{-nx})(e^{nx}+e^{-nx})-n(e^{nx}-e^{-nx})(e^{nx}-e^{-nx})}{(e^{nx}+e^{-nx})^2}$
=$\frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2}$
$x>0$ の時、$\lim_{n\to\infty}n=\infty, \lim_{n\to\infty}e^{2nx}=\infty$ より、ロピタルの定理を使って
$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{2xe^{2nx}-2xe^{-2nx}}=0$

$x<0$ の時も同様にして $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2}=0$
以上より $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0$

4.1.3 （3）

$\forall a>0$ に対して
$\int_a^\infty\mid\phi(x)f_n'(x)\mid dx\le\int_a^\infty(Mx+\mid\phi(0)\mid)\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx(\frac{2n}{(e^{nx}+e^{-nx})^2}\le\frac{2n}{e^{2nx}}$ を使った)
=$\int_a^\infty Mx\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx+\int_a^\infty\mid\phi(0)\mid\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx$
=$[-e^{-2nx}Mx]_a^\infty+(M+2n\mid\phi(0)\mid)\int_a^\infty e^{-2nx}dx$-(A)
=$e^{-2na}Ma+(M+2n\mid\phi(0)\mid)\times\frac{1}{2n}\times\frac{1}{e^{2na}}\to 0\ (n\to\infty)$
同様にして $\int_{-\infty}^{-a}\mid\phi(x)f_n'(x)\mid dx\to 0(n\to\infty)$-(B)
ここで $\phi(x)$ は微分可能なので連続関数である。よって $\forall\epsilon>0$
$\phi(0)-\epsilon\le\phi(x)\le\phi(0)+\epsilon$($x$ が十分に０に近い時)
a を十分小さく取ると
$\int_{-a}^a(\phi(0)-\epsilon)f_n'(x)dx\le\int_{-a}^a\phi(x)f_n'(x)dx\le\int_{-a}^a(\phi(0)+\epsilon)f_n'(x)dx$
ここで $\int_{-a}^a(\phi(0)-\epsilon)f_n'(x)dx=(\phi(0)-\epsilon)\int_{-a}^a f_n'(x)dx$
=$(\phi(0)-\epsilon)(f_n(a)-f_n(-a))\to(\phi(0)-\epsilon)((1)$ より $n\to\infty$ の時)
同様にして $\int_{-a}^a(\phi(0)+\epsilon)f_n'(x)dx\to\phi(0)+\epsilon((1)$ より $n\to\infty$ の時)
よって $(\phi(0)-\epsilon)\le\int_{-a}^a\phi(x)f_n'(x)dx\le(\phi(0)+\epsilon)$-(C)
以上より (A)、(B)、(C) から $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty\phi(x)f_n'(x)dx=\phi(0)$ が成立する。

4.2 ４番の総評

（３）がきわめて取り組みにくい。（１）と（２）で部分点は取れるが。難易度は５段階で４。

5 ５番

５番

複素関数
$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$
について次の問に答えよ。
(1)f(z) は円環領域 $D:1<\mid z-2\mid<4$ において正則である。f(z) をＤにおいて
$f(z)=\sum_{m=1}^\infty\frac{a_{-m}}{(z-2)^m}+\sum_{n=0}^\infty a_n(z-2)^n$
の形にローラン展開したときの a_{-m},a_n を求めよ。
(2)C は複素平面上の円 $\mid z\mid=3$ で向きが反時計周りのものとする。積分
$I=\int_C f(z)dz$
の値を求めよ。

5.1 解答

5.1.1 （1）

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(z+2)^2}$
ここで $1<\mid z-2\mid<4$ のとき
$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-(2-z)}=\frac{1}{2-z}\frac{1}{\frac{1}{2-z}-1}$
$=\frac{-1}{2-z}\frac{1}{1-\frac{1}{2-z}}$
$1<\mid z-2\mid$ より $\mid\frac{1}{2-z}\mid<1$ なので
$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2-z}(1+(\frac{1}{2-z})+(\frac{1}{2-z})^2+(\frac{1}{2-z})^3+\cdots)$
$=\frac{-1}{2-z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2-z})^n$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(2-z)^{n+1}}$
$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}$
また $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4(1+\frac{z-2}{4})}$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{z-2}{4})}$
$\mid z-2\mid<4$ より $\mid\frac{z-2}{4}\mid<1$
よって $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}(1+(-\frac{z-2}{4})+(-\frac{z-2}{4})^2+\cdots)$
$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z-2}{4})^n$
$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n(z-2)^n$ ー（A）
（A）の両辺を z で微分して
$\frac{-1}{(z+2)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n n(z-2)^{n-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)(z-2)^n$
以上より $f(z)=\frac{1}{9}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}-\frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n(z-2)^n+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)(z-2)^n$
$=\frac{1}{9}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}\{-\frac{1}{36}(\frac{-1}{4})^n+\frac{1}{12}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)\}(z-2)^n$
以上より $a_{-m}=\frac{1}{9}(-1)^{m+1}$
$a_n=\{-\frac{1}{36}(\frac{-1}{4})^n+\frac{1}{12}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)\}$

5.1.2 （2）

C_1 を $\mid z-1\mid=0.5, C_2$を $\mid z+2\mid=0.5$ とおくと、$f(z)$ はCとその内部（ただし C_1,C_2 の内部をのぞく）で正則なので
コーシーの積分定理より
$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$
ここで $\int_{C_1}f(z)dz=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+2)^2}}{z-1}dz$,$f_1(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$ とおくと、$f_1(z)$ は C_1 とその内部で正則なので
$\int_{C_1}f(z)dz=2\pi i f_1(1)=\frac{2\pi i}{9}$
同様にして $\int_{C_2}f(z)dz=\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z-1}}{(z+2)^2}dz$
$f_2(z)=\frac{1}{z-1}$ とおくと、$f_2(z)$ は C_2 とその内部で正則なのでグルサの定理より
$\int_{C_2}\frac{f_2(z)}{(z+2)^2}=\frac{2\pi i}{1!}f_2'(-2)$
$=2\pi i\frac{-1}{(-2-1)^2}$
$=-\frac{2\pi i}{9}$
よって $\int_C f(z)dz=\frac{2\pi i}{9}-\frac{2\pi i}{9}=0$
以上より $I=0$

5.2　５番の総評

共に複素積分の基本的な問題ではあるが、（１）は $\frac{1}{(z+2)^2}$ のローラン展開がなかなか難しいので取り組みやすいとは言えない。難易度は５段階で３。

6　６番

６番

３階常微分方程式に関する初期値問題

$$\begin{cases} u^{(3)} - 7u' + 6u = 0 (0 < x < \infty) \\ u(0) = u'(0) = 0, u"(0) = 1 \end{cases}$$

の解 u=u(x) を求め、$x > 0$ の時 $u(x) > 0$ を示せ。

6.1　解答

特性方程式を立てると、
$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$
よって $\lambda = 1, 2, -3$
よって u(x) の一般解は $u(x) = C_1 e^x + c_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$ (C_1, C_2, C_3は定数)
ここで $u'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{-3x}$
$u"(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{-3x}$
であり初期条件を代入すると

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{1}{5} \\ C_3 = \frac{1}{20} \end{cases}$$

よって $u(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{1}{20}e^{-3x}$
ここで $u'(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$x > 0$ において $e^{2x} > e^x$ より
$u'(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$> \frac{3}{20}e^x - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$x > 0$ において $e^x > e^{-3x}$ より
$u'(x) > \frac{3}{20}e^x - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$> \frac{3}{20}e^{-3x} - \frac{3}{20}e^{-3x} = 0$
よって $x > 0$ において $u'(x) > 0$

また $u(0)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=0$
以上より $x>0$ の時 $u(x)>0$

6.2 ６番の総評

極めて取り組みやすい。１０問の中では１番簡単である。選択すべき。難易度は５段階で１。

7 ７番

７番

区間 [0,1] からランダムに１点を取りその点をＸとする。次に、区間 [0,X] からランダムに１点を取りその点をＹとし、区間 [X,1] からランダムに１点を取りその点を Z とする。そのとき次の問に答えよ。
(1)X=x を与えた時、Y,Z の条件付き同時密度を求めよ。
(2)(X,Y,Z) の同時密度を求めよ。
(3)Y,Z の同時密度を求めよ。
(4)Y,Z の平均、分散、共分散、相関係数を求めよ。

7.1 解説

7.1.1 （１）

X=x を与えた時、Y,Z は独立になる。よって
$f_{YZ|X}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-x}$ $(x\neq 0,1$ の時)

7.1.2 （２）

$f_{YZ|X}=\frac{f_{XYZ}(x,y,z)}{f_X(x)}$
$f_X(x)=1$ $(0\leq x\leq 1)$ なので
$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{1}{x(1-x)}$ $(0\leq y\leq x\leq z\leq 1)$

7.1.3 （３）

$f_{YZ}(y,z)=\int_y^z\frac{dx}{x(1-x)}$
$=\int_y^z(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x})dx$
$=[\log\mid x\mid-\log\mid 1-x\mid]_y^z$
=$\log\mid\frac{1-y}{y}\mid+\log\mid\frac{z}{1-z}\mid$

7.1.4 （4）

$E[Y]=\int_0^1\{\int_x^1\{\int_0^x \frac{y}{x(1-x)}dy\}dz\}dx$
$=\int_0^1\{\int_x^1 \frac{x}{2(1-x)}dzdx$
$=\int_0^1 \frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$
$E[Y^2]=\int_0^1\{\int_x^1\{\int_0^x \frac{y^2}{x(1-x)}dy\}dz\}dx=\frac{1}{9}$
よって $V[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$
以下同様にして $E[Z]=\frac{3}{4},\ E[Z^2]=\frac{11}{18},\ V[Z]=\frac{7}{144}, E[YZ]=\frac{5}{24}$
$Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]=\frac{5}{24}-\frac{3}{16}=\frac{1}{48}$
$\rho=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{V[Y]}\sqrt{V[Z]}}=\frac{3}{7}$

7.2 ７番の総評

少しやりにくい問題。難易度は５段階で 3.5 くらい。

8 ８番

８番

ある非負の連続な１次元確率変数 T の分布関数を F(t), 密度関数を f(t) とする。また、T の期待値は $E[T]<\infty$ とする。次の問に答えよ。
(1)$\lim_{t\to 0} tF(t)=\lim_{t\to\infty} t(1-F(t))=0$ を示せ。
(2)$\int_0^\infty(1-F(t))dt=E[T]$ を示せ。
(3)T を寿命と見るとき、条件付き期待値 $E[T-t|T>t]$ は ある時点 $t(\geq 0)$ での平均余命の関数として知られている。ここではその関数を $R(t)=E[T-t|T>t]$ とおく。このとき
$1-F(t)=\frac{R(0)}{R(t)}\exp\{-\int_0^t \frac{ds}{R(s)}\}$
を示せ。

8.1 解答

8.1.1 （1）

$\lim_{t\to 0} tF(t)=0\cdot 0=0$ (分布関数の性質より $\lim_{t\to 0} F(t)=0$ なので)
$t(1-F(t))=t\int_t^\infty f(s)ds$
ここで $t>1$ のとき
$\int_t^\infty f(s)ds<t\int_t^\infty f(s)ds<\int_t^\infty sf(s)ds$
$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty f(s)ds=0$
$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty sf(s)ds=0$ (平均が存在するので)
よってはさみうちの原理より $\lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty f(s)ds=0$
以上より $\lim_{t\to\infty} t(1-F(t))=0$

8.1.2 （２）

$\int_0^\infty(1-F(t))dt=\int_0^\infty(1-F(t))(t)'dt$
=$[(1-F(t))t]_0^\infty+\int_0^\infty tf(t)dt$
=$\lim_{t\to\infty}t(1-F(t))+E[T]$
=E[T] ((1) より)

8.1.3 （３）

$P(T\le x|T>t)=1-P(T>x|T>t)$
=$1-\frac{P(T>x)}{P(T>t)}$
=$1-\frac{1-F(x)}{1-F(t)}$
=$\frac{F(x)-F(t)}{1-F(t)}$
よって $T>t$ におけるTの条件付き密度関数 $f(x|t)$ は
$f(x|t)=\frac{d}{dx}P(T\le x|T>t)=\frac{f(x)}{1-F(t)}$
よって $R(t)=E[T-t|T>t]$
$=E[T|T>t]-E[t|T>t]$
=$\int_t^\infty\frac{sf(s)}{1-F(t)}ds-t$
ここで常微分方程式
$y'=-\frac{1}{R(t)}y$
を解くと $y=C\exp(-\int_0^t\frac{ds}{R(s)})$(C は定数)
よって $y=\int_\infty^t(1-F(s))ds$ が微分方程式 $y'=-\frac{1}{R(t)}y$ の解である場合、解の一意性より
$y=\int_\infty^t(1-F(s))ds=C\exp(-\int_0^t\frac{ds}{R(s)})$ ー（０）となる。
両辺を微分して、$C=-R(0)$ を言えば良い。
以上より $y=\int_\infty^t(1-F(s))ds$ が微分方程式 $y'=-\frac{1}{R(t)}y$ の解であることを示す。
$y=\int_\infty^t(1-F(s))ds$ より $y'=1-F(t)$ ー（１）
$R(t)=\int_t^\infty\frac{sf(s)}{1-F(t)}ds-t$ ー（２）より
$-R(t)(1-F(t))=t(1-F(t))-\int_t^\infty sf(s)ds$
よって $t(1-F(t))=\int_t^\infty sf(s)ds-R(t)(1-F(t))$ ー（A）
また $\int_\infty^t(1-F(s))ds=[s(1-F(s))]_\infty^t-\int_t^\infty f(s)sds$
=$t(1-F(t))-\int_t^\infty f(s)sds$
よって $t(1-F(t))=\int_t^\infty f(s)sds+\int_\infty^t(1-F(s))ds$ ー（B）
(A)、(B) より $-R(t)(1-F(t))=\int_\infty^t(1-F(s))ds=y$
以上より $-\frac{1}{R(t)}y=1-F(t)=y'$（(１）より）
ここで（０）において t=0 とすることによって $C=-E[T]$ をえる。（２番より）
また $R(0)=\int_0^\infty sf(s)ds=E[T]$（(２）より）
よって $C=-R(0)$
以上より題意を示せた。

8.2 ８番の総評

（３）はかなり難しい。統計以外のところで悩みそう。難易度は５段階で４。

9　９番

９番

次のデータは、ある母集団から無作為抽出された 350 の標本が４つのグループに分類されたものとする。
(121,120,79,30)
これらの比率は通常
(0.4,0.3,0.2,0.1)
となることが分かっている。このとき、データがこの分布に適合しているかどうかの検定を有意水準 0.05 で行え。
必要ならば $\chi^{2}_{3,0.05} = 7.8$ を使ってもよい。

9.1　解答

$p = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$,
$\phi = (\frac{121}{350}, \frac{120}{350}, \frac{79}{350}, \frac{30}{350})$
$n_1 = 121, n_2 = 120, n_3 = 79, n_4 = 30$ とおく。
帰無仮説：$H_0 : p = \phi$ 対立仮説：$H_1 : p > \phi$ 有意水準：$\alpha = 0.05$ として検定を行う。
検定統計量 $T = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ は自由度３の χ^2 分布に従う。
$T = \frac{(121-140)^2}{140} + \frac{(120-105)^2}{105} + \frac{(79-70)^2}{70} + \frac{(30-35)^2}{35}$
$=\frac{361}{140} + \frac{225}{105} + \frac{81}{70} + \frac{25}{35}$
$=\frac{923}{140} = 6.592 < 7.8 = \chi^2_{3,0.05}$
よって棄却域には入らないので帰無仮説は棄却されない。

9.2　９番の総評

適合度検定について知っていれば極めて簡単な問題であるが、知らないと手も足も出ない問題であろう。難易度は５段階で 1.5。

10　１０番

１０番

U_1, U_2 を互いに独立で区間 (0,1) の一様分布に従う確率変数とする。$\alpha, \beta > 0$ に対し、$Y_1 = U_1^{\frac{1}{\alpha}}, Y_2 = U_2^{\frac{1}{\beta}}$ とおく。
さらに
$X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2},\ Z = Y_1 + Y_2$
とおく。
(1)(X,Z) の同時確率密度関数を求めよ。
(2)$Z < 1$ という条件の下でのＸの条件付き分布を求めよ。

10.1　解答

10.1.1　（1）

U_1の $p.d.f$ を $f(x)$、分布関数を F(x) とおくと、
$p(Y_1 \leq x) = P(U_1^{\frac{1}{\alpha}} \leq x)$
=$P(U_1 \leq x^{\alpha})$
=$F(x^{\alpha})$
よって Y_1 の p.d.f を $g(x)$ とおくと、
g(y)=$\frac{dF(x^{\alpha})}{dx} = f(x^{\alpha})\alpha x^{\alpha-1}$
=)$\alpha x^{\alpha-1}$($f(x^{\alpha}) = 1$ なので)
同様に Y_2の $p.d.f$ を f(z) とおくと、
$f(z) = \frac{dF(z^{\beta})}{dz} = \beta z^{\beta-1}$
ここで $X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{Y_1}{Z}$ より $Y_1 = ZX, Y_2 = Z(1-X)$
よって $\mid J \mid$= $\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X} & \frac{\partial Y_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X} & \frac{\partial Y_2}{\partial Z} \end{vmatrix}$
= $\begin{vmatrix} Z & X \\ -Z & 1-X \end{vmatrix}$
$= Z(1-X) + ZX = Z$
よって $f_{X,Z}(x,z) = zf_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$= zf_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$
$= z$ •$\alpha(zx)^{\alpha-1}$•$\beta(z(1-x))^{\beta-1}$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$

10.1.2　（2）

$X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Z = Y_1 + Y_2$ より
$0 < X < 1, 0 < Z < 2$
よって $f_Z(z) = \int_0^1 \alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)$　(B はガンマ関数)
$F(z) = \alpha\beta B(\alpha,\beta)\int_0^z z_1^{\alpha+\beta-1}dz_1$
=$\alpha\beta B(\alpha,\beta)\frac{1}{\alpha+\beta}[z_1^{\alpha+\beta}]_0^z$
=$\alpha\beta B(\alpha,\beta)\frac{1}{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}$
また $P(X \leq x, Z \leq z) = F(x,z) = \alpha\beta\int_0^z z_1^{\alpha+\beta-1}dz_1\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx$
=$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1$
よって条件付き分布は $p(X \leq x|Z < 1) = \frac{P(X \leq x, Z \leq 1)}{P(Z \leq 1)}$
$= \frac{F(x,1)}{F(1)}$
=$\frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1}{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)}$
=$\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1$

10.2　１０番の総評

類題をやったことがあればできるだろう。ただ、難度はかなり高い。難易度は５段階で 3.5 くらい。

11　全体的な総評

まず、６番は絶対にやるべき。そして１，２，５，９から３問選択するのがよいと思われる。統計が得意な人は８，１０にも十分取り組めるだろう。３，４，７は取り組めそうに見えるが、難しいのでやらない方がよい。

平成１４年度　情報数理系
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

$f(x,y)$ は $\{(x,y);x>0y>0\}$ で定義された２変数 x,y の関数で、２階までの偏導関数がすべて連続であるものとする。α を定数とし、変数変換
$x=e^{u\cos\alpha-v\sin\alpha}$, $y=e^{u\sin\alpha+v\cos\alpha}$
を通じて f を u,v の関数とみなすとき、$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を変数 u,v による f の偏導関数を用いて表せ。

1.1　解答

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial u})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial u})^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$
$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial v})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial v})^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$
$\frac{\partial x}{\partial u}=x\cos\alpha,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=x\cos^2\alpha$
$\frac{\partial x}{\partial v}=-x\sin\alpha,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=x\sin^2\alpha$
$\frac{\partial y}{\partial u}=y\sin\alpha,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=y\sin^2\alpha$
$\frac{\partial y}{\partial v}=y\cos\alpha,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=y\cos^2\alpha$
よって $\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}=x\cos^2\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$
$\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=-x\sin^2\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$ より
$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=x\frac{\partial f}{\partial x}$
また $\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}=x\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin^2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$
$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=-x\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\cos^2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$ より
$\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=y\frac{\partial f}{\partial y}$
よって$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=x^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y\sin\alpha\cdot x\cos\alpha+y^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y\sin\alpha\cdot x\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial x}$
=$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial x}$
=$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}$
以上より $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}-\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}$

1.2　１番の総評

１３年に引き続きチェインルールの問題。１３年とほぼ同じ内容の問題なので答案はいくらか省略して書いてある。難易度は５段階で３。

2　２番

2 番

次の問いに答えよ。
（1）行列
A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
を直交行列によって対角化せよ。

(2) ２次形式
$Q(x,y) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2yz + 2zx$
の単位球面 $S = \{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ における最大値および最小値を求めよ。また、それらの値をとる S 上の点も求めよ。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$| A - tE | = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 2 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$=0
$\Leftrightarrow t^3 - 4t^2 - t + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (t-1)(t-4)(t+1) = 0$
$\Leftrightarrow t = 1, 4, -1$
t=1 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
t=4 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
t=-1 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
以上より P=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.1.2 （２）

$Q(x,y,z)=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と書ける。ここで

a= $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ =P $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=Pb$ とおくと、

${}^t a={}^t b{}^t P={}^t bP^{-1}$ なので

${}^t aAa={}^t bP^{-1}APb$

$={}^t b\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}b$

$=x'^2+4y'^2-z'^2\leq 4(x'^2+y'^2+z'^2)$

ここで $x'^2+y'^2+z'^2={}^t bb$

$={}^t aP{}^t Pa$

$={}^t aa$

$=x^2+y^2+z^2=1$

よって ${}^t aAa\leq 4$

${}^t aAa=4$ とおくと、$x'^2+4y'^2-z'^2=4(x'^2+y'^2+z'^2)$ より

$x'=0,y'=\pm 1,z'=0$ このとき

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{-2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\pm1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt3}\\\pm\frac{1}{\sqrt3}\\\pm\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

また $-(x'^2+y'^2+z'^2)=-1\leq x'^2+4y'^2-z'^2$

このとき $x'=0,y'=0,z'=\pm1$

よって $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{-2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt2}\\\mp\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$

以上より

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt3}\\\pm\frac{1}{\sqrt3}\\\pm\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$ のとき最大値４　$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt2}\\\mp\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$ の時最小値-1(複合同順)

2.2 ２番の総評

（１）は絶対にできなくてはならない。（２）はラグランジュの未定乗数法でも良いが、この解答の方が計算が楽。行列Ａの固有値の最大値、最小値がそのまま $Q(x,y,z)$ の最大値、最小値になっているのに注目。難易度は５段階で２。

3　３番

3 番

$x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ に対する次の微分方程式系を考える。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$(x_1(0), x_2(0), x_3(0),) = (3, 0, 0)$

(1)$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ を求めよ。
(2)i=1,2,3 に対して、$x_i(t)$ を求め、さらに $\lim_{t\to\infty} x_i(t)$ を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（1）

$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + x_3$ ー（A）
$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + x_3$ ー（B）
$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - 2x_3$ ー（C）
とおいて、（A）～（C）の両辺を足し合わせると
$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) = 0$
よって $(x_1 + x_2 + x_3) = K(K$ は定数)
ここで初期条件より $(x_1 + x_2 + x_3) = 3$

3.1.2　（2）

（１）より $x_1(t) = 3 - x_2(t) - x_3(t)$
これを（B）に代入して
$\frac{dx_2}{dt} = 3 - x_2 - x_3 - 2x_2 + x_3$
=$-3x_2 + 3$
よって $\frac{dx_2}{dt} + 3x_2 = 3$
ここで積分因子として e^{3t} を両辺にかけると
$e^{3t}\frac{dx_2}{dt} + 3x_2e^{3t} = 3e^{3t}$
よって $\frac{d}{dt}(x_2(t)e^{3t}) = 3e^{3t}$
よって $x_2(t)e^{3t} = \int 3e^{3t} = e^{3t} + C$(C は定数)
以上より $x_2(t) = 1 + Ce^{-3t}$
初期条件より $x_2(0) = 0$ なので $C = -1$
よって $x_2(t) = 1 - e^{-3t}$
同様にして $x_1(t) = 1 + 2e^{-3t}$
$x_3(t) = 1 - e^{-3t}$
また $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1$
$\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 1$

$\lim_{t\to\infty} x_3(t) = 1$

3.2　３番の総評

基本的な常微分方程式の問題。あまり難しくはない。選択すべき。難易度は５段階で２。

4　４番（解答提案者 T.K）

４番

$\alpha > \beta > \frac{1}{2}, \gamma \in R$ とする。広義積分
$I(\alpha,\beta,\gamma) = \iint_{R^2} \frac{|\log(x^2+y^2)|^\gamma}{(x^2+y^2)^\alpha + (x^2+y^2)^\beta} dxdy$
について次の問いに答えよ。
(1)$I(\alpha,\beta,\gamma) < \infty$ となる α,β,γ の条件を求めよ。
(2)$I(\frac{5}{4},\frac{3}{4},0)$ を求めよ。

4.1　解答

4.1.1　（1）

$x = e^v\cos\theta, y = e^v\sin\theta$ とおくと、$\mid J \mid = e^{2v}$
よって $I = \iint_{R^2} \frac{|\log(x^2+y^2)|^\gamma}{(x^2+y^2)^\alpha + (x^2+y^2)^\beta} dxdy$
$=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|2v|^\delta}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} e^{2v} dvd\theta$
$=2\pi 2^\delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
$C_1 = 2\pi 2^\delta$ とおくと、
$\frac{I}{C_1} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv + \int_{-1}^{1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv + \int_{1}^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
ここで $I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv, I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv, I_3 = \int_{1}^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$ とおく
I_3 について
$e^{2\alpha v} \leq e^{2\alpha v} + e^{2\beta v}$ より
$\frac{1}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} \leq \frac{1}{e^{2\alpha v}}$
$v \geq 1$ より $\mid v \mid^\delta = v^\delta \leq v^{|\delta|}$
よって $I_3 \leq \int_1^\infty v^{|\delta|} e^{2v-2\alpha v} dv = \int_1^\infty v^{|\delta|} e^{-2(\alpha-1)v} dv$
$\alpha - 1 > 0$ の時 $t = 2(\alpha-1)v$ とすると
$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2(\alpha-1)}$
このとき $I_3 \leq \frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \int_{2(\alpha-1)}^{\infty} t^{|\delta|} e^{-t} dt$
$\leq \frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \int_0^\infty t^{|\delta|+1-1} e^{-t} dt$
$=\frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \Gamma(\mid \delta \mid + 1)$ ($\Gamma()$ はガンマ関数)
以上より $\alpha > 1$ の時 $I_3 < \infty$
I_1 について
$I_1 = -\int_{-1}^{-\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
$-t = v$ として

$I_1=\int_1^\infty \frac{t^\delta e^{-2t}}{e^{-2\alpha t}+e^{-2\beta t}}dt$
$e^{-2\beta t}<e^{-2\alpha t}+e^{-2\beta t}$
$t\geq 1$ より $t^\delta \leq t^{|\delta|}$
$I_1<\int_1^\infty t^{|\delta|}e^{-2t+2\beta t}dt$
$=\int_1^\infty t^{|\delta|}e^{-2(1-\beta)t}dt$
$1-\beta>0$ の時 I_3 の時と同様にして
$I_1<\{\frac{1}{2(1-\beta)}\}^{|\delta|+1}\Gamma(|\ \delta\ |+1)<\infty$
I_2 について
$-1\leq v\leq 1$ で $e^{-2}\leq e^{2v}\leq e^2$
この時 $2e^{-2\alpha}\leq e^{-2\alpha}+e^{-2\beta}\leq e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}\leq e^{2\alpha}+e^{2\beta}\leq 2e^{2\alpha}$
よって $\frac{e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}}\leq \frac{e^2}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}}\leq \frac{1}{2e^{-2\alpha}}e^2$
よって $I_2<\int_{-1}^1 |\ v\ |^\delta\ \frac{e^{2+2\alpha}}{2}dv$
$=\frac{e^{2+2\alpha}}{2}\int_{-1}^1 |\ v\ |^\delta\ dv$
$=\frac{2}{2}e^{2+2\alpha}\int_0^1 v^\delta dv$
これは $\delta>-1$ の時収束
よって $\delta>-1$ の時 $I_2<\infty$
以上より $\alpha>1,\beta<1,\delta>-1$ の時収束する。
逆に $\alpha\leq 1,\beta\geq 1,\delta\leq -1$ の時発散することを示す。
A:$\delta\leq -1, B:\delta>1$ かつ$\alpha\leq 1, C:\delta>-1$ かつ$\beta\leq 1$
A のとき
I_2 について
$\int_{-1}^1 \frac{|v|^\delta e^{-2}}{2e^{2\alpha}}dv=+\infty$ よってこのとき $I=\infty$
B と C のとき
I_3 について
$v\geq 1$ より $e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}<2e^{2\alpha v}$
$\frac{e^{2v}}{2e^{2\alpha v}}=\frac{1}{2}e^{2(1-\alpha)v}\geq\frac{1}{2}$ $(1-\alpha\geq 0$ より$)$
また $v\geq 1,\delta>-1$ のとき $v^\delta>\frac{1}{v}$
よって $I_3>\int_1^\infty \frac{v^\delta e^{2v}}{2e^{2\alpha v}}dv\geq\int_1^\infty \frac{1}{2}v^\delta dv=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{v}dv=\infty$
よって B の時 $I_3=\infty$
I_1 についても同様。
以上より $A\cup B\cup C$ ならば I は発散する。
よって $\alpha>1,\beta<1,\delta>-1$ と I が収束することは必要十分条件であることが示せた。

4.1.2 （2）

$I(\frac{5}{4},\frac{3}{4},0)=\iint_{R^2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}+(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}dxdy$
ここで極座標変換すると
$I(\frac{5}{4},\frac{3}{4},0)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r}{r^{\frac{5}{2}}+r^{\frac{3}{2}}}drd\theta$
$=2\pi\int_0^\infty\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{1}{2}}}dr$
$\sqrt{r}=t$ とおくと、$\frac{dt}{dr}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{2}\frac{1}{t}$
以上より $I(\frac{5}{4},\frac{3}{4},0)=4\pi\int_0^\infty\frac{1}{t^2+1}dt$
$=4\pi[\tan^{-1}t]_0^\infty$

$=4\pi\frac{\pi}{2}=2\pi^2$

4.2 総評

(１) は難しすぎる。だが、（１）ができなくても（２）はできるので部分点は取れる。難易度は５段階で当然５。

5 ５番

５番

連続な確率変数 X は、Ｙ軸対称な確率密度関数 $f(x)$ をもち、その平均と分散は $E(X)=0, V(X)=\sigma^2$ であるとする。次の問いに答えよ。
(1)X から新しい確率変数 Y を次のように定義する。
$Y=\begin{cases} X & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$
今、Y の平均を $E(Y)=\mu$ とするとき、その分散 $V(Y)$ を求めよ。
さらに、確率変数 Z を
$Z=\begin{cases} 0 & X \geq 0 \\ X & X < 0 \end{cases}$
で定義するとき、その平均 E(Z), と分散 V(Z) を求めよ。
(2)$k>0$ に対して、確率変数 W を
$W=\frac{2}{k+\frac{1}{k}}(kY+\frac{Z}{k})$
で定義する。このとき、W の平均 E(W) と分散 V(W) を求めよ。
(3)$k>0$ に対して、W の期待値の取りうる範囲を求めよ。

5.1 解答

5.1.1 （１）

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$
ここで $E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy$
$=\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx$
$=\frac{1}{2}V(X)$
$=\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $V(Y)=\frac{1}{2}\sigma^2-\mu^2$
E[Z]=$\int_{-\infty}^{\infty} zf_Z(z)dz$
$=\int_{-\infty}^{0} xf_X(x)dx$
$=-\int_0^{\infty} xf_X(x)dx$
$=-\mu$
$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)dz$
$=\int_{-\infty}^{0} z^2 f_Z(z)dz$
$=\int_0^{\infty} x^2 f_X(x)dx$(X はＹ軸対称なので)

=$\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $V(Z) = \frac{1}{2}\sigma^2 - \mu^2$

5.1.2 （２）

$E(W) = \frac{2}{k+\frac{1}{k}}(kE(Y) + \frac{E(Z)}{k})$
=$\frac{2k}{k^2+1}(k\mu - \frac{1}{k}\mu)$
=$\frac{2k}{k^2+1}\frac{k^2-1}{k}\mu$
=2$\frac{k^2-1}{k^2+1}\mu$
$V(W) = (\frac{2k}{k^2+1})^2 V(kY + \frac{Z}{k})$
=$(\frac{2k}{k^2+1})^2\{k^2V(Y) + \frac{1}{k^2}V(Z) + 2Cov(Y,Z)\}$
ここで $Cov(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z)$
=$0 - \mu(-\mu)$
=μ^2
以上より $V(W) = (\frac{2k}{k^2+1})^2\{k^2(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu^2) + \frac{1}{k^2}(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu^2) + 2\mu^2\}$

5.1.3 （３）

（２）から $E(W) = 2\mu\frac{k^2-1}{k^2+1}$
=$2\mu(1 - \frac{2}{k^2+1})$
よって $k > 0$ の時、$-2\mu < E[W] < 2\mu$

5.2 ５番の総評

問題文では「f(x) は原点対称」と書いてあるが、これだと f(x) が負の値を取ってしまうので、恐らく問題文が間違っていると思われる。正しくは「f(x) はＹ軸対称」であろう。この解説も f(x) はＹ軸対称としている。難易度は５段階で２から 2.5 くらい。

6 ６番

６番

平均 λ のポアソン分布を正の値に制限した確率変数を X とする。すなわち
$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^k}{k!}\ \ k = 1, 2, \cdots$
である。次の問いに答えよ。
(1)X の確率母関数 $Q(z) = E(z^X)$ を求めよ。
(2) 次の確率変数 Y は $e^{-\lambda}$ の不偏推定量であることを示せ。

6.1 解答

6.1.1 （1）

$E(z^X) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X=k) z^k$
$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} z^k$
$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} (e^{\lambda z} - 1)$

6.1.2 （2）

$E(Y) =$ １・$\{P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)+\cdots\} - 1\cdot\{P(X=2)+P(X=4)+\cdots\}$
$=1\cdot\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k-1) - 1\cdot\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k)$
$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\}$
$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \{\lambda - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} - \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!} - \cdots\}$
$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} (1 - e^{-\lambda})$
$=e^{-\lambda}$
よって $E(Y) = e^{-\lambda}$ なのでＹは $e^{-\lambda}$ の不偏推定量である。

6.2 ６番の総評

これもあまり難しくはない。選択すべき。難易度は５段階で２。

7 ７番

７番

確率変数ＸとＹは互いに独立でそれぞれ標準正規分布 N(0,1) に従うとする。$Z = X^2 + Y$ とし、$M(g) = E[\{Z - g(X)\}^2]$ とするとき、次の問に答えよ。
(1)g(X) がＸの一次関数 g(X)=aX+b（a,b は実数）であるとき、M(g) を最小にする a,b の値、およびその時の M(g) の最小値を求めよ。
(2)g(X) をＸの連続関数とするとき、M(g) を最小にする g(X) を求め、その理由を述べよ。その時の M(g) の最小値を求めよ。

7.1 解答

7.1.1 （1）

$Z = X^2 + Y$ なので
$E((Z - g(X))^2) = E((X^2 + Y - g(X))^2)$
$=E((X^2 - g(X))^2) + 2E((X^2 - g(X)))E(Y) + E(Y^2)$(X とＹは独立なので)
$=E((X^2 - g(X))^2) + 1$　($E(Y^2) = 1$ なので)
$G(X) = aX + b$ なので

M(g)=$E(X^4)+a^2E(X^2)+b^2-2aE(X^3)+2abE(X)-2bE(X^2)+1$
ここで $E(X^2)=1, E(X^3)=0, E(X^4)=3$ なので
M(g)=$4+a^2+b^2-2b$
=$a^2+(b-1)^2+3$
よって M(g) は a=0,b=1 の時、最小値３を取る。

7.1.2 （２）

（１）より g(X)=X^2 の時最小値１を取る。

7.2 ７番の総評

(1) のような式変形に気づけば容易。難易度は５段階で 2.5 から３。

全体的な総評

必答の２問はごく標準的な問題。１番のチェインルールは去年とほとんど同じ形式である。３〜７のうち、３，６を選ぶのが一番良い。統計ができる人は５、７も十分手が出せるだろう。ただ４はかなりの難問なので、統計ができない人にとってはだいぶ苦しい出題内容だったと思われる。

平成１４年度　情報数理系
数理科学分野２　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

積分
$I=\int_0^\infty \frac{\cos kx}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$
の値を複素積分を用いて計算せよ。ただし、k は実数とする。

1.1　解答

$f(z)=\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$ とおく
f(z) の上半平面にある曲は $z=ai$ で１位の極である。その留数は
$Res_{z=ai}f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{e^{ikz}}{z+ai}=\frac{e^{-ak}}{2ai}$
ここで二つの積分路 $C_1=\{z;z$ は実数で $\mid z\mid< R$ (R は実数)$\}, C_2=\{\mid z\mid=R, Imz\geq 0\}$ を設定し、$C=C_1+C_2$ とおく。
$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$ を示す。
$\lim_{R\to\infty}\mid\int_{C_2}f(z)dz\mid\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\mid f(z)\mid\mid dz\mid$
$=\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\mid\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mid\mid dz\mid$
$z=Re^{i\theta}(0\leq\theta\leq\pi)$ とおくと、$\frac{dz}{d\theta}=iRe^{i\theta}$、よって $\mid dz\mid=Rd\theta$
よって $\int_{C_2}\mid\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mid\mid dz\mid\leq\int_0^\pi\mid\frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+1}\mid Rd\theta$
$\leq\int_0^\pi\frac{|e^{ikR\cos\theta}||e^{-kR\sin\theta}|}{|R^2e^{2i\theta}|-1}d\theta=\int_0^\pi\frac{e^{-kR\sin\theta}}{R^2-1}d\theta$
ここで $\int_0^\pi e^{-kR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^{kR\sin\theta}}d\theta\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^{kR\frac{2\theta}{\pi}}}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}}d\theta$
$=[-\frac{\pi}{2kR}e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}}]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2kR}(e^{-kR}-1)$
よって $\int_0^\pi\frac{e^{-kR\sin\theta}}{R^2-1}d\theta\leq-\frac{\pi}{2kR(R^2-1)}(e^{-kR}-1)$
ここで $\lim_{R\to\infty}-\frac{\pi}{2kR(R^2-1)}(e^{-kR}-1)=0$
以上より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$ ー（A）
ここで留数定理より $\int_C f(z)dz=2\pi iRes_{z=ai}f(z)=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（B）
また $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)=\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)+\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)$
$=\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)$ ー（C）(（A）より)
（B）より $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（D）
（C)、（D）より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)=\int_{-\infty}^\infty f(z)dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（E）
（E）において $\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz+i\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$
$\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz,\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin kz}{z^2+a^2}dz$ は実数なので
$\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$
$\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz$ は偶関数なので
$\int_0^\infty\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ak}$

1.2　１番の総評

極めて基本的な複素積分の問題。絶対に選択すべき。難易度は５段階で２。

2　２番

２番

$I=[0,\infty)$ で連続な関数 $f_0(x)$ を用いて
$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(\xi)d\xi$, $n=1,2,\cdots$
で関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0,1,2,3,\cdots}$ を定めるとき、次の問に答えよ。
(1)n=0,1,2, $\cdots$ に対し
$g_n(x)=\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi$, $h_n(x)=\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi$
とおいて $g_n(x)$ を $f_{n+1}(x)$ と $g_{n+1}(x)$ で、$h_n(x)$ を $f_{n+1}(x)$ と $h_{n+1}(x)$ で表せ。
(2)n=0,1,2, $\cdots$ に対し、
$f_{n+2}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})(f_n(\xi)-f_{n+2}(\xi))d\xi$
を示せ。
(3)F(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}(x)$ は I 上広義一様収束することを示し、F(x) を f_0 で表せ。

2.1　解答

2.1.1　（１）

$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(\xi)d\xi$ より $\frac{df_{n+1}(x)}{dx}=f_n(x)$
よって $g_n(x)=\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi$
=$\int_0^x e^{x-\xi}\frac{df_{n+1}(\xi)}{d\xi}d\xi$
=$[e^{x-\xi}f_{n+1}(\xi)]_0^x+\int_0^x e^{x-\xi}f_{n+1}(\xi)d\xi,$
=$f_{n+1}(x)-e^x f_{n+1}(0)+g_{n+1}(x)$
ここで $f_{n+1}(0)=\int_0^0 f_{n-1}(\xi)d\xi=0$
よって $g_n(x)=f_{n+1}(x)+g_{n+1}(x)$
同様にして $h_n(x)=\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi$
=$\int_0^x e^{\xi-x}\frac{df_{n+1}(\xi)}{d\xi}d\xi$
=$[e^{\xi-x}f_{n+1}(\xi)]_0^x-\int_0^x e^{\xi-x}f_{n+1}(\xi)d\xi$
=$f_{n+1}(x)-h_{n+1}(x)$

2.1.2　（２）

（右辺）=$\frac{1}{2}\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^x e^{x-\xi}f_{n+2}(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^x e^{\xi-x}f_{n+2}(\xi)d\xi$
=$\frac{1}{2}\{g_n(x)-g_{n+2}(x)\}+\frac{1}{2}\{h_{n+2}(x)-h_n(x)\}$
ここで（１）より

$$\begin{cases} f_{n+2}(x)=g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x) \\ f_{n+1}(x)=g_n(x)-g_{n+1}(x) \end{cases}$$

これより $f_{n+2}(x)+f_{n+1}(x)=g_n(x)-g_{n+2}(x)$ ー（A）
また

$$\begin{cases} f_{n+2}(x)=h_{n+1}(x)+h_{n+2}(x) \\ f_{n+1}(x)=h_n(x)+h_{n+1}(x) \end{cases}$$

これより $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = h_{n+2}(x) - h_n(x)$ ー（B）
（A)、（B）より（右辺）=$\frac{1}{2}\{f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x)\} + \frac{1}{2}\{f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)\} = f_{n+2}(x)$

2.1.3　（３）

$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n}\}$
=$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})(f_0(\xi) - f_{2n}(\xi))d\xi$(（２）を使った)
ここで $\lim_{n\to\infty}\int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_n(\xi)d\xi$ について考える。
$f_0(x)$ を n 回不定積分したものを $G_n(x)$ とおく。
$f_1(x) = \int_0^x f_0(x)dx = [G_1(x)]_0^x = G_1(x) - G_1(0)$
$f_2(x) = \int_0^x f_1(x)dx = [G_2(x) - G_1(0)x]_0^x = G_2(x) - G_1(0)x - G_2(0)$
$f_3(x) = \int_0^x f_2(x)dx = [G_3(x) - \frac{G_1(0)}{2}x^2 - G_2(0)x]_0^x = G_3(x) - G_3(0) - G_2(0)x - \frac{G_1(0)}{2}x^2$
これを繰り返して $f_n(x) = G_n(x) - G_n(0) - G_{n-1}(0)x - \frac{1}{2!}G_{n-2}(0)x^2 - \frac{1}{3!}G_{n-3}(0)x^3 - \cdots - \frac{1}{(n-1)!}G_1(0)x^{n-1}$ ー（A）
ここで $G_n(x)$ について $[0, x]$ でマクローリン展開すると
$G_n(x) = G_n(0) + G_{n-1}(0)x + G_{n-2}(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + G_1(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + G_0(cx)\frac{x^n}{n!}(0 < c < 1)$ ー（B）
（B）を（A）に代入して $f_n(x) = G_0(cx)\frac{x^n}{n!} = f_0(cx)\frac{x^n}{n!}$
よって $\int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi$ がある値に広義一様収束することを示せば良い。
$x \in [a,b] 0 \leq a < b$ を取る。
$| \int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi | \leq \int_0^x (| e^{x-\xi} | + | e^{\xi-x} |) | f_0(c\xi) | \frac{\xi^n}{n!}d\xi \leq \int_0^b (| e^{b-\xi} | + | e^{\xi-a} |) | f_0(c\xi) | \frac{\xi^n}{n!}d\xi$
f は $[a,b]$ 上の連続関数なので $[a,b]$ において最大値を取る。その最大値を f_{max} とおくと、
$| \int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi | \leq f_{max} \times \frac{b^n}{n!}\int_0^b (| e^{b-\xi} | + | e^{\xi-a} |)d\xi$
ここで $\forall\epsilon\ | f_{max} \times \frac{b^n}{n!}\int_0^b (| e^{b-\xi} | + | e^{\xi-a} |)d\xi - 0 | \leq \epsilon$
となるように n の値を定めると、n は ϵ にしかよらない。
以上より $\int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi = \int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_n(\xi)d\xi$ は $[a,b]$ で０に一様収束する。
よって $F(x)$ は $\frac{1}{2}\int_0^x (e^{x-\xi} - e^{\xi-x})f_0(\xi)d\xi$ に I 上広義一様収束する。

2.2　２番の総評

(1) と (2) はなんとかなり、部分点は取れるだろう。しかし、(3) は極めて難しい。難易度は５段階で 4.5。

3　３番

３番

f(x) をＲ上の滑らかな関数で次の条件を満たすとする。
$f'(x) \geq 0 (x \in R)$　$f'(x) \geq 1 (x \geq 0)$
$f(0) = 1, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
微分方程式の初期値問題
$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0 (t > 0)$　$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$
の解 x(t)($0 \leq t < \infty$) について次の問に答えよ。
(1)x(t) は全ての $t \geq 0$ に対して
$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = \frac{3}{2}$
を満たすことを示せ。
(2) 時刻 $t_* > 0$ が存在して、x(t) は $0 \leq t \leq t_*$ で単調に増加し、t=t_* で最大値を取り、$t > t_*$ で単調に減少することを示せ。
(3)$\lim_{t \to \infty} x(t) = -\infty$ を示せ。
(4) 極限 $\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{t}$ を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（１）

$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0$ の両辺を t で積分して
$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = C (C$ は定数)
$\dot{x}(0) = 1, f(x(0)) = f(0) = 1$ より $C = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
よって $\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = \frac{3}{2}$

3.1.2　（２）

$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0 (t > 0)$ より $f'(x(t)) = -\ddot{x}(t)$
ここで $f'(x) \geq 1 (x \geq 0)$ より $-\ddot{x}(t) \geq 1$ $(x(t) \geq 0)$
よって $\ddot{x}(t) \leq -1$ $(x(t) \geq 0)$
以上より $\dot{x}(t)$ は $x(t) > 0$ で単調減少する。
ここで $\dot{x}(0) = 1, x(0) = 0, \ddot{x}(t) \leq -1$ より $x(t)$ は $0 \leq t \leq t_*$ で単調増加し、t=t_* で最大値を取り、$t > t_*$ で単調に減少する

3.1.3　（３）

(2) より $t \geq t_*$ で $\dot{x}(t) \leq 0$、また $\ddot{x}(t) \leq -1 (x(t) \geq 0)$ より $x(t_{**}) = 0$ を満たす $t_{**} > t_*$ が存在する。
(2) より $x(t)$ は $t > t_{**}$ で単調減少するので
$\lim_{t \to \infty} f(x(t)) = 0$　($\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ より)
ここで（１）より $\dot{x}(t) = -\sqrt{3 - 2f(x(t))}$($\dot{x}(t) < 0$ より)

また $f(x(0)) = f(0) = 1$
よって $-\sqrt{3} \leq x(t) \leq -1$
以上より $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$

3.1.4 （4）

(3) より $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{3-2f(x(t))} = -\sqrt{3}$
ここで $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \lim_{t\to\infty} t = \infty$ からロピタルの定理より
$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = -\sqrt{3}$

3.2 ３番の総評

解答を読めば十分理解できるだろうが、結構取り組みにくい。難易度は５段階で４。

4 ４番

４番

n 本の n 次元縦ベクトル $\{g_1, \cdots g_n\}$ が正規直交系を成し、f を ${}^t g_1 f \neq 0$ なる n 次元縦ベクトルとする。行列 A=$I + \lambda f {}^t g_1$, I は n × n 単位行列、λ はスカラー
について次の問に答えよ。
(1)$f, g_j (j = 2, 3, 4, \cdots)$ がAの固有ベクトルであることを示せ。さらに、Aのジョルダン標準系を求めよ。
(2)$\det A$ を求めよ。
(3)A の逆行列 A^{-1} が存在するための条件を求めよ。さらに A^{-1} を $I + \mu f {}^t g_1 (\mu$ はスカラー) の形で求めよ。

4.1 解答

4.1.1 （1）

$A = I + \lambda f {}^t g_1$ より
$Af = (I + \lambda f {}^t g_1) f$
=$f + \lambda f {}^t g_1 f$
=$(1 + \lambda {}^t g_1 f) f$
また $Ag_j = (I + \lambda f {}^t g_1) g_j$ $(j = 2, 3, \cdots n)$
=g_j （$\{g_1 \cdots g_n\}$ は正規直交系なので)

4.1.2 （2）

行列式は固有値の積なので
$\det A = 1 + \lambda {}^t g_1 f$

4.1.3 （３）

A^{-1} が存在するには、$\det A \neq 0$、すなわち $1+\lambda^t g_1 f \neq 0$ であればよい。
$A^{-1}=I+\mu f^t g_1$ とおくと、
$AA^{-1}=(I+\lambda f^t g_1)(I+\mu f^t g_1)$
=$I+(\mu+\lambda)f^t g_1+\mu\lambda f^t g_1 f^t g_1$
=$I+(\mu+\lambda)f^t g_1+(\mu\lambda^t g_1 f)f^t g_1$
=$I+(\mu+\lambda+\mu\lambda^t g_1 f)f^t g_1$
$A\cdot A^{-1}=I$ なので $\mu+\lambda+\mu\lambda^t g_1 f=0$
よって $\mu=\frac{-\lambda}{1+\lambda^t g_1 f}$
以上より $A^{-1}=I-\frac{\lambda}{1+\lambda^t g_1 f}f^t g_1$

4.2 ４番の総評

ジョルダン標準形を知らなくても（１）でＡの固有ベクトルさえ求められれば、（２）（３）を解くことができる。ただ、（３）はなかなか難しい。難易度は５段階で４。

5 ５番

５番

X,Y は次のような確率変数とする。X は平均 $\mu(\mu>0)$、分散 σ^2 を持ち、Y はX＝xが与えられたという条件の下で、平均 $\frac{x}{2}$、分散 $x^2\tau^2$ を持つとする。次の問に答えよ。
(1)Y の平均と分散を求めよ。
(2)R=X-Y とするとき、R と Y の相関係数 ρ を求めよ。
(3)(2) で求めた相関係数 ρ に対して
$\lim_{\sigma\to 0}\rho$　および $\lim_{\tau\to 0}\rho$
を求めよ

5.1 解答

5.1.1 （１）

X, Y を連続型の確率変数として示す。
$f(x,y)$ を同時密度関数とし、$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$ であり、$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$
$f_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$
$f_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ とおくと条件より
$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\mu$-(a)
$V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x,y)dxdy=\sigma^2$-(b)
$E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy=\frac{x}{2}$-(c)
$V[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\frac{x}{2})^2\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy=x^2\tau^2-(d)$
(c) より $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2}f_1(x)dx=\frac{\mu}{2}((c)$ より$)$
よって $E[Y]=\frac{\mu}{2}$

(d) より $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y^2-xy+\frac{x^2}{4})f(x,y)dxdy=\tau^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_1(x)dx$
$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(x,y)dxdy=\tau^2(\sigma^2+\mu^2)-\frac{1}{4}(\sigma^2+\mu^2)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$
ここで $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y|x)dy$
=$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2}f_1(x)dx$
=$\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)$-(e)
よって $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(x,y)dxdy=(\tau^2-\frac{1}{4})(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)=(\tau^2+\frac{1}{4})(\sigma^2+\mu^2)$
以上より $V[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\tau^2(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{4}\sigma^2$

5.1.2 （2）

$Cov(R,Y)=Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-V(Y)$
ここで $Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-E[X]E[Y]$
=$\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)-\mu\cdot\frac{\mu}{2}$
=$\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $Cov(R,Y)=\frac{1}{2}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)-\frac{1}{4}\sigma^2$
=$\frac{1}{4}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)$
また $V[R]=V[X-Y]=V[X]+V[Y]-2Cov(X,Y)$
=$\frac{1}{4}\sigma^2+\tau^2(\sigma^2+\mu^2)$
よって $\rho=\frac{Cov(R,Y)}{\sqrt{V[R]}\sqrt{V[Y]}}=\frac{\frac{1}{4}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)}{\frac{1}{4}\sigma^2+\tau^2(\sigma^2+\mu^2)}$

5.1.3 （3）

$\lim_{\sigma\to 0}\rho=\frac{-\tau^2\mu^2}{\tau^2\mu^2}=-1,\lim_{\tau\to 0}\rho=\frac{\frac{1}{4}\sigma^2}{\frac{1}{4}\sigma^2}=1$

5.2 ５番の総評

比較的やりやすい問題。統計ができる人は絶対に選択すべき。難易度は５段階で３。

6　6番

6番

2次元確率ベクトル Y=$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ が二次元正規分布に従う時、その確率密度関数は

$f(y) = (2\pi)^{-1}[\det(V)]^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{(y-\mu)^T V^{-1}(y-\mu)}{2}]$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

で与えられる。ここに $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ はYの平均ベクトル、および、V=$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ はYの分散共分散行列であり、$\det(V)$ はその行列式である。またTはベクトルまたは行列の転置を表す。次の問に答えよ。

(1) いま、$Q = (y-\mu)^T V^{-1}(y-\mu)$ が

$Q = 4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16$

であるとき、μ と V を求めよ。さらにそれを用いて f(y) を書き下せ。

(2)Y_1 と Y_2 の相関係数を求めよ。

6.1　解答

6.1.1　(1)

$Q = \begin{pmatrix} y_1-\mu_1 & y_2-\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1-\mu_1 \\ y_2-\mu_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$Q = 4y_1^2 + 7y_2^2 + y_1(-8\mu_1 - 2a\mu_2) + y_2(-2a\mu_1 - 14\mu_2) + 2ay_1y_2 + 4\mu_1^2 + 2a\mu_1\mu_2 + 7\mu_2^2$

よって

$$\begin{cases} -8\mu_1 - 2a\mu_2 = -16 \\ -2a\mu_1 - 14\mu_2 = -8 \\ 2a = 4 \\ 4\mu_1^2 + 2a\mu_1\mu_2 + 7\mu_2^2 = 16 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

よって $Q = \begin{pmatrix} y_1-2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1-2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおける。以上より $\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

また $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

このとき $\det V = \frac{1}{24}$

以上より $f(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{24}}} \exp(-(4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16))$

=$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp(-(4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16))$

6.1.2 （2）

$\rho_{Y_1,Y_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-1}{\sqrt{7}}$

6.2 6番の総評

統計ができる人にとっては十分取り組める問題。難易度は５段階で３。

7 7番

７番

確率変数ＸとＹは互いに独立で、それぞれ正規分布 $N(\mu,\sigma_1^2)$、$N(0,\sigma_2^2)$ に従うとする。また $Z = X + Y$ とする。次の問に答えよ。
(1)Z=z が与えられている時の X の条件付き密度関数 $p(x|z)$ を求めよ。
(2)Z が与えられているときのＸの条件付き期待値 $E(X|Z)$ を求めよ。
(3)$f(z) = (Z-\mu)^2, g(Z) = \{E(X|Z)-\mu\}^2$ とするとき、f(Z) と g(Z) の期待値の比
$\frac{E[g(Z)]}{E[f(Z)]}$
はＸとＹの分散の比にのみ依存することを示せ。

7.1 解答

7.1.1 （1）

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = X \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} Y = Z - W \\ X = W \end{cases}$$

よって J= $\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{vmatrix}$= $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
よって W と Z の同時確率密度関数は
$f_{W,Z}(w,z) = 1 \cdot f_X(x)f_Y(z-w)$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp(-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma_1^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp(-\frac{(z-w)^2}{2\sigma_2^2})$
ここで Z=X+Y で、X、Y はそれぞれ $N(\mu,\sigma_1^2)$,$N(0,\sigma_2^2)$ に従って、X,Y は共に独立なので Z は $N(\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ に従う。
よって Z の確率密度関数は
$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2+\sigma_2^2})$
よって $p(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)}$
=$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2})}{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2+\sigma_2^2})}$

=$\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}\exp(-\frac{1}{2}\frac{\{x-\frac{\mu\sigma_2^2+z\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}})$

7.1.2 （2）

(1) より $p(x|z)$ は平均が $\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ の正規分布である。
よって $E(X|Z)=\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

7.1.3 （3）

$E[Z]=\mu, E[Z^2]=V[Z]+E[Z^2]=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\mu^2$
よって $E[g(Z)]=E[(\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-\mu)^2]$ =$\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$
$E[f(Z)]=E[(Z-\mu)^2]=V[Z]=\sigma_1^2+\sigma_2^2$
よって $\frac{E[g(Z)]}{E[f(Z)]}=\frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}$
=$\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^4(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})^2}$
=$\frac{1}{(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})^2}$
よって $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ の比にのみ依存する。

7.2 7番の総評

計算量が半端ない。この解答ではその尋常ではない計算過程を省略した。難易度は５段階で４か 4.5 くらい。

8 ８番

８番

8.1 解答

9 ９番

９番

さいころを n 回投げるとき、「同じ目が３回以上続くことはない」という事象の確率を求めよ。

9.1 解答

さいころを１回または２回しか振らないときは絶対に同じ目が三回以上続くことはないのでその確率は１。
さいころを三回以上振ることを考える。
解答は $\frac{(105+47\sqrt{5})(\frac{5+3\sqrt{5}}{2})^{n-3}+(105-47\sqrt{5})(\frac{5+3\sqrt{5}}{2})^{n-3}}{6^n}$

9.2　９番の総評

私はこの問題を解くのに８時間かかった。（ちなみに Y.N 君は４５分で解いたらしいが‥）もっと丁寧に解答を書きたかったが、これで許して下さい。難易度は５段階で５。

10　全体的な総評

この年は１番以外はどれも非常に取り組みにくい。取り組みやすいのは１、５，６の３題。これは十分完答が狙える。これ以外の問題は時間内に解ききるのは非常に難しいだろう。部分点がとりやすいのは、２。統計ができない人は半分取るのも難しかったのではないだろうか??

平成１５年度　システム人間系
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ なので
$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$
よって $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$
$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta}{r}$
$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$
$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}, \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$
ここで $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ より
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$
また $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$
よって $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$

1.1.2　（2）

$\triangle^2 f = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r})$
$=\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 g}{\partial r^3} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r})$
$=\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 g}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$

1.2　１番の総評

３年連続でチェインルールの問題である。前２年をやっていれば十分できるはず。（２）は新傾向だが。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

t=2 に対して $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $t=5$ の時 $\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ t=8 の時 $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

P=$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$5x^2+5y^2+5z^2+2\sqrt{6}xz+2\sqrt{3}yz=8$ を行列形式で書くと

$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=8$ ー（A）

ここで $a=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて $a={}^t Pb$ とおくと（A）は

${}^tb\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}b=8$

$\Leftrightarrow{}^t a^tP\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}Pa=8$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=8$

よって $2x'^2+5y'^2+8z'^2=8$

$\Leftrightarrow\frac{x'^2}{4}+\frac{5}{8}y'^2+z'^2=1$

この平面を S' とおく。$x'y'z'$ 平面において、$l'={}^t(1\ 0\ 0)$ であるとき、l' が S' を切り取る線分の長さは最大になり、その長さは４.

よって xyz 平面においては

$l=Pl'=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

以上より l の方向ベクトルは ${}^t(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ であり、これが切り取る線分の長さは４。

2.2　２番の総評

似たような問題はどこかでやったことがあるはず。難易度は５段階で 2.5 くらい。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

$\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$ より

$y=e^{-\int adx}\{\int_0^x e^{\int adt}f(t)dt+C\}$(C は定数)

=$e^{-ax}\{\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\}$

$y(0)=C=b$ より

$y=e^{-ax}\{\int_0^x e^{at}f(t)dt+b\}$

ここで $\lim_{x\to\infty} be^{-ax}=0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}$
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{at}f(t)dt=+\infty$ の時、ロピタルの定理より
$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a}=0(x>M$ で $f(x)=0$ より)
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{at}f(t)dt<+\infty$ の時、
$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}=0$
以上より $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$

3.1.2 （2）

$\int_0^\infty\mid f(x)\mid dx<+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\mid f(x)\mid dx=0$
すなわち $\forall\epsilon,\exists N_0 n\leq N_0\Rightarrow\int_n^{n+1}\mid f(x)\mid dx<\epsilon$ が言える。
ここで $y(x)=\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt+b}{e^{ax}}$ より
$\mid y(x)\mid\leq\frac{\int_0^x e^{at}|f(t)|dt}{e^{ax}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\int_0^{[x]+1} e^{at}|f(t)|dt}{e^{ax}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{[x]+1}\int_{k-1}^k e^{at}|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}$
ここで $\int_{k-1}^k e^{at}\mid f(t)\mid dt\leq e^{ak}\int_{k-1}^k\mid f(t)\mid dt$ より
$\mid y(x)\mid\leq\frac{\sum_{k=1}^{[x]+1} e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{N_0-1} e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{\sum_{k=N_0}^{[x]+1} e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}$
$<\frac{\epsilon\sum_{k=N_0}^{[x]+1} e^{ak}}{e^{a[x]}}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}(A=\sum_{k=N_0}^{[x]+1} e^{ak}\int_{k-1}^k\mid f(t)\mid dt,B=\mid b\mid$ とおいた)
$=\epsilon\frac{\frac{e^{a([x]+1)}-e^{aN_0}}{e^a-1}}{e^{a[x]}}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}$
$=\epsilon\frac{e^{a([x]+1)}}{e^{a[x]}(e^a-1)}-\frac{\epsilon e^{aN_0}}{e^{a[x]}(e^a-1)}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}$
よって $\lim_{x\to\infty}\mid y(x)\mid<\lim_{x\to\infty}\{\frac{\epsilon e^a}{e^a-1}-\frac{\epsilon e^{aN_0}}{e^{a[x]}(e^a-1)}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}\}=\frac{\epsilon e^a}{e^a-1}$
これが任意の ϵ について成立するので、$\lim_{x\to\infty}\mid y(x)\mid=0$ が成立する。
以上より $\int_0^\infty\mid f(x)\mid dx<\infty$ が成り立つ時、$\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ が成立する。

3.2 ３番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

4 ４番

4.1 解答

4.1.1 （1）

真数条件より $x>0,y>0,1-x-y>0$ が成立するので $x>0,y>0,x+y<1$
また $\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1-y}{x(1-x-y)} & \frac{1}{1-x-y}\\ \frac{1}{1-x-y} & \frac{1-x}{y(1-x-y)}\end{vmatrix}=\frac{1}{xy(1-x-y)}$
よって $I(\alpha,\beta)=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(1+\frac{1}{x}(1-x-y)+\frac{y}{x})^{-\alpha-2}(1+\frac{1-x-y}{y}+\frac{x}{y})^{-\beta-2}(\frac{1-x-y}{x}\frac{1-x-y}{y}+\frac{1-x-y}{y}+\frac{1-x-y}{x})\frac{1}{xy(1-x-y)}dxdy$
$=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}(\frac{(1-x-y)^2}{xy}+(1-x-y)\frac{x+y}{xy})\frac{1}{xy(1-x-y)}dxdy$
$=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}\frac{1}{x^2y^2}dxdy$
$=\int_{x>0,y>0,x+y<1} x^\alpha y^\beta dxdy=\int_0^1\{\int_0^{1-x} y^\beta dy\}x^\alpha dx$

=$\frac{1}{\beta+1}\int_0^1[y^{\beta+1}]_0^1 x^\alpha dx$
=$\frac{1}{\beta+1}\int_0^1(1-x)^{\beta+1}x^\alpha dx$
=$\frac{1}{\beta+1}B(\alpha+1,\beta+2)$
=$\frac{1}{\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)}$
=$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)}$
よって $\alpha+1,\beta+1>0$ なので $\alpha>-1,\beta>-1$

4.1.2 （2）

$I(1,1)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{24}$

4.2 （3）

微積分の問題だが、統計の知識（ベータ関数やガンマ関数）が要求される。難易度は５段階で 3.5。

5 ５番

５番

確率変数Xが二項分布 $B_N(n,p)$ に従うものとする。$X_n=\frac{X}{n}$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、$n\geq 3$ 、$0<p<1$ とする。
(1)$E(X_n-p)^3$ を n と p だけで簡潔に表せ。
(2)$0<p<1$ に対して $E[(X_n-p)^3]$ の取りうる範囲を求めよ。

5.1 解答

5.1.1 （1）

X の積率母関数は $M(\theta)=\sum_{x=0}^n e^{\theta x}\ {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$
=$\sum_{x=0}^n {}_nC_x(pe^\theta)^x(1-p)^{n-x}$
=$(pe^\theta+(1-p))^n$
よって $M'(\theta)=n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
$M"(\theta)=n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
$M^{(3)}(\theta)=n(n-1)(n-2)(pe^\theta+(1-p))^{n-3}p^3e^{3\theta}+2n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
よって $E[X]=M'(0)=np$
$E[X^2]=M"(0)=n(n-1)p^2+np$
$E[X^3]=M^{(3)}(0)=n(n-1)(n-2)p^3+2n(n-1)p^2+n(n-1)p^2+np$
以上より $E[(X_n-p)^3]=E[\frac{X^3}{n^3}-3\frac{X^2}{n^2}p+3\frac{X}{n}p^2-p^3]$
=$\frac{1}{n^2}(2p^3-3p^2+p)$

5.1.2 （２）

$f(p)=\frac{1}{n^2}(2p^3-3p^2+p)$ とおくと、
$f'(p)=\frac{1}{n^2}(6p^2-6p+1)$
$f'(p)=0$ とおくと $p=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$
よって f(p) の増減表は次のようになる。

λ	0	···	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	···	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	···	1
$\psi'(\lambda)$		+	0	-	0	+	
$\psi(\lambda)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{18n^2}$	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{18n^2}$	$\nearrow$	0

表 2:

よって $\frac{-\sqrt{3}}{18n^2}\leq E[(X_n-p)^3]\leq\frac{\sqrt{3}}{18n^2}$

5.2 ５番の総評

計算がやや複雑だが統計ができる人は十分取り組める問題。難易度は５段階で 2.5 くらい。

6 ６番

６番

確率変数 X と Y は、それぞれ共に平均０、分散 σ^2 を持ち、X と Y の相関係数 $Corr(X,Y)=\rho$ を $0<\rho<1$ と仮定する。X,Y に次のように２×２行列を作用させて、新しい確率変数 U,V を
$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$
と定義する。
(1)$corr(U,V)$ を θ,ρ を用いて表せ。また固定された ρ に対して、θ を動かしたときの $Corr(U,V)$ の最大値と最小値を求めよ。
(2)θ を $0\leq\theta\leq\pi$ の範囲で動かしたときに、$Corr(U,V)=0$ を与える θ を全て求めよ。
(3)θ が（２）で求めた１つの値のとき、その θ に対応する（U,V）が２次元正規分布に従うと仮定する。このとき、(X,Y) の同時密度関数 f(x,y) を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （１）

$U=X\cos\theta+Y\sin\theta,\ V=-X\sin\theta+Y\cos\theta$
よって $E[U]=0,E[V]=0\ \ (E[X]=E[Y]=0$ なので$)$
また $Cov(X,Y)=Corr(X,Y)\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}=\rho\sigma^2$ー $(A)\ \ (V[X]=V[Y]=\sigma^2$なので$)$
よって $V[U]=\cos^2\theta V[X]+\sin^2\theta V[Y]+2\sin\theta\cos\theta Cov(X,Y)$
=$\sigma^2+2\rho\sigma^2\sin\theta\cos\theta$

$V[V] = \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 \sin\theta\cos\theta$
$Cov(U,V) = E[UV] - E[U]E[V]$
=$E[UV]$
=$E[XY](\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
=$\rho\sigma^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ (A より)
よって $Corr(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{V[U]}\sqrt{V[V]}}$
=$\frac{\rho\cos 2\theta}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 2\theta}}$
ここで $\cos 2\theta = t(-1 \leq t \leq 1)$ とおいて」
$Corr(U,V) = \frac{\rho t}{\sqrt{1-\rho^2(1-t^2)}} = f(t)$ とおく
このとき $f'(t) = \frac{\rho(1-\rho^2)}{(1-\rho^2+\rho^2t^2)\sqrt{1-\rho^2+\rho^2t^2}} > 0$
よって f(t) は単調増加関数である。以上より
$f(t)$ の最小値は t=-1 の時 f(-1)=$-\rho$
最大値は t=1 の時 f(1)=ρ

6.1.2 （2）

$Corr(U,V) = 0$ より $\cos 2\theta = 0$
$0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

6.1.3 （3）

$Corr(U,V) = 0$ で (U,V) が二次元正規分布に従うので (U,V) は独立。
$V[U] = \sigma^2(1 + 2\rho\sin\theta\cos\theta),\ V[V] = \sigma^2(1 - 2\rho\sin\theta\cos\theta)$
よって $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $V[U] = \sigma^2(1+\rho)$ $V[V] = \sigma^2(1-\rho)$
この時 $f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2(1+\rho)} - \frac{v^2}{2\sigma^2(1-\rho)})$
ここで $U = \cos\theta X + \sin\theta Y$
$V = -\sin\theta X + \cos\theta Y$ なので
$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$
よって $f_{XY}(x,y) =\mid J \mid f_{UV}(\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y)$
$\theta = \frac{\pi}{4}$ なので
$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\frac{1}{2}(x+y)^2(1-\rho)+\frac{1}{2}(-x+y)^2(1+\rho)}{1-\rho^2})$
=$\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{1-\rho^2})$

6.2 ６番の総評

あまり易しくはない。難易度は５段階で 3.5 くらい。

7　７番

７番

X は正値だけをとる確率変数とする。$Y = \log_e X$ とするとき、Y が平均 0、分散 1 の正規分布に従うとする。
(1)X の確率密度関数を求めよ。
(2)X の１次、２次、３次のモーメント（積率）を求めよ。
(3)X の分布の歪度を求め、Y の歪度と比較せよ。

7.1　解答

7.1.1　（1）

X の分布関数を F(x) とおき、確率密度関数を f(x) とおく。この時、
$P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(\log_e X \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$
よって $f(x) = \frac{dF(e^x)}{dx} = e^x f(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
$e^x = t$ とおくと、
$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{(\log t)^2}{2}}$

7.1.2　（2）

$E[X^r] = E[e^{rY}]$
平均 μ、分散 σ^2 の正規分布の積率母関数は $e^{\mu r + \frac{\sigma^2}{2} r^2}$
Y は $N(0,1)$ に従うので $E[X^r] = E[e^{rY}] = e^{\frac{1}{2} r^2}$
よって $E[X] = e^{\frac{1}{2}}$
$E[X^2] = e^2$
$E[X^3] = e^{\frac{9}{2}}$

7.1.3　（3）

$M_2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 = e^2 - e$
$M_3 = E[X^3] - 3E[X]E[X^2] + 3E[X]^2 E[X] - E[X]^3$
=$e^{\frac{9}{2}} - 3e^{\frac{5}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}}$
よって歪度は $\frac{M_3}{(M_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{\frac{9}{2}} - 3e^{\frac{5}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}}}{(e^2 - e)^{\frac{3}{2}}}$
また Y の積率母関数は $G(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ なので $G^{(2)}(t) = (1 + t^2)e^{\frac{1}{2}t^2}, G^{(3)}(t) = 2te^{\frac{1}{2}t^2} + t(1 + t^2)e^{\frac{1}{2}t^2}$
これより $E[Y^2] = 1, E[Y^3] = 0$
よって Y の歪度は $\frac{M_3}{(M_2)^{\frac{3}{2}}} = 0$
以上より X の歪度の方が大きい。

7.2　７番の総評

この手の問題は過去にも出題例があるので、統計ができる人は十分に取り組めるだろう。難易度は５段階で 2.5 くらい。

8　全体的な総評

必答の２問は去年に続き標準的な微積分と線形代数の問題。（１の (2) は少し難しいが。）選択は、統計ができる人は５と７をやれば良いだろう。３，４はあまり易しくないのでこの年も統計ができない人にとっては苦しい年だっただろう。

平成１５年度　システム人間系
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1 1番

1番

$a > 0$ の時、$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+1)} dx$ の値を複素積分を用いて求めよ。

1.1 解答

$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}$ とおくと、f(z) の上半平面における特異点は $z = i$ で 1 位の極である。
$C_1 = [-R, -r], C_2 = \{\mid z \mid= r\}, C_3 = [r, R], C_4 = \{\mid z \mid= R\}(r < R)$ とおいて積分路を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とおく。
この時 $\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{e^{iaz}}{z(z+i)} = -\pi i e^{-a}$
ここで $\deg\{z(z^2 + 1)\} \geq \deg\{1\} + 1$ よりジョルダンの補題から $\lim_{R\to\infty} \mid \int_{C_4} f(z)dz \mid= 0$
また $\int_{C_1+C_3} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} dz + \int_r^R \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} dz$
$t = -z$ とおくと、$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} dz = \int_R^r \frac{e^{-iat}}{-t(t^2+1)}(-dt) = -\int_r^R \frac{e^{-iat}}{t(t^2+1)} dt$
$\int_{C_1+C_3} f(z)dz = \int_r^R \frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} dz - \int_r^R \frac{e^{-iaz}}{z(z^2+1)} dz = \int_r^R \frac{2i \sin az}{z(z^2+1)} dz$
また $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)} = \frac{e^{iaz}}{z} - \frac{z}{z^2+1} e^{iaz} = \frac{1}{z}(1 + iaz + \frac{(iaz)^2}{2!} + \cdots) - \frac{z}{z^2+1} e^{iaz}$
$= \frac{1}{z} + (ia + \frac{(ia)^2 z}{2!} + \cdots) - \frac{z}{z^2+1} e^{iaz} = \frac{1}{z} + p(z)$ とおく。
$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = -\pi i$
$p(z)$ は C_2 において正則なので $\mid p(z) \mid\leq M$ とできる。
よって $\mid \int_{C_2} p(z)dz \mid\leq M\pi r \to 0 (r \to 0)$
以上より $\lim_{r\to 0} \int_{C_2} f(z)dz = -\pi i$
よって $\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty, r\to 0}(\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz)$
$= \int_0^\infty \frac{2i \sin az}{z(z^2+1)} dz - \pi i + 0 = -\pi i e^{-a}$
よって $\int_0^\infty \frac{2i \sin az}{z(z^2+1)} dz = \pi i(1 - e^{-a})$ なので $\int_0^\infty \frac{\sin az}{z(z^2+1)} dz = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a})$
$\frac{\sin az}{z(z^2+1)}$ は偶関数なので $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+1)} dx = \pi(1 - e^{-a})$

1.2 1番の総評

実軸上に極がある複素積分で、あまり取り組みやすいとは言えない。類題をやったことがあれば何とかなるだろうが。難易度は 5 段階で 3.5。

2 2番

2番

(1)$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ に対して
$\cos\theta = \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 + a(\theta)\theta^2)$
を満たすように $a(\theta)$ を定めるとき、$\lim_{\theta\to 0} a(\theta) = 0$ を示せ。
(2)$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta = \sqrt{2\pi}$
を示せ。ただし、$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いても良い。

2.1 解答

2.1.1 （1）

$\cos\theta = \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 + a(\theta)\theta^2)$ より
$\log\cos\theta = -\frac{1}{2}\theta^2 + a(\theta)\theta^2$
よって $a(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\log\cos\theta}{\theta^2}$
ここで $\lim_{\theta\to 0}\theta^2 = 0, \lim_{\theta\to 0}\log\cos\theta = 0$ なのでロピタルの定理より
$\lim_{\theta\to 0}\frac{\log\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\tan\theta}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-1}{2\cos^2\theta} = -\frac{1}{2}$

2.1.2 （2）（不完全答案）

$\theta = \frac{t}{\sqrt{n}}$ とおくと、$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
また $\theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$ のとき $t : -\frac{\pi}{2}\sqrt{n} \to \frac{\pi}{2}\sqrt{n}$
このとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^n d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})t^2}dt$
ここで（1）より $\lim_{n\to\infty} a(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 0$ なので
$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$(この部分に問題がある。勝手に極限と積分とを入れ替えている)
=$\sqrt{2\pi}$

2.2 ２番の総評

そんなに難しくはないが、（2）がちょっと不完全なままで終わってしまった‥ これでも８割くらいの点数はあると思うが‥ 難易度は５段階で３。

3 ３番

4 ４番

４番

$w(x)$ を [0,1] 上の正値連続関数とし、自然数 n に対して V_n を n 次以下の x の実数係数多項式全体のなすベクトル空間とする。V_n 上の内積を
$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)w(x)dx f,g \in V_n$
で定める。
(1)V_n の正規直交基底 $P_0, P_1, \cdots p_n$ で、各 $P_k(k = 0,1,\cdots,n)$ の次数が k であるものが存在することを示せ。
(2) 各 k に対し、$(P_k, \frac{dP_k}{dx}) = 0$ となることを示せ。

4.1 解答

4.1.1 （1）

$c_m x^m + c_n x^n = x^m(c_m + c_n x^{n-m}) = 0$ が $\forall x \in R$ で成り立つのは $c_m = c_n = 0$ の時のみ
よって x^mと x^n は一次独立である。

これより $Q_k = c_{k0} + c_{k1}x + c_{k2}x^2 + \cdots + c_{kk}x^k (c_{kk} \neq 0)$ とおくと $(Q_0, \cdots Q_k)$ は一次独立である。
ここでグラムシュミットの正規直交化法により
$P_k = \frac{Q_k - \sum_{i=0}^{k-1}(Q_k, P_i)P_i}{||Q_k - \sum_{i=0}^{k-1}(Q_k, P_i)P_i||}$
とおくと、V_n の正規直交基底 $P_0, \cdots P_n$ で各 $P_k (k = 0, 1, \cdots, n)$ の次数が k であるものが存在する。

4.1.2 （2）

$(P_k, \frac{dP_k}{dx}) = (P_k, \sum_{i=0}^{k-1} b_i P_i) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i (P_k, P_i) = 0$

4.2 ４番の総評

解答は短いがあまり易しい問題とは言えない。難易度は５段階で 3.5。

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （1）

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ とおく。$x \in V_i$ の時 $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = y_a, x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_{n+1} = y_b$ とおくと、
$z_j = \begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1} a_k y_a + \sum_{k=i}^{n} a_k y_b & (i \leq j) \\ \sum_{k=1}^{i} a_k y_a + \sum_{k=i+1}^{n} a_k y_b & (i > j) \end{cases}$

5.1.2 （2）

v_{n+1} として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $Av_{n+1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$
よって v_{n+1} に対応する固有ベクトルは $\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$
ここで $v_i \in V_i$ として
$v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ b_i \\ \cdot \\ b_i \end{pmatrix}$

とおく。この時 $Av_i = \lambda_i v_i$ より

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1} a_k + b_i \sum_{k=i}^{n} a_k = \lambda_i \text{ー（}A\text{）} \\ \sum_{k=1}^{i} a_k + b_i \sum_{k=i+1}^{n} a_k = b_i\lambda_i \text{ー（}B\text{）} \end{cases}$$

このとき（B）ー（A）より $a_i - b_i a_i = \lambda_i(b_i - 1) \Leftrightarrow a_i(1 - b_i) = (b_i - 1)\lambda_i$

よって $\lambda_i = -a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

これを（A）に代入して $\sum_{k=1}^{i-1} a_k + b_i \sum_{k=i}^{n} a_k = -a_i$

これより $b_i = -\frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{n} a_k} (i = 1, 2, \cdots, n)$

以上より求める固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_i = -a_i \text{ に対して } v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ -\frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{n} a_k} \\ \cdot \\ -\frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{n} a_k} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{に対して} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.2　５番の総評

(1) は難しくないが、（２）は相当難しい。勘が必要である。難易度は５段階で 4.5。

6　６番

６番

区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う独立な確率変数列 $U_1, U_2 \cdots U_n$ に対し、それらの積を用いて次のように確率変数列 $\{V_n\}$ を作る。

$V_n = \Pi_{i=1}^{n} U_i (i = 1, 2, 3, \cdots)$

便宜上、$V_0 = 1$ としておく。このとき、正定数 a に対して $V_n > e^{-a}$ を満たす最大の n を N と表す。N はどのような分布に従うか。理由をつけて述べよ。

6.1　解答

$P(N = n) = P(\{V_n > e^{-a}\} \cap \{V_{n+1} < e^{-a}\}) = P(V_n > e^{-a}) - P(V_{n+1} > e^{-a})$

$= P(U_1 U_2 \cdots U_n > e^{-a}) - P(U_1 U_2 \cdots U_n U_{n+1} > e^{-a})$

$= P(\sum_{i=1}^{n} - \log U_i < a) - P(\sum_{i=1}^{n+1} - \log U_i < a)$

これより $Y_n = \sum_{i=1}^{n} - \log U_i$ の分布を求める。

$X_i = -\log U_i (i = 1, 2, \cdots n)$ とおくとき

$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)=f_{U_1U_2\cdots U_n}(u_1,u_2,\cdots u_n)\mid J\mid$

ここで $J=\begin{vmatrix} -e^{-X_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -e^{-X_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & -e^{-X_3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -e^{-X_n} \end{vmatrix}=(-1)^n e^{-\sum_{i=1}^n X_i}$

以上より $f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)=e^{-\sum_{i=1}^n X_i}(0<x_i<\infty)$

また $Y_j=\sum_{i=1}^j X_i(j=1,2,\cdots n)$ より $X_j=Y_j-Y_{j-1}$

このとき $f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)=\mid J\mid f_{X_1X_2\cdots X_n}$

$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & -1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1$

$f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)=e^{-y_n}(0<y_1<y_2<\cdots<y_n<\infty)$

よって $f_{Y_2\cdots Y_n}(y_2\cdots y_n)=\int_0^{y_2} f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)dy_1=y_2e^{-y_n}(0<y_2<\cdots<y_n<\infty)$

$f_{Y_3\cdots Y_n}(y_2\cdots y_n)=\int_0^{y_3} f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)dy_1=\frac{y_3^2}{2!}e^{-y_n}(0<y_3<\cdots<y_n<\infty)$

これを繰り返すことによって $f_{Y_n}(y_n)=\frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}$

以上より求めたい確率は

$\int_0^a f_{Y_n}(y_n)dy_n-\int_0^a f_{Y_{n+1}}(y_{n+1})dy_{n+1}=\int_0^a \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}dy_n-\int_0^a \frac{y_{n+1}^n}{(n)!}e^{-y_{n+1}}dy_{n+1}$

$=\int_0^a \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}dy_n-\{[-\frac{z^n}{n!}e^{-z}]_0^a+\int_0^a \frac{n}{n!}z^{n-1}e^{-z}dz\}$

$=\frac{a^n}{n!}e^{-a}$

以上より N は母数 a のポアソン分布に従う。

6.2　６番の総評

かなり骨があり、難しい問題。難易度は５段階で 4.5。

7　７番

７番

確率変数 X_1,X_2,X_3 はそれぞれ平均０、分散 σ^2 を持ち、２変数間の相関係数がいずれも $\rho(\rho>0)$ であるとする。確率変数 $Y=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3$ を考える。ただし、a_1,a_2,a_3 は実数で、$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ を満たしながら動くとする。

(1)Y の分散を $a_1,a_2,a_3,\sigma^2,\rho$ で表せ。

(2)Y の分散が最大となるような a_1,a_2,a_3 の値を求めよ。

(3)Y の分散が最小となるのは $a_1+a_2+a_3=0$ のときであることを示せ。

7.1 解答

7.1.1 （1）

$V[Y]=V[a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3]=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\sigma^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)\rho\sigma^2$
=$\sigma^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)\rho\sigma^2$

7.1.2 （2）

$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ という条件の下で、$a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3$を最大にすればよい。
$f(a_1,a_2,a_3)=a_1^2+a_2^2+a_3^2-1$
$g(a_1,a_2,a_3)=a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3$
$F(a_1,a_2,a_3,\lambda)=g+\lambda f$
とおいてラグランジュの未定乗数法を使うと
$(a_2+a_3)+2\lambda a_1=0$
$(a_1+a_3)+2\lambda a_2=0$
$(a_2+a_1)+2\lambda a_3=0$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$
これより $\lambda=-1$,$a_1+a_2+a_3=0, a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ の時 $V[Y]=\sigma^2+2\rho\sigma^2$
$a_1+a_2+a_3=0$ の時、$(a_1+a_2+a_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)=0$
よって $a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=-\frac{1}{2}$
この時 $V[Y]=\sigma^2-\rho\sigma^2$
よって $a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ の時 $V[Y]$ が最大

7.1.3 （3）

(2) より)Y の分散が最小となるのは $a_1+a_2+a_3=0$ のときである。

7.2 ７番の総評

１０問の中で１番易しい問題。ラグランジュの未定乗数法もいい加減使い慣れたでしょう。難易度は５段階で 1.5。

8 ８番

８番

確率変数 X,Y の同時密度関数は
$f(x,y)=ce^{x-3y} - < x \leq y < \infty$
であるとする。
(1) 定数 c の値を求めよ
(2)X,Y の周辺密度関数 $f_1(x), f_2(x)$ を求めよ。
(3)X=x を与えたときの Y の条件付き密度関数 $f_2(y|x)$ を求めよ。
(4)X,Y の平均、分散はそれぞれいくらか。X と Y の相関係数はいくらか。

8.1 解答

8.1.1 （1）

$\int_0^\infty \int_0^y f(x,y)dxdy = 1$ より
$c\int_0^\infty \{\int_0^y e^{x-3y}dx\}dy = 1$
これを解いて c=6

8.1.2 （2）

$f_1(x) = \int_x^\infty 6e^{x-3y}dy = 2e^{-2x}$
$f_2(y) = \int_0^y 6e^{x-3y}dx = 6e^{-3y}(e^y - 1)$

8.1.3 （3）

$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = 3e^{3x-3y}$

8.1.4 （4）

$E[X] = \frac{1}{2}, E[Y] = \frac{5}{6}$
$V[X] = \frac{1}{4}, V[Y] = \frac{13}{36}$
$Cov(X,Y) = \frac{1}{4}$
$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

8.2 ８番の総評

１０問の中では２番目に取り組みやすい問題。難易度は５段階で２。

9 ９番

９番

$X_1 \cdots X_n$ を分散が有限な母集団から取られた無作為標本とし，$\hat{\theta}$ をその標本分散とする．さらに，$X_1 \cdots X_n$ から X_i を除いた n-1 個の標本での標本分散を $\hat{\theta_{(i)}}$ とおく．
$\hat{\theta_{(\cdot)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{\theta_{(i)}}, \tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)}$
とおくとき，$\tilde{\theta}$ は標本不偏分散に等しいことを示せ．

9.1　解答

$X_1 \cdots X_n$ から X_i を除いた n-1 個の標本の標本平均を $X_n^{(i)}$ とするとき,
$X_n^{(i)} = \frac{1}{n-1}\{\sum_{l=1}^n X_l - X_i\} = \frac{1}{n-1}(n\overline{X_n} - X_i)$($\overline{X_n}$ は $X_1 \cdots X_n$ の標本平均)
このとき $\hat{\theta}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - X_n^{(i)})^2 - \frac{1}{n-1}(X_i - X_n^{(i)})^2$
$=\frac{1}{n-1}\{\sum_{k=1}^n X_k^2 - 2X_n^{(i)}\sum_{k=1}^n X_k + n(X_n^{(i)})^2\} - \frac{1}{n-1}(X_i^2 - 2X_iX_n^{(i)} + (X_n^{(i)})^2)$
$=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n-1}X_i^2 + \frac{2X_n^{(i)}}{n-1}(X_i - n\overline{X_n}) + (X_n^{(i)})^2$
よって $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{\theta_{(i)}}$
$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n-1}X_i^2 + \frac{2X_n^{(i)}(X_i - n\overline{X_n})}{n-1} + (X_n^{(i)})^2\}$
$=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})X_n^{(i)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_n^{(i)})^2$
ここで $\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})X_n^{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})(n\overline{X_n} - X_i)$
$=-\frac{n^3\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i$
また $\sum_{i=1}^n (X_n^{(i)})^2 = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n (n\overline{X_n} - X_i)^2$
$=\frac{n^3\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$
以上より $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n(n-1)}\{-\frac{n^3\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i\} + \frac{1}{n}\{\frac{n^3\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\}$
$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{2n\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{1}{n(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$
よって $(n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n^2\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2$
また $\hat{\theta}$ は標本分散なので $n\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$
よって $\tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2 - \sum_{k=1}^n X_k^2 + \frac{n^2-2n}{n-1}\overline{X_n}^2 + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2$
$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2$
また標本不偏分散は $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2$
以上より $\tilde{\theta}$ は標本不偏分散に等しい。

9.2　９番の総評

計算が非常に複雑。取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5。

10　１０番

１０番

$w_t, t \in Z$ は互いに独立で、それぞれ平均０分散１の正規分布に従うとする。$X_t = w_t + w_{t-1}, Y_t = w_t - w_{t-1}$ と定義するとき次の問に答えよ。ただし、Z は整数全体の集合とする。
(1) 各 $h \in Z$ に対して $E[X_{t+h}X_t]$ と E$[Y_{t+h}X_t]$ を求め、これらが h のみに依存し、t には依存しないことを示せ。
(2)$r(h) = E[X_{t+h}X_t], s(h) = E[Y_{t+h}X_t]$ と表すとき
$E[\{Y_{t+h} - X_t\}^2]$
を最小にする a を $r()$ と $s()$ を用いて表せ。

10.1 解答

10.1.1 （1）

$E[X_{t+h}X_t]=E[(w_{t+h}+w_{t+h-1})(w_t+w_{t-1})]=E[w_{t+h}w_t]+E[w_{t+h}w_{t-1}]+E[w_{t+h-1}w_t]+E[w_{t+h-1}w_{t-1}]$
$E[w_iw_j]=E[w_i]E[w_j]=0(w_i$と w_jは独立で平均は０なので$)$
よって $h=0$ の時 $E[X_tX_t]=E[w_t^2]+E[w_{t-1}^2]=2$
$h=1$ の時 $E[X_{t+1}X_t]=E[w_t^2]=1$
$h=-1$ の時 $E[X_{t-1}X_t]=E[w_{t-1}^2]=1$
その他の時は０
$E[Y_{t+h}X_t]=E[(w_{t+h}-w_{t+h-1})(w_t+w_{t-1})]=E[w_{t+h}w_t]+E[w_{t+h}w_{t-1}]-E[w_{t+h-1}w_t]-E[w_{t+h-1}w_{t-1}]$
$h=0$ の時 $E[Y_tX_t]=0$
$h=1$ の時 $E[Y_{t+1}X_t]=-1$
$h=-1$ の時 $E[Y_{t-1}X_t]=1$
以上より $E[X_{t+h}X_t],E[Y_{t+h}X_t]$ は h のみに依存し、t には依存しない。

10.1.2 （2）

$E[\{Y_{t+h}-aX_t\}^2]=E[Y_{t+h}^2]-2aE[Y_{t+h}X_t]+E[a^2X_t^2]$
=$2a^2-2aE[Y_{t+h}X_t]+E[Y_{t+h}^2]$
=$2(a-\frac{E[Y_{t+h}X_t]}{2})^2-\frac{E[Y_{t+h}X_t]^2}{2}+E[Y_{t+h}^2]$
よって $a=\frac{E[Y_{t+h}X_t]}{2}=\frac{s(h)}{2}$ の時 $E[\{Y_{t+h}-aX_t\}^2]$ は最小になる。

10.2 １０番の総評

結構簡単。難易度は５段階で２。

11 全体的な総評

１，２，７，８，１０番に手を出すのがいいだろう。

平成１６年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ とおくと

$f_{xx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$，$f_{yy} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$，$f_{xy} = f_{yx} = \frac{xy}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{xy}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$

これより $H = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2}g" + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' & \frac{xy}{x^2+y^2}g" - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' \\ \frac{xy}{x^2+y^2}g" - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' & \frac{y^2}{x^2+y^2}g" + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' \end{pmatrix}$

1.1.2　（2）

$\frac{\partial g}{\partial r} = -2re^{-r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = e^{-r^2}(4r^2-2)$

これより $\mid H - tE \mid = \begin{vmatrix} (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} - t & 4xye^{-x^2-y^2} \\ 4xye^{-x^2-y^2} & (4y^2-2)e^{-x^2-y^2} - t \end{vmatrix} = t^2 - (4r^2-4)e^{-r^2}t + 4(1-2r^2)e^{-2r^2} = 0$

これを解くと $\lambda_1 = -2e^{-r^2}, \lambda_2 = e^{-r^2}(4r^2-2)$

1.2　１番の総評

チェインルール頑張ってください。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$c \times x = \begin{pmatrix} c_2x_3 - c_3x_2 \\ c_3x_1 - c_1x_3 \\ c_1x_2 - c_2x_1 \end{pmatrix}$ $A \times x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

よって $c \times x = A \times X$ とおくと $A = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$$A^2 = \begin{pmatrix} -c_3^2 - c_2^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_3^2 - c_1^2 & c_3c_2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & c_3(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & -c_2(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \\ -c_3(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & 0 & c_1(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \\ c_2(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & -c_1(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & 0 \end{pmatrix} = -(c_1^2+c_2^2+c_3^2)A$$

2.1.3　（３）

(2) より n が偶数の時は

$A^n = -(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)A^{n-2}$

$= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^2 A^{n-4}$

= ⋯

=$(-1)^{\frac{n}{2}-1}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{n}{2}-1}A^2$

=$(-1)^{\frac{n}{2}-1}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix} -c_3^2 - c_2^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_3^2 - c_1^2 & c_3c_2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$

n が奇数の時は

$A^n = -(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)A^{n-2}$

=$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{n-1}{2}}A$

=$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$

2.2　２番の総評

(3) は思いつき次第で計算が非常に楽になる。難易度は５段階で 2.5 か３。

3　３番

3.1　予備知識

A を n 次の実対称行列とする時、次の二つの命題は同値

(1)0 でない全てのベクトルに対して ${}^t xAx > 0$

(2)A の全ての固有値が $\lambda_i > 0$

3.2　解答

3.2.1　（１）

x を０でないベクトルとする時

${}^t xBx = {}^t x\, {}^t AAx = (Ax)^t Ax - \| Ax \|^2 \geq 0$

よって B は正定値行列なので定理より B の固有値は全て非負である。

3.2.2　（２）

$\| Ax \| = \sqrt{{}^t(Ax)(Ax)} = \sqrt{{}^t x\, {}^t AAx}$

ここで P を B を対角化する直交行列とし、$x = Py$ とおくと

$\| Ax \| = \sqrt{{}^t y\, {}^t P\, {}^t AAPy} = \sqrt{{}^t y\, {}^t PBPy}$

$$= \sqrt{{}^t y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} y} \ (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{とする})$$

$= \sqrt{\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$
ここで ${}^t yy = {}^t xP\,{}^t Px = {}^t xx = 1$
よって $\| Ax \| \leq \sqrt{\lambda_1 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$
以上より $\sup_{x \in R^n \| x \| = 1} \| Ax \| = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda}$
同様に $\inf_{x \in R^n \| x \| = 1} \| Ax \| = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\mu}$

3.3　３番の総評

正定値行列に関する知識がないとできない。難易度は５段階で４。

4　４番

5　５番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$E[X] = V[X] = \lambda$

5.1.2　（2）

$l_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\lambda) = \sum_{i=1}^n \log e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \sum_{i=1}^n (-\lambda + x_i \log \lambda - \log(x_i!))$
これより $S_n = l_n'(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda}$
よって $E[S_n] = -n + \frac{1}{\lambda} n\lambda = 0$
$V[X] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n V[X_i] (X_1 \cdots X_n \text{は無作為標本なので})$
$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot n\lambda = \frac{n}{\lambda}$

5.1.3　（3）

$S_n = 0$ とおくと $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ となり、λ について増減表を書くと $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ で極大となることが分かる。
よってこれが λ の最尤推定量であり、$E[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$
$V[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n}$
ここで λ に関する X のフィッシャー情報量を $I(\lambda)$ とおくと
$I(\lambda) = E[(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(X, \lambda))^2] = E[(-1 + \frac{X_i}{\lambda})^2] = \frac{1}{\lambda}$
よって $X_1 \cdots x_n$ の λ に対するフィッシャー情報量は $\frac{n}{\lambda}$
ここで $V[\lambda] = \frac{\lambda}{n}$ より λ の分散はクラメルラオの下限を達成しているので λ は有効推定量である。

5.2　５番の総評

推定量の性質に関する知識があれば十分取り組める。難易度は５段階で３。

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（１）

$F_1(x) = F(x, \infty) = (1 - e^{-x}), F_2(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y}, f_1(x) = e^{-x}, f_2(y) = e^{-y}$

6.1.2　（２）

$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4\alpha e^{-2x-2y} - 2\alpha e^{-x-2y} - 2\alpha e^{-2x-y} + (\alpha + 1)e^{-x-y}$

6.1.3　（３）

$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = 4\alpha e^{-x-2y} - 2\alpha e^{-2y} - 2\alpha e^{-x-y} + (\alpha + 1)e^{-y}$

6.1.4　（４）

$E[X] = 1, V[X] = 1, E[Y] = 1, V[Y] = 1, E[XY] = \frac{\alpha}{4} + 1$
$Cov(X, Y) = \frac{\alpha}{4}, \rho_{X,Y} = \frac{\alpha}{4}$

6.2　６番の総評

非常に取り組みやすい統計の問題。難易度は５段階で２。

全体的な総評

選択問題は５と６をやるのがいいと思われる。３と４は難しいので統計ができないと極めて苦しい。

平成１６年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$e^{i\theta} = z$ とおくと、$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$
また $\frac{dz}{d\theta} = iz$
よって (与式)=$\int_{|z|=1} \frac{1}{(1+\frac{a}{2}(z+\frac{1}{z}))^3} \cdot \frac{dz}{iz} = -i \int_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+\frac{a}{2}(z^2+1))^3} dz$
ここで $f(z) = \frac{z^2}{(z+\frac{a}{2}(z^2+1))^3}$ とおくと、$f(z)$ の特異点は $z = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$
$0 < a < 1$ より $| z |= 1$ とその内部にあるのは $z = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$ で 3 位の極。
よって $Res_{z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}} f(z) = \frac{a^2}{8(1-a^2)}\{\frac{3(a-2)}{a-1} - \frac{2(2a+3)}{\sqrt{1-a^2}}\}$
よって (与式)=$2\pi i(-i)Res_{z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}} f(z) = \frac{a^2\pi}{4(1-a^2)}\{\frac{3(a-2)}{a-1} - \frac{2(2a+3)}{\sqrt{1-a^2}}\}$

1.2　１番の総評

計算間違ってるかも $\because$ 基本的な複素積分の問題。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\frac{\partial}{\partial t}(1 + tu(x))\log(1 + tu(x)) = u(x)(1 + \log(1 + tu(x))$
$\forall t \in [0, 1]$ で $\infty > m > 1 + tu(x) > inf_{t,x}(1 + tu(x)) = 0$
$M > log(1 + tu(x)) > a' > -\infty$
これより $-\infty < a \leq (1 + tu(x))\log(1 + tu(x)) \leq Mm < \infty$
よって $\int_0^1 (u(x)(1 + \log(1 + tu(x)))dx < \infty$
また $(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))$ は $\forall t \in [0, 1]$ を固定した時、x の関数として可積分
$(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))$ は t について C^1 関数。
以上より微積分の順序交換可能定理から
$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 (1 + tu(x))\log(1 + tu(x))dx$
$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))dx$
$= 2\int_0^1 u(x)\log(1 + tu(x))dx$
よって $F'(t) = 2\int_0^1 u(x)\log(1 + tu(x))dx - 2t\{\int_0^1 | u(x) | dx\}^2$
同様にして $F"(t) = 2\int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx - 2\{\int_0^1 | u(x) | dx\}^2$

2.1.2　（2）

シュワルツの不等式より
$(\int_0^1 | u(x) | dx)^2 = (\int_0^1 \frac{|u(x)|}{\sqrt{1+tu(x)}}\sqrt{1 + tu(x)}dx)^2 \leq \int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx \int_0^1 (1 + tu(x))dx$
条件より $\int_0^1 (1 + tu(x))dx = 1$ なので
$(\int_0^1 | u(x) | dx)^2 \leq \int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx$
これより $F"(t) \geq 0$ が言えた。

また $F'(0) = 2\int_0^1 u(x)dx = 0$ なので $F'(t) \geq 0$。
よって F(t) は単調増加関数である。

2.2　２番の総評

微積分の順序交換可能定理を使えないとだめなのでなかなか難しい。その説明はだいぶ省いた（書くのがだるかったから)。難易度は５段階で４。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（１）

$\dot{F}(x,y) = \frac{2}{a}x^{\frac{2}{a}-1}\dot{x}(\frac{x^2}{1+a} - y^2) + x^{\frac{2}{a}}(\frac{2x}{1+a}\dot{x} - 2y\dot{y}) = \frac{2}{a}x^{\frac{2}{a}-1}\cdot axy\cdot(\frac{x^2}{1+a} - y^2) + x^{\frac{2}{a}}(\frac{2ax^2y}{1+a} - 2y(x^2 - y^2)) = 0$
よって $x(0) \neq 0$ である解上で F(x,y) は一定

3.1.2　（２）

$F(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{x} = C$（(1) より）
よって $(x + \frac{C}{2})^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$ となるので $x(0) \neq 0$ であるすべての解が有界

3.1.3　（３）

$F(x,y) = x(\frac{x^2}{3} - y^2) = C$ より非自明解は非有界

3.2　３番の総評

あまりやったことのない問題で取り組みやすいとは言えない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（１）

$(u_i, u_k) = 0 (1 \leq i < k)$ と仮定する
このとき $(u_i, u_{k+1}) = (u_i, a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(a_{k+1}, u_j)}{(u_j, u_j)} u_j)$
=$(u_i, a_{k+1}) - \frac{(a_{k+1},u_1)}{(u_1,u_1)}(u_i, u_1) - \frac{(a_{k+1},u_2)}{(u_2,u_2)}(u_i, u_2) - \cdots\cdot - \frac{(a_{k+1},u_i)}{(u_i,u_i)}(u_i, u_i) - \cdots - \frac{(a_{k+1},u_k)}{(u_k,u_k)}(u_i, u_k)$
$= (u_i, a_{k+1}) - (a_{k+1}, u_i)$(仮定より)
$= 0$
また $(u_k, u_{k+1}) = (u_k, a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(a_{k+1}, u_j)}{(u_j, u_j)} u_j)$
=$(u_k, a_{k+1}) - \frac{(a_{k+1},u_1)}{(u_1,u_1)}(u_i, u_1) - \frac{(a_{k+1},u_2)}{(u_2,u_2)}(u_i, u_2) - \cdots\cdot - \frac{(a_{k+1},u_i)}{(u_i,u_i)}(u_i, u_i) - \cdots - \frac{(a_{k+1},u_k)}{(u_k,u_k)}(u_i, u_k)$

$=(u_k,a_{k+1})-(a_{k+1},u_k)$(仮定より)
$=0$
また $(u_1,u_2)=(a_1,a_2)-\frac{(a_1,a_2)}{(a_1,a_1)}(a_1,a_1)=0$
よって帰納的に $(u_i,u_j)=0(1\leq i,j\leq m-1.i\neq j)$
これより ${}^tUU=\begin{pmatrix} {}^tu_1u_1 & {}^tu_1u_2 & \cdot & \cdot & \cdot & {}^tu_1u_n \\ {}^tu_2u_1 & {}^tu_2u_2 & \cdot & \cdot & \cdot & {}^tu_2u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^tu_nu_1 & {}^tu_nu_2 & \cdot & \cdot & \cdot & {}^tu_nu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tu_1u_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & {}^tu_2u_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & {}^tu_nu_n \end{pmatrix}$
以上より t^UU は対角成分が全て正の対角行列である。

4.1.2 （2）

$a_1,\cdots a_n$ が１次独立の時、$a_1\cdots a_n$ を縦ベクトルとする行列 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_n \end{pmatrix}$ の行列式は
$\mid A\mid\neq 0$ を満たす
このとき $\begin{vmatrix} u_1 & u_2+\frac{(a_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot & \cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}\neq 0$
$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot & \cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}$
$+\begin{vmatrix} u_1 & \frac{(a_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot & \cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\Big| u_1 \quad u_2 \quad u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 \quad \cdot \quad \cdot$
じ列を含む行列の行列式は０なので)
これを繰り返して
$\begin{vmatrix} u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \end{vmatrix}\neq 0$ をえる。よって命題１と命題２は同値である。

4.2 ４番の総評

難しくはないが、易しくもない。難易度は５段階で 3.5。

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （1）

$J(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=\frac{1}{2}(x_1-a_1)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_n-a_n)^2-\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots+a_n^2)\geq-\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots+a_n^2)$
よって $J(x)$ は下から有界

5.1.2 （2）

(左辺)=2$\{\frac{1}{2}\mid\mid\frac{x+y}{2}\mid\mid^2-(a,\frac{x+y}{2})\}+\frac{1}{4}\mid\mid x-y\mid\mid^2$
=$\frac{1}{4}\{\mid\mid x+y\mid\mid^2+\mid\mid x-y\mid\mid^2\}-(a,x+y)$
=$\frac{1}{4}\{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2+(x_1-y_1)^2+\cdot\cdot+(x_n-y_n)^2-a_1(x_1+y_1)\cdots-a_n(x_n+y_n)\}$
=$\frac{1}{2}\mid\mid x\mid\mid^2-(a,x)+\frac{1}{2}\mid\mid y\mid\mid^2-(a,y)$
=$J(x)+J(y)$

5.1.3 （3）

(1) より $\int_{x\in R^n} J(x) = -\frac{1}{2}a^T a$ より $J(x)$ は最小値を達成する

5.2 ５番の総評

(3) の解答がちょっと微妙だが、(1) と (2) は極めて簡単。難易度は５段階で３か 3.5。

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （1）

測定法 [1]:a,b の推定量はそれぞれ X_1, X_2
測定法 [2]:$E[Y_1] = a+b, E[Y_2] = a-b$ より a,b の推定量は $\frac{Y_1+Y_2}{2}, \frac{Y_1-Y_2}{2}$
測定法 [3]:$E[Z_1] = a, E[Z_2] = a+b$ より a,b の推定量は $Z_1, Z_2 - Z_1$

6.1.2 （2）

$V[X_1] = V[X_2] = 1$
$V[\frac{Y_1+Y_2}{2}] = \frac{1}{2}, V[\frac{Y_1-Y_2}{2}] = \frac{1}{2}$
$V[Z_1] = 1, V[Z_2 - Z_1] = 2$
よって測定２が分散が一番小さくて優れており、測定３が分散が一番大きく優れていない。

6.2 ６番の総評

どれくらい記述すればいいのかが分かりにくいが取り組みやすい問題。難易度は５段階で３。

7 ７番

7.1 解答

7.1.1 （1）

$f_2(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_2(x+h)-F_2(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P\{x \le X_{(2)} \le x+h\}$
$P\{x \le X_{(2)} \le x+h\} = \frac{3!}{1!1!1!}\{F(x)\}^1\{F(x+h)-F(x)\}^1\{1-F(x+h)\}^1$(F は $X_1 \cdots X_{2n-1}$ の分布関数)
よって $f_2(x) = \lim_{h\to 0} 6 \cdot F(x) \cdot \frac{F_(x+h)-F_(x)}{h}\{1-F(x+h)\} = 6F(x)f(x)(1-F(x)) = 6x(1-x)$
このとき $f_2(x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3$
また $E[X_2(x)] = \int_0^1 xf_2(x)dx = \frac{1}{2}$
$E[X_2^2(x)] = \int_0^1 xf_2(x)dx = \frac{3}{10}$
$V[X_2(x)] = \frac{1}{20}$

7.1.2 （2）

$f_n(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{x\le X_{(n)}\le x+h\}$
$P\{x\le X_{(n)}\le x+h\}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\{F(x)\}^{n-1}\{F(x+h)-F(x)\}\{1-F(x+h)\}^{n-1}$
よって $f_n(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\{F(x)\}^{n-1}\frac{F_(x+h)-F_(x)}{h}\{1-F(x+h)\}^{n-1}$
$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}f(x)\{1-F(x)\}^{n-1}\{F(x)\}^{n-1}$
$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\cdot 1\cdot(1-x)^{n-1}x^{n-1}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}(1-x)^{n-1}x^{n-1}$
また $E[X_{(n)}(x)]=\int_0^1 xf_n(x)dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}B(n+1,n)=\frac{1}{2}$
$E[X_{(n)}^2(x)]=\int_0^1 x^2f_n(x)dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}B(n+2,n)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{2n+1}$
$V[X_{(n)}(x)]=\frac{1}{4(2n+1)}$

7.2 ７番の総評

順序統計量についての知識がないとやりにくい。難易度は５段階で 3.5。

8 ８番

8.1 解答

8.1.1 （1）

$$\begin{cases} S_1=X_1 \\ S_2=X_1+X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n=X_1+\cdots+X_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1=S_1 \\ X_2=S_2-S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n=S_n-S_{n-1} \end{cases} \qquad (0<S_1<S_2<\cdots<S_n)$$

よって $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_1}{\partial S_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_2}{\partial S_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_n}{\partial S_n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$

よって $f_{S_1\cdots S_n}=|J|f_{X_1\cdots X_n}(s_1,s_2-s_1,\cdots,s_n-s_{n-1})$
$=f_{X_1}(s_1)f_{X_2}(s_2-s_1)\cdots f_{X_n}(s_n-s_{n-1})$($X_1\cdots X_n$は独立なので)
$=\lambda^n e^{-\lambda s_n}$
これより $f_{S_2\cdots S_n}=\int_0^{s_2}f_{S_1\cdots S_n}ds_1=\lambda^n s_2 e^{-\lambda s_n}(0<S_2<\cdots<S_n)$
これを繰り返して $f_{S_n}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}$
これより $f_n(s)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}s^{n-1}e^{-\lambda s}$

8.1.2 （２）

T の密度関数を $p(t)$ とするとき $p(t) = \frac{1}{\lambda^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{1}{\lambda}t}$
よって $g(s,t) = \frac{1}{(\Gamma(n))^2}(st)^{n-1} e^{-\frac{1}{\lambda}t-\lambda s}$

8.1.3 （３）

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial W} & \frac{\partial S}{\partial U} \\ \frac{\partial T}{\partial W} & \frac{\partial T}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{U} & -\frac{W}{U^2} \\ U & W \end{vmatrix} = \frac{2W}{U}$
これより $h(u,w) =\mid J \mid g(s,t) = \frac{2w}{u} g(\frac{w}{u}, uw) = \frac{2}{(\Gamma(n))^2} \frac{w^{2n-1}}{u} e^{-\frac{1}{\lambda}uw - \lambda \frac{w}{u}}$

8.1.4 （４）

$h_1(u) = \int_0^\infty h(u,w)dw = \frac{2}{(\Gamma(n))^2 u} \int_0^\infty w^{2n-1} e^{-(\frac{u}{\lambda}+\frac{\lambda}{u})w} dw$
$(\frac{u}{\lambda} + \frac{\lambda}{u})w = t$ とおくと $\frac{dt}{dw} = \frac{u^2+\lambda^2}{\lambda u}$
これより $h_1(u) = \frac{2}{(\Gamma(n))^2} (\frac{\lambda}{u^2+\lambda^2})^{2n} (\frac{u}{u^2+\lambda^2})^{2n-1} \int_0^\infty t^{2n-1} e^{-t} dt$
$= \frac{2\Gamma(2n)}{\{\Gamma(n)\}^2} \frac{\lambda^{2n} u^{2n-1}}{(u^2+\lambda^2)^{2n}}$
$h_2(w|u) = \frac{h(u,w)}{h_1(u)} = \frac{w^{2n-1}(u^2+\lambda^2)^{2n}}{\Gamma(2n)\lambda^{2n} u^{2n}} e^{-\frac{1}{\lambda}uw - \lambda\frac{w}{u}}$

8.2 ８番の総評

解答は長いが、一つ一つの問題は難しくはない。難易度は５段階で３か 3.5。

9 ９番

9.1 解答

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{\frac{m}{R}} Z_1 \\ X_2 = \sqrt{\frac{m}{R}} Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p = \sqrt{\frac{m}{R}} Z_p \\ Y = \sqrt{R} \end{cases} \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{Y}{\sqrt{m}} X_1 \\ Z_2 = \frac{Y}{\sqrt{m}} X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_p = \frac{Y}{\sqrt{m}} X_p \\ R = Y^2 \end{cases}$$

よって $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_1}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_2}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_2}{\partial Y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial Z_p}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_p}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_p}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_p}{\partial Y} \\ \frac{\partial R}{\partial X_1} & \frac{\partial R}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial R}{\partial X_p} & \frac{\partial R}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{Y}{\sqrt{m}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{X_1}{\sqrt{m}} \\ 0 & \frac{Y}{\sqrt{m}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{X_2}{\sqrt{m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{Y}{\sqrt{m}} & \frac{X_p}{\sqrt{m}} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2Y \end{vmatrix} = \frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p}$

よって $f_{X_1,X_2,\cdots X_p,Y} = \frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} f_{Z_1,\cdots Z_p,R}(z_1 \cdots z_p, r) = \frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} f_{Z_1,\cdots Z_p,R}(\frac{yx_1}{\sqrt{m}}, \cdots, \frac{yx_p}{\sqrt{m}}, y^2)$
$=\frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p} e^{-\frac{y^2}{2m}(x_1^2+\cdots x_p^2)} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} y^{m-2} e^{-\frac{y^2}{2}}$
よって $f_{X_1,X_2,\cdots X_p}(x_1, x_2, \cdots x_p) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2,\cdots X_p,Y} dy$
$\frac{y^2}{2m}(x_1^2 + \cdots x_p^2) = t$ とおくと $\frac{dt}{dy} = y(\frac{m+x_1^2+\cdots x_p^2}{m})$
このとき $f_{X_1,X_2,\cdots X_p}(x_1, x_2, \cdots x_p) = \frac{2}{(\sqrt{2\pi m})^p \Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{-t} \{ \sqrt{\frac{2mt}{m+x_1^2+\cdots x_p^2}} \}^{p+m-1} \sqrt{\frac{m+x_1^2+\cdots x_p^2}{2mt}} \frac{m}{m+x_1^2+\cdots x_p^2} dt$
$=\frac{m^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+p}{2})}{(m+x_1^2+\cdots x_p^2)^{\frac{m+p}{2}}}$

9.2　９番の総評

計算が難しく、取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

10　１０番

10.1　解答

10.1.1　（１）

正規分布の再生性より $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{2\sigma^2}{n})$
H_0 の下で $\overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$
H_1 の下で $\overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(\delta, \frac{2\sigma^2}{n})$
ここで H_0 の下で $p(\overline{X_n} - \overline{Y_n} > p) = \alpha$
H_1 の下で $p(\overline{X_n} - \overline{Y_n} < p) = \beta$ とおいて正規化すると
$p(\frac{\overline{X_n}-\overline{Y_n}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} > \frac{p}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}) = \alpha$
$p(\frac{\overline{X_n}-\overline{Y_n}-\delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} < \frac{p-\delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}) = \beta$
$\frac{p}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} = z_\alpha, \frac{p-\delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} = z_{1-\beta} = -z_\beta$
これを解いて $n = \frac{2\sigma^2(z_\alpha+z_\beta)^2}{\delta^2}$(切り上げが必要)

10.1.2　（２）

(1) より δ の値を大きくしていくと、n の値は小さくなっていく。
よって n を $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ の時と同じ値にすればよい。

10.1.3　（３）

検出力は $1 - \beta = 0.80$ より $\beta = 0.20$
よって (1) と (2) より $n \geq \frac{2\times0.09}{0.01}(1.645 + 0.842)^2 = 111.3$
よって 112 回以上の実験が必要

10.2　１０番の総評

検出力についての知識がないとできない。難易度は５段階で 3.5 くらい。

全体的な総評

まず、１番は必答。次に５，６，８が解きやすい。難易度５の問題は見受けられないが、2.5 以下の問題もなく、標準よりやや難しめの問題が目立つ。

平成１７年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1 １番

1.1 解答

1.1.1 （1）

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ より $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(r>0$ より$)$
ここで $\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}=\frac{x_2^2+x_3^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{\partial r}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}=\frac{x_1^2+x_3^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{\partial r}{\partial x_3}=\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
よって $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1})$
$=\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial r})\frac{\partial r}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_1})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$
同様にして $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_2})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_3})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}$
以上より $(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial g}{\partial r}\frac{2}{r}=g"(r)+\frac{2}{r}g'(r)$

1.1.2 （2）

$i=1$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_1^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r^{m+2}})=\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot m(m+1)r^{-m-2}$
$i=2$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_2^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r^{m+2}})=\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot m(m+1)r^{-m-2}$
$i=3$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_3^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\cos^2\theta}{r^{m+2}})=\cos^2\theta\cdot m(m+1)r^{-m-2}$

1.2 １番の総評

またまたチェインルールの問題。難易度は５段階で３。

2 ２番

2.1 解答

a の値は $1,-\frac{5}{4}$
$a=1$ の時
固有値 $t=-2$（重解）に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

固有値 $t=1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$a=-\frac{5}{4}$ の時

固有値 $t=-\frac{1}{2}$（重解）に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

固有値 $t=-2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

2.2　２番の総評

かなり簡単な問題。計算間違いしないように。難易度は５段階で 1 か 1.5 くらい。

3　３番

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

$\cos u=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \cos v=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$ より
$\cos^2 u=\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}, \cos^2 v=\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}$
ここで $\sin^2 u=1-\cos^2 u=1-\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}=\frac{x^2(1-y^2)}{1-x^2y^2}=x^2\cos^2 v$
よって $x=\frac{\sin u}{\cos v}(0<x<1)$ より
また $\sin^2 v=1-\cos^2 v=1-\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}=\frac{y^2(1-x^2)}{1-x^2y^2}=y^2\cos^2 u$
よって $y=\frac{\sin v}{\cos u}(0<y<1)$ より

4.1.2　（2）

$x=\frac{\sin u}{\cos v}, y=\frac{\sin v}{\cos u}$ より
$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin v\sin u}{\cos^2 v}\\ \frac{\sin v\sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{vmatrix}=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u}$
よって $I=\iint_\Delta \frac{1}{1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u}}(1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u})dudv=\iint_\Delta 1dudv=\frac{\pi^2}{8}$

4.2　４番の総評

(1) はこの解答のようにやることによって大幅に計算量を減らすことができる。難易度は５段階で 3.5 くらい。

5　5番

5番

事象 A,B,C とそれらの余事象 A^c, B^c, C^c に対して、記号
$A_1 = A, A_2 = A^c, B_1 = B, B_2 = B^c, C_1 = C, C_2 = C^c$
を用いて表現するとき、
$P(A_i \cap B_j \cap C_k) > 0 (i = 1,2; j = 1,2; k = 1,2)$
であると仮定する。任意の事象 W に対して、次の条件付確率測度
$Q(W) = R(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)}$
$R(W) = P(W|A^c) = \frac{P(A^c \cap Q)}{P(A^c)}$
を定義する。次の問いに答えよ。
(1)$Q(B) = R(B)$ が成り立つとき、事象 A,B,C はどのような関係にあるか？
(2) 条件付き確率 $P(C|A,B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)}$ を Q(・) を用いて表せ。また条件付き確率 $P(C|A^c,B) = \frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c \cap B)}$ を Q(・) を用いて表せ。
(3) 次の二つの式：
$\frac{P(C|A,B)}{P(C|A^c,B)} = \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\frac{P(C|A,B^c)}{P(C|A^c,B^c)} = \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
が成り立つとき事象 A、B が独立であるか、または条件付き確率測度 $Q(\cdot)$ に関して事象 B,C が独立であることを証明せよ。

5.1　解答

5.1.1　（1）

$Q(B) = R(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ よって事象 A と B は独立である。

5.1.2　（2）

$Q(B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$
$Q(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
よって $\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}}{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}} = \frac{Q(B \cap C)}{Q(B)}$
$R(B \cap C) = \frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c)}$
$R(B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$
よって $\frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c \cap B)} = \frac{\frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c)}}{\frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}} = \frac{R(B \cap C)}{R(B)}$

5.1.3 （３）

$\frac{P(C|A,B)}{P(C|A^c,B)}=\frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}}{\frac{P(A^c\cap B\cap C)}{P(A^c\cap B)}}=\frac{\frac{P(A\cap C)}{P(A)}}{\frac{P(A^c\cap C)}{P(A^c)}}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}}{\frac{R(B\cap C)}{R(B)}}=\frac{Q(C)}{R(C)}$ （(2) より）
$\Leftrightarrow \frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}=\frac{R(B\cap C)}{R(B)}\frac{Q(C)}{R(C)}$ ー（A）
同様にして $\frac{P(C|A,B^c)}{P(C|A^c,B^c)}=\frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{Q(B^c\cap C)}{Q(B^c)}}{\frac{R(B^c\cap C)}{R(B^c)}}=\frac{Q(C)}{R(C)}$ （(2) より）
$\Leftrightarrow \frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)}{R(C)}\frac{R(C)-R(B\cap C)}{1-R(B)}$ ー（B）
（A）より $R(B\cap C)=\frac{Q(B\cap C)R(C)R(B)}{Q(B)Q(C)}$
これを（B）に代入して $\frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)}{R(C)}\frac{R(C)-\frac{Q(B\cap C)R(C)R(B)}{Q(B)Q(C)}}{1-R(B)}$
$\Leftrightarrow \frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)R(B)}{Q(B)}}{1-R(B)}$
$\Leftrightarrow R(B)\{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}=Q(B)Q(C)-Q(B\cap C)\}$
$\Leftrightarrow (R(B)-Q(B))\{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}\}$
これより $R(B)=Q(B),Q(B)Q(C)=Q(B\cap C)$ が成立するので事象 A、B が独立であるか、または条件付き確率測度 $Q(\cdot)$ に関して事象 B,C が独立である

5.2 ５番の総評

(1) と (2) はできるだろうが、(3) は結構取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

6 ６番

６番

(1) ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の確率密度関数は次のように定義される。
$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}x>0$
ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の平均と分散を求めよ。
(2)U を一様分布に従う確率変数とする。$U=\alpha$ を与えた下で X,Y は互いに独立な確率変数で、それぞれガンマ分布 $G_A(\alpha,1),G_A(1-\alpha,1)$ に従うとする。区間 [0,1] 上の点 $Q(0,0),P(U,0),A(1,0)$ に対して、OP を底辺とし高さ X の長方形 $OPQR$ と、PA を底辺とし高さ Y の長方形 $PABC$ を考え、それらの面積を S_1,S_2 とする。この時 S_1,S_2 の平均、分散、共分散、相関係数を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （１）

$E[X]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha$
$E[X^2]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}=(\alpha+1)\alpha$
よって $V[X]=(\alpha+1)\alpha-\alpha^2=\alpha$

6.1.2 （２）

$f_{X,Y|U}(x,y,u)=\frac{f_{X,Y,U}(x,y,u)}{f_U(u)}$ で、$U=u$ を与えた時に X,Y は互いに独立に、$G_A(\alpha,1)$、$G_A(1-\alpha,1)$ に従うので
$f_{X,Y,U}(x,y,u)=\frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}\quad(f_U(u)=1$ なので$)$
ここで $E[S_1]=\int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty\frac{ux}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du=\frac{1}{3}$
$E[S_1^2]=\int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty\frac{u^2x^2}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du=\frac{9}{20}$
$E[S_2]=\int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty\frac{(1-u)y}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du=\frac{1}{3}$
$E[S_2^2]=\int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty\frac{(1-u)^2y^2}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du=\frac{9}{20}$
よって $V[S_1]=E[S_1^2]-E[S_1]^2=\frac{61}{180}, V[S_2]=E[S_2^2]-E[S_2]^2=\frac{61}{180}$
$E[S_1S_2]=\int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty\frac{(1-u)y\cdot ux}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du=\frac{1}{30}$
よって $Cov(S_1,S_2)=-\frac{7}{90}$
これより $\rho_{S_1,S_2}=\frac{Cov(S_1,S_2)}{\sqrt{V[S_1]}\sqrt{V[S_2]}}=\frac{-14}{61}$

6.2 ６番の総評

統計の問題にしてはあまり取り組みやすくない。難易度は５段階で３。

全体的な総評

必答の２問はあまり難しくはないが、選択問題はどれもやりにくく、完答は難しいだろう。（難問ではないが）

平成１７年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$\iint_D (x\cos y)\exp(-\frac{x^2(1+y^2)}{2})dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$
$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ とおくと $Res_{z=i}f(z) = \frac{e^{-1}}{2i}$
よって留数定理を使って $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{e}$

1.2　１番の総評

１０問の中で１番易しい。ご覧の通り、解答はだいぶ省略した。難易度は５段階で 1.5。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（１）

$\frac{dx}{dt} = -a + be^x \geq -a$
$X(0) = 0$ より $x(t) - at$
よって $x(t)$ が存在する範囲内で、$x(t) \geq -at$

2.1.2　（２）

方程式の両辺に $e^{-x(t)}$ をかけると
$e^{-x(t)}\frac{dx}{dt} = -ae^{-x(t)} + b$ $y(t) = e^{-x(t)}$ とおくと、$-\frac{dy}{dt} = -ay(t) + b$
この常微分方程式を初期条件を考慮して解くと $y(t) = \frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}$
これより $e^{-x(t)} = \frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}$ なので $-x(t) = \log(\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at})$
よって $x(t) + at = at - \log(\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}) = \log(\frac{e^{at}}{\frac{b}{a} + (1-\frac{b}{a})e^{at}}) = \log(\frac{1}{\frac{b}{a}e^{-at} + (1-\frac{b}{a})})$
これより $\lim_{t\to\infty} x(t) + at = \log(\frac{1}{1-\frac{b}{a}})$
この値が存在するためには $1 - \frac{b}{a} > 0$ よって $a > b$

2.2　２番の総評

(2) はかなり難しい。答案は非常にシンプルであるが・・難易度は５段階で 4.5。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（１）

$HF^j = HF \cdot F^{j-1}$
=$(FH - 2F)F^{j-1}$ ((a) より)

=$FHF^{j-1}-2F^j$
=$F(FH-2F)F^{j-2}-2F^j$
=$F^2HF^{j-2}-4F^j$
= ····
=$F^jH-2jF^j(\because F^0=I$ より)
よって $HF^jv=F^jHv-2jF^jv$
=$hF^jv-2jF^jv=(h-2j)F^jv$

3.1.2 （2）

$GF^jv=(FG+H)F^{j-1}v$((b) より)
=$FGF^{j-1}+HF^{j-1}$
=$FGF^{j-1}+(h-2j+2)F^{j-1}v$((1) より)
=$F(FG+H)F^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+FHF^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+F(h-2(j-2))F^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+(2h-4j+6)F^{j-1}v$
= ·····
=$F^jGv+(jh-2j\cdot j+2\sum_{k=1}^{j}k)$
=$0+(jh-2j^2+j(j+1))F^{j-1}v(Gv=0$ より)
=$j(h-j+1)F^{j-1}v$

3.1.3 （3）

$HF^jv=(h-2j)F^jv$ より H は固有値 $(h-2j)$、それに対応する固有ベクトル F^jv を持つ。（それらは互いに異なっている）
H は n 次正方行列なので、固有ベクトルの個数は高々n 個であり、H が $j_0(j_0\in\{1,2,\cdots,n\})$ 個の固有ベクトルを持っている時、$F^{j_0+1}v=0$。
よって適当な j_0 に対して、$F^{j_0}v=0,F^{j_0-1}v\neq 0$

3.1.4 （4）

(2) より $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対して、$GF^{j_0}v=j_0(h-j_0+1)F^{j_0-1}v$
(3) より $GF^{j_0}v=0$ なので、$h-j_0+1=0$。
よって $h=j_0-1$
ここで $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ より $h\in\{0,1,\cdots,n-1\}$

3.2 ３番の総評

あまり取り組みやすいとは言えないだろう。難易度は５段階で 3.5。

4　4番

4番

$m = m(x)(0 \leq x \leq 1)$ は正値連続関数で M は正の定数とする。このとき
$\max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M$
が成り立つことと、任意の連続関数 $f = f(x)(0 \leq x \leq 1)$ に対して
$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
が成り立つことは同値である事を示せ。

4.1　解答

$\max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M \Rightarrow \int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$ について
$\forall x \in [0,1]$ で $m(x) \leq M$
ここで $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で連続関数なので $\forall x \in [0,1]$ で $m(x) \mid f(x) \mid \leq M \mid f(x) \mid$
よって $\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx \Rightarrow \max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M$ について
対偶は $\max_{x\in[0,1]} m(x) > M \Rightarrow \exists f \int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx > M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
$\max_{x\in[0,1]} m(x) > M$ の時 m は正値連続のため
$\exists x_0, \epsilon > 0 s.t. \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \Rightarrow m(x) > M$ となる。
ここで $\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \geq \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} m(x) \mid f(x) \mid dx > M \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \mid f(x) \mid dx$

ここで $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \epsilon \\ x - x_0 + \epsilon & x_0 - \epsilon \leq x < x_0 \\ x_0 + \epsilon - x & x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon \\ 0 & x_0 + \epsilon < x \leq 1 \end{cases}$

となる f をとると、$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \geq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$

4.2　4番の総評

微積分の問題にしてはあまり難しくはない。難易度は 5 段階で 2.5。

5　5番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ さえ知っていれば出来る。頑張れ。

5.1.2　（2）

5.1.3 （3）

(右辺)=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(f'(x))^2-2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u^2(x)\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(f'(x))^2-2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)(-u'(x)-1)\}dx$
左辺と比較することにより $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=0$ を示す。
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=[(f(x))^2u(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=(f(\frac{\pi}{2}))^2u(\frac{\pi}{2})-\lim_{x\to 0}(f(x))^2u(x)$
=$-\lim_{x\to 0}(f(x))^2u(x)(u(\frac{\pi}{2})=0$ なので)
=$-\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^2}{\sin x}(\lim_{x\to 0}\cos x=1$ なので)
=$-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(f(x))^2}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$
ここで（2）より $\mid f(x)\mid^2=o(x)(x\to 0)$ なので $\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^2}{x}=0$
また $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
以上より $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=0$
よって与式が示せた。

5.2 5 番の総評

6 6 番

6 番

a を $\mid a\mid<1$ を満たす定数とする。2 次元確率ベクトル (X,Y) は密度関数
$f(x,y)=C\exp(-x^2+2axy-y^2)(-\infty<x,y<\infty)$
を持つとする。ここで C は定数とする。次の問に答えよ。
(1) 定数 C を求めよ。
(2)X と Y の平均と分散を求めよ。
(3)X と Y の相関係数を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （1）

$\iint_{R^2}C\exp(-x^2+2axy-y^2)dxdy=1$
$u=px,v=qx+ry$ とおいて
$-(u^2+v^2)=-x^2+2axy-y^2$ を満たすように p,q,r を定めると $p=\sqrt{1-a^2},q=-a,r=1$ となる。
この時 $u=\sqrt{1-a^2}x,v=-ax+y$ となるので $x=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}u,y=v+\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}u$
ヤコビアン $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$
この時 $\iint_{R^2}C\exp(-x^2+2axy-y^2)dxdy=C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-(u^2+v^2))\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}dudv=\frac{\pi C}{\sqrt{1-a^2}}$
よって $\frac{\pi C}{\sqrt{1-a^2}}=1$ より $C=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi}$

6.1.2 （2）

$E[X] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} x \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = 0$
$E[Y] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} y \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = 0$
$E[X^2] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} x^2 \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$E[Y^2] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} y^2 \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{2(1-a^2)}$

6.1.3 （3）

$E[XY] = \frac{a}{2(1-a^2)}$
よって $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{a}{2(1-a^2)}$ これより $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = a$

6.2 6番の総評

統計ができる人は十分に取り組める問題。難易度は５段階で 2.5。

7 7番

７番

$X_1 \cdots X_n$ を独立に同じ分布 F(x) に従う n 個の確率変数とし、F(x) は密度関数 f(x) をもつとする。連続する確率変数の組 (X_i, X_{i+1})（ただし i=1,2, ⋯ ,n-1）の中で $X_i < X_{i+1}$ を満たす組の個数を T とする。次の問いに答えよ。
(1)T の平均を求めよ。
(2)T の分散を求めよ。

7.1 解答

7.1.1 （1）

$Y_i = X_{i+1} - X_i$ とおいて、確率変数 U を次のように定める。
$U(Y_i) = \begin{cases} 1 & Y_i > 0 \\ 0 & Y_i \leq 0 \end{cases}$
また $P(Y_i > 0) = P(Y_i \leq 0) = \frac{1}{2}$
この時 $T = \sum_{i=1}^{n-1} U(Y_i)$ となり、$E[T] = \frac{n-1}{2}$

7.1.2 （2）

$T^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} U(Y_i))^2$
=$\sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}^2 + 2\sum_{i>j} U(Y_i)U(Y_j)$
ここで $\sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}$(U は１か０しか取らないので)

$\sum_{i>j} U(Y_i)U(Y_j) = \sum_{i=j+1} U(Y_i)U(Y_j) + \sum_{i>j+1} U(Y_i)U(Y_j)$
ここで $E[\sum_{i=j+1} U(Y_i)U(Y_j)] = P(Y_i > 0, Y_{i-1} > 0)(n-2) = P(X_{i-1} < X_i < X_{i+1})(n-2) = \frac{1}{6}(n-2)$
$E[\sum_{i>j+1} U(Y_i)U(Y_j)] = \{1+2+\cdots+(n-3)\}E[Y_iY_j] = \frac{(n-3)(n-2)}{2}E[Y_i]E[Y_j]$($Y_i$と Y_jは $i > j+1$ の時独立なので)
$=\frac{(n-2)(n-3)}{8}$
以上より $E[T^2] = \frac{n-1}{2} + 2\{\frac{n-2}{6} + \frac{(n-2)(n-3)}{8}\} = \frac{3n^2-5n+4}{12}$
これより $V[T] = \frac{n+1}{12}$

7.2　7 番の総評

解答はあまり長くはないが、超難問。難易度は 5 段階で 5。

8　８番

8 番

正の値を取る確率変数 T が任意の正の数 t,h に対して次式を満たすとする。
$P(0 < T < t+h | T > t) = P(0 < T < h)$
ここで T は $t > 0$ で連続な密度関数 $f(t)$ を持ち
$\lim_{h\to+0} f(h)$
が存在すると仮定する。この時、密度関数 $f(t)$ を求めよ。

8.1　解答

（与式）$\Leftrightarrow \frac{P(t<T<t+h)}{P(T>t)} = P(0 < T < h) \Leftrightarrow P(t < T < t+h) = P(0 < T < h)P(T > t)$
両辺 h で割ると
$\frac{P(t<T<t+h)}{h} = \frac{P(0<T<h)}{h}P(T > t)$
ここで $\lim_{h\to+0} f(h) = a$ とおく。この時
$\lim_{h\to+0} \frac{P(t<T<t+h)}{h} = aP(T > t)$
これより $f(t) = a\int_t^\infty f(t)dt = a(1 - \int_0^t f(s)ds)$
よって $f'(t) = -af(t)$
この微分方程式を解いて $f(t) = Ce^{-at}$(C は定数)
$\int_0^\infty f(t)dt = 1$ より $C = a$
よって $f(t) = ae^{-at}$

8.2　８番の総評

解答は短いがあまり取り組みやすいとは言えない。難易度は 5 段階で 3 か 3.5 くらい。

9　9番

9番

確率変数 X に対して積率母関数 $M(t)=E[e^{tX}]$ が原点の周りで定義されるとする。X のキュムラント母関数 $\psi(t)=\log M(t)$ の原点におけるテーラー展開を
$\psi(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m t^m}{m!}$
と置き、κ を X の m 次キュムラントという。
$X_1\cdots X_p$ を互いに独立で原点の周りで積率母関数が定義される確率変数とする。$\psi_j(t)$ を X_j のキュムラント母関数、$\kappa_m^{(j)}$ を X_j の m 次キュムラントとする。$a_j(j=1,\cdots,p)$ を実定数とするとき、次の問に答えよ。
(1)$\sum_{j=1}^{p}a_jX_j$ のキュムラント母関数を a_j と$\psi_j(y)$ を用いて表せ。
(2)$\sum_{j=1}^{p}a_jX_j$ の m 次キュムラントを $\kappa_m(a_1\cdots a_p)$ とするとき、$\kappa_m(a_1\cdots a_p)$ を求めよ
(3)$\sum_{j=1}^{p}a_j^2=1$ の時、４次キュムラントに関する次の不等式を証明せよ。
$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}\leq\kappa_4(a_1\cdots a_p)\leq\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$

9.1　解答

9.1.1　（1）

$E[e^{t(\sum_{j=1}^{p}a_jX_j)}]=e[e^{t(a_1X_1+a_2X_2+\cdots a_pX_p)}]$
=$E[e^{ta_1X_1}]\cdots E[e^{ta_pX_p}](X_1\cdots X_p$ は独立なので)
よって $\log E[e^{t(\sum_{j=1}^{p}a_jX_j)}]=\log E[e^{ta_1X_1}]+\log E[e^{ta_2X_2}]+\cdots+\log E[e^{ta_pX_p}]$
=$\psi(a_1t)+\psi(a_2t)+\cdots\psi(a_pt)$
=$\sum_{j=1}^{p}\psi_j(a_jt)$

9.1.2　（2）

$\sum_{j=1}^{p}\psi_j(a_jt)$ の原点におけるテイラー展開は
$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(1)}(a_1t)^m}{m!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(2)}(a_2t)^m}{m!}+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(p)}(a_pt)^m}{m!}$
=$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(1)}a_1^m+\kappa_m^{(2)}a_2^m+\cdots+\kappa_m^{(p)}a_p^m}{m!}t^m$
よって $\kappa_m(a_1\cdots a_p)=\sum_{j=1}^{p}\kappa_m^{(j)}a_j^m$

9.1.3　（3）

$\kappa_4(a_1,\cdots a_p)\leq\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$ の証明
・$\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=\kappa_4^{(m)}>0$ の時
$\sum_{i=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\leq\kappa_4^{(m)}\sum_{i=1}^{p}a_j^4\leq\kappa_4^{(m)}$
・$\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=0$ の時
$\sum_{i=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\leq 0\sum_{i=1}^{p}a_j^4=0$
以上より $\kappa_4(a_1,\cdots a_p)\leq\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$ が言えた。
$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}\leq\kappa_4(a_1,\cdots a_p)$ の証明
・$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=0$ の時
$\sum_{j=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\geq\sum_{j=1}^{p}a_j^4\cdot 0$ =0

・$\min\{0, \kappa_4^{(1)}, \cdots, \kappa_4^{(p)}\} = \kappa_4^{(l)} < 0$ の時
$\kappa_4^{(l)} \leq \sum_{j=1}^{p} a_j^4 \kappa_4^{(l)} \sum_{j=1}^{p} a_j^4 \kappa_4^{(j)}$
以上より $\min\{0, \kappa_4^{(1)}, \cdots, \kappa_4^{(p)}\} \leq \kappa_4(a_1, \cdots a_p)$ が言えた。

9.2　9番の総評

キュムラントについて知らなくてもできる。難易度は５段階で３。

10　１０番

１０番

確率変数 X,Y について、X が与えられた時の Y の条件付き分布が平均 βX、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。ただし、β, σ^2 は定数で、$|\beta| < 1$ とする。次の問に答えよ。
(1)$E[X] = E[Y](= \mu$ と表す）が成り立つ時、μ を求めよ。
(2)(1) の条件に加えて $E[X^2] = E[Y^2](= \nu$ と表す）が成り立つ時、ν を β, σ^2 を用いて表せ。
(3) (1) と (2) の条件に加えて $E[X^4] = E[Y^4] = (\kappa$ と表す）が成り立つ時、κ を β, σ^2 を用いて表せ。

10.1　解答

10.1.1　（1）

X と Y の密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$、同時密度関数を $f(x,y)$ とおく。条件より
$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy = \beta x$
よって $\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dy = \beta x f_X(x)$ より
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \beta x f_X(x)$
これより $E[Y] = \beta E[X]$ なので $\mu = \beta\mu$
$|\beta| < 1$ より$\mu = 0$

10.1.2　（2）

$f_{Y|X}(y|x)$ の積率母関数を $M(t)$ とおくと、$f_{Y|X}(y|x)$ は平均 βX 分散 σ^2 の正規分布に従うので
$M(t) = \exp(\beta x t + \frac{\sigma^2}{2} t^2)$
$M'(t) = (\beta x + \sigma^2 t) \exp(\beta x t + \frac{\sigma^2}{2} t^2)$
$M^{(2)}(t) = \{\sigma^2 + (\beta x + \sigma^2 t)^2\} \exp(\beta x t + \frac{\sigma^2}{2} t^2)$
よって $M^{(2)}(0) = \sigma^2 + \beta^2 x^2$
これより $E[Y^2|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} dy = \sigma^2 + \beta^2 x^2$
$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{X,Y}(x,y) dy = \sigma^2 + \beta^2 x^2$
$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 + \beta^2 x^2) f_X(x) dx$
これより $\nu = \sigma^2 + \beta^2 \nu$ なので $\nu = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$

10.1.3 （３）

$M^{(4)}(0)=3\sigma^4+6\beta^2x^2\sigma^2+\beta^4x^4$
よって $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^4f_{X,Y}(x,y)dxdy=3\sigma^4\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx+6\beta^2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx+\beta^4x^4\int_{-\infty}^{\infty}x^4f_X(x)dx$
$\Leftrightarrow \kappa(1-\beta^4)=\frac{3(1+\beta^2)}{1-\beta^2}\sigma^4$
これより $\kappa=\frac{3\sigma^4}{(1-\beta^2)^2}$

10.2 １０番の総評

（３）は計算がかなり大変でやりにくいだろう。難易度は５段階で 3.5 くらい。

全体的な総評

まず、１番は絶対にやるべき。そして４も取り組みやすい。統計ができる人は６，９，１０に手を出すと良い。８番もできなくはない。統計ができない人は２，３辺りで部分点を取れるように頑張ってください。

平成１８年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial \rho})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial \rho})^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \rho^2}$
後の計算は省略

1.1.2　（2）

省略

1.2　１番の総評

またまたチェインルール。頑張って計算しましょう。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$b_1 = a_1 \;\; t_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b_2 = a_2 - (t_1, a_2)t_1$ とおくと

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$b_3 = a_3 - (t_1, a_3)t_1 - (t_2, a_3)t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b_4 = a_4 - (t_1, a_4)t_1 - (t_2, a_4)t_2 - (t_3, a_4)t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.1.2 （２）

(1) より $a_1 = 2t_1$
$a_2 = t_1 + t_2$
$a_3 = t_1 - t_2 + \sqrt{2}t_3$
$a_4 = t_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_4$
よって $A = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2.2 ２番の総評

QR 分解の問題。難易度は５段階で 2.5 か３。グラムシュミットは絶対にできるようにしましょう。QR 分解は参考文献の「線形代数とその応用」の１４４ページに詳しい記述がある。

3 ３番

3.1 解答

3.1.1 （１）

$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\phi_1}{dt}\phi_2 - \phi_1\frac{d\phi_2}{dt}}{\phi_2^2} = \frac{(\frac{g(t)}{2}\phi_1 + \frac{h(t)+f(t)}{2}\phi_2)\phi_2 - (\frac{h(t)-f(t)}{2}\phi_1 - \frac{g(t)}{2}\phi_2)\phi_1}{\phi_2^2}$
$=g(t)\frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{h(t)+f(t)}{2} - \frac{h(t)-f(t)}{2}(\frac{\phi_1}{\phi_2})^2$
$=\frac{f(t)}{2}(1+x^2) + g(t)x + \frac{h(t)}{2}(1-x^2)(\because x(t) = \frac{\phi_1}{\phi_2}$なので$)$

3.1.2 （２）

$\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{1}{2}\phi_1(t)$ なので $\phi_1(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t}$($C_1$は定数)
この時 $\frac{d\phi_2}{dt} = -\cos t \cdot C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}\phi_2$
これを解いて $\phi_2(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}(\sin t - \cos t) + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$($C_2$は定数)
ここで $x(0)\frac{\phi_1(0)}{\phi_2(0)} = \frac{C_1}{\frac{C_1}{2}+C_2} = 1$ より $C_1 = 2C_2$
よって $x(t) = \frac{2}{\cos t - \sin t + e^t}$

3.2 ３番の総評

(1) で $x(t) = \frac{\phi_1}{\phi_2}$ に気づくかどうかだろう。難易度は５段階で 3.5。

4　4番

4.1　解答

4.1.1　（1）

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos c}{6!}x^6 (0 < c < x)$
よって剰余項は $-\frac{\cos c}{6!}x^6 (0 < c < x)$

4.1.2　（2）

(1) において x に 1 を代入して
$\cos 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}) = -\frac{\cos c}{6!}(0 < c < 1)$
また $x = \frac{\pi}{3}$ で展開すると
$\cos 1 - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(1 - \frac{\pi}{3})^2) = \frac{\sin c}{3!}(1 - \frac{\pi}{3})^3 (1 < c < \frac{\pi}{3})$
よって $\frac{\cos c}{6!}(0 < c < 1)$ と $\frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 (1 < c < \frac{\pi}{3})$ との大小比較を行えばよい
$\inf_{0<c<1} \frac{\cos c}{6!} = \frac{\cos 1}{6!},\ \sup_{1<c<\frac{\pi}{3}} \frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{\pi}{3} - 1)^3$
ここで $6! \times \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 \fallingdotseq 0.35$
$\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} > 0.35$
以上より $\inf_{0<c<1} \frac{\cos c}{6!} > \sup_{1<c<\frac{\pi}{3}} \frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3$
よって $\frac{\pi}{3}$ で展開する方が剰余項の値が小さいのでよい近似である

4.2　4番の総評

完答は難しいだろう。難易度は5段階で 3.5。

5　5番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$E[S_n] = n\mu$
$V[S_n] = \sum_{t=1}^{n} V[X_t] + 2\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j)$
ここで $\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j) = \sigma^2(p + p^2 + \cdots + p^{n-1}) + \sigma^2(p + p^2 + \cdots + p^{n-2}) + \cdots + \sigma^2 p$
$=\sigma^2 \frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} + \sigma^2 \frac{p(p^{n-2}-1)}{p-1} + \cdots \sigma^2 p$
$=\sigma^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p(p^k-1)}{p-1}$
$=\frac{p\sigma^2}{p-1}\{\frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)\}$
これより $V[S_n] = n\sigma^2 + \frac{2p\sigma^2}{p-1}\{\frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)\}$

5.1.2　（2）

$V[\overline{X_n}] = \frac{1}{n^2}V[S_n] \to 0 (n \to \infty)$
よってチェビシェフの不等式より $\lim_{n\to\infty} P(|\ \overline{X_n} - \mu\ | > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{V[\overline{X_n}]}{\epsilon^2} = 0$

5.2　５番の総評

（１）で計算間違いをするかもしれないが、チェビシェフの不等式を知っていればできる。難易度は５段階で３。

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（１）

$P(X=k) ={}_{r-1+k} C_k p^k q^{r-1} \times q ={}_{r-1+k} C_k p^k q^r$

6.1.2　（２）

$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k q^r = q^r \sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k$
ここで $\frac{1}{q^r} = \{1-(1-q)\}^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -r \\ k \end{pmatrix} \{-(1-q)\}^k$
ここで $\begin{pmatrix} -r \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} = (-1)^k {}_{r-1+k}C_k$
よって $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k q^r = q^r \sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k = q^r \frac{1}{q^r} = 1$

6.1.3　（３）

$rp = \lambda$ より $p = \frac{\lambda}{r}$
よって $\lim_{r\to\infty} P(X=k) = \lim_{r\to\infty} \frac{(r-1+k)!}{k!(r-1)!} (\frac{\lambda}{r})^k (1-\frac{\lambda}{r})^r$
$= \lim_{r\to\infty} \frac{(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{r^k} \frac{\lambda^k}{k!} (1+\frac{1}{-\frac{r}{\lambda}})^r$
$= \lim_{r\to\infty}(1+\frac{k-1}{r})(1+\frac{k-2}{r})\cdots 1 \frac{\lambda^k}{k!} \{(1+\frac{1}{-\frac{r}{\lambda}}))^{-\frac{r}{\lambda}}\}^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

6.2　６番の総評

(2) は知っていないとできない。これを機に負の二項分布について復習しましょう。難易度は５段階で 3.5。

全体的な総評

選択問題は全て難しくはないが、簡単でもない問題ばかりである。必答問題はどちらも標準的。

平成１８年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H

所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$v(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} e^{2\pi i n}$
$e^{2\pi i n} = 1 (n \in N)$ なので $v(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} = v(z)$
$v(z+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n^2+2n)} e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n+1)^2} e^{2\pi i n z} e^{-\pi i \tau}$
ここで $t = n+1$ とおくと、
$v(z+\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau t^2} e^{2\pi i (t-1) z} e^{-\pi i \tau} = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau t^2} e^{2\pi i t z} = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} v(z)$

1.1.2　（2）

積分路を $C_1 : [0,l], C_2 : \{\tau t + l \; 0 \le t \le l\}, -C_3 : \{l\tau + t \; 0 \le t \le l\}, -C_4 : \{\tau t \; 0 \le t \le l\}$ と設定する
$I_1 = \int_{C_1} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz$
$I_2 = \int_{C_2} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_l^{l\tau+l} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = \tau \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}} dt$
$I_3 = \int_{C_3} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_{l\tau+l}^{l\tau} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = -\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+l\tau)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+l\tau)}} dt$
$I_4 = \int_{C_4} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_{l\tau}^{0} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = -\tau \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}} dt = -I_2$
ここで $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z - 2\pi i l (z+l\tau)}$ なので
$I_3 = -\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}} = -\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i (n+l) e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z} - 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} l e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}}{v(z)}$
$= -I_1 + l \int_0^l 2\pi i dz = -I_1 + 2\pi i l^2$
よって（与式）$= \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = l^2$

1.2　１番の総評

極めて難しい。(1) はなんとかできるかもしれないが、(2) は見たこともない複素積分である。難易度は５段階で 4.5。

2　２番

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

$Ax = 0$ なので $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = 0$
よって $| a_{nn} |=| a_{n1} \frac{x_1}{x_n} + a_{n2} \frac{x_2}{x_n} + \cdots + a_{nn-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} |$
ここで $| x_1 |\le| x_2 |\le \cdots | x_n |$ なので
$| \frac{x_1}{x_n} |\le| \frac{x_2}{x_n} |\le \cdots | \frac{x_{n-1}}{x_n} |\le 1$
これより $| a_{nn} |\le| a_{n1} \frac{x_1}{x_n} | + | a_{n2} \frac{x_2}{x_n} | + \cdots + | a_{nn-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} |\le| a_{n1} | + | a_{n2} | + \cdots + | a_{nn-1} | \sum_{j=1}^{n-1} | a_{nj} |$

3.1.2 （2）

4 ４番

4.1 解答

4.1.1 （1）

$f(x)=-xy+x\log x+e^{y-1}$ とする
このとき $f'(x)=-y+\log x+1$
よって $\log x=y-1$、$x=e^{y-1}$ の時最小値をとる
この時 $f(e^{y-1})=-e^{y-1}y+e^{y-1}(y-1)+e^{y-1}=0$
以上より $\forall y f(x)\geq 0 \Leftrightarrow xy\leq x\log x+e^{y-1}$

4.1.2 （2）

$f(x)>0$ で (1) より $x=f(x), y=g(x)$ とおきかえると
$f(x)g(x)\leq f(x)\log f(x)+e^{g(x)-1}$
$x\in(0,a)$ に対して f(x),g(x) は連続なので
$\int_0^a f(x)g(x)dx\leq\int_0^a f(x)\log f(x)dx+\int_0^a e^{g(x)-1}dx\leq\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\int_0^a e^{g(x)}dx<\infty$

4.1.3 （3）

$\int_0^a f(x)\log\frac{1}{x}dx=2\int_0^a f(x)\log\frac{1}{\sqrt{x}}dx\leq 2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+2\int_0^a e^{\log\frac{1}{\sqrt{x}}-1}dx$
=$2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\frac{4}{e}[\sqrt{x}]_0^a$
=$2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\frac{4}{e}\sqrt{a}$

4.2 ４番の総評

(1) ができれば (2) と (3) はさほど難しくはない。難易度は５段階で 3 か 3.5。

5 ５番

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （1）

$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_ic_i$
$m_y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}c_i^2f_i$

6.1.2 （２）

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)f_j<\overline{x}<\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)f_j$
これより $\mid\overline{x}-\overline{y}\mid\leq\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\delta_j f_j\leq\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\max_{j=1,\cdots,n}(\delta_j)f_j=\frac{1}{2}\max_{j=1,\cdots,n}(\delta_j)$

6.1.3 （３）

本問では $c_j\geq 0$ を仮定する
この時 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)^2 f_j<m_x<\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)^2 f_j$
ここで $c_j^2-(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)^2=c_j\delta_j-\frac{1}{4}\delta_j^2$
$(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)^2-c_j^2=c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2$
$c_j\geq 0$ なので $c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2>c_j\delta_j-\frac{1}{4}\delta_j^2$
よって $\mid m_x-m_y\mid\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2)f_j\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j+\frac{1}{4}\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j^2)f_j$
$=\overline{y}\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j+\frac{(\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j)^2}{4}$

6.2 ６番の総評

(3) の解答では勝手に $c_j\geq 0$ を仮定したがこれでよかったのだろうか‥難易度は５段階で４。

7 ７番

7.1 解答

7.1.1 （１）

$P(Y=1|X=x)=\frac{f_{X,Y}(x,1)}{p_X(x)}=x$
よって $P(Y=1)=\int_0^1 f_{X,Y}(x,1)dx=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

7.1.2 （２）

$E[X|Y=0]=\int_0^1 xf_{X|Y}(x|0)dx=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$
$E[X|Y=1]=\int_0^1 xf_{X|Y}(x|1)dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}$

7.2 ７番の総評

１０問の中で１番簡単な問題。選択すべき。難易度は５段階で３。

8　８番

8.1　解答

8.1.1　（１）

$m(s)-1=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{su}-1)f(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du$
=$\int_0^{\infty}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du-\int_{-\infty}^{0}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du$
=$s\int_0^{\infty}\{\int_x^{\infty} e^{sx}f(u)du\}dx-s\int_{-\infty}^{0}\{\int_{-\infty}^{x} e^{sx}f(u)du\}dx$
=$s\int_0^{\infty} e^{sx}dx\int_x^{\infty} f(u)du-s\int_{-\infty}^{0} e^{sx}dx\int_{-\infty}^{x} f(u)du$
=$-s\int_{-\infty}^{0} F(u)e^{su}du+s\int_0^{\infty} F(u)e^{su}du$

8.1.2　（２）

条件より $\forall\epsilon>0,\exists x_0\ s.t.\ \forall x\geq x_0\ \Rightarrow \frac{M(x)}{x}<\epsilon$
よって $-\frac{\log\overline{F}(x)}{x}<\epsilon$
これより $\log\overline{F}(x)>-x\epsilon$ なので $\overline{F}(x)>e^{-x\epsilon}$ が $x\geq x_0$ で言えた
$\overline{F}(x)$ は単調減少なので $\overline{F}(x)>e^{-\epsilon(x-x_0)}=c_\epsilon e^{-\epsilon x}$
よって題意が示せた

8.1.3　（３）

(3) より $\overline{F}(x)>e^{-\epsilon(x-x_0)}=c_\epsilon e^{-\epsilon x}$ なので
$\int_0^{\infty}\overline{F}(u)e^{su}du>\int_0^{\infty}c_\epsilon e^{(s-\epsilon)u}du=\infty$
よって (1) より $m(s)=1-s\int_{-\infty}^{0}F(u)e^{su}du+s\int_0^{\infty}F(u)e^{su}du$ より $\forall s$ で $m(s)=\infty$

8.1.4　（４）

$f(x)=\frac{dF}{dx}=\alpha x^{-\alpha-1}$
よって $m(s)=\alpha\int_1^{\infty}e^{sx}x^{-\alpha-1}$
ここで $s>0,\alpha>0$ より $\lim_{x\to\infty}e^{sx}x^{-\alpha-1}=\infty$ なので $\forall s>0$ で $m(s)=\infty$

8.2　８番の総評

(1) と (2) を認めれば (3) と (4) は難しくない。だが完答は難しいだろう。難易度は５段階で 3.5 か 4。

9　９番

9.1　解答

9.1.1　（１）

$M(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}e^{tx}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$
よって X_1+X_2 の積率母関数は $E[e^{t(X_1+X_2)}]=e^{-\lambda_1}e^{\lambda_1 e^t}e^{-\lambda_2}e^{\lambda_2 e^t}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^t}$
これより X_1+X_2 は $P_0(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う。

9.1.2 （2）

$P_o(\lambda)$ の平均と分散は λ なので $V[\overline{Y}_n]=\frac{\lambda}{n}, E[\overline{Y}_n]=\lambda$
よって $\overline{Y_n}=X_1+X_2+\cdots+X_n$ $(X_1\cdots X_n\sim P_o(\lambda))$ とすると中心極限定理より
$\lim_{n\to\infty}P(-u<\frac{\overline{Y_n}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}}<u)=\int_{-u}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
これより $\lim_{n\to\infty}P(\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\lambda}{n}}<\lambda<\overline{Y_n}+u\sqrt{\frac{\lambda}{n}})=\int_{-u}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

9.1.3 （3）

$P(\overline{Y_n}=0)=P(Y_n=0)=e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^0}{0!}\to 0(n\to\infty)$

9.1.4 （4）

$\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}<\lambda<\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}$ を $\overline{Y_n}$ について解きなおすと
$\frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda-\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}<\overline{Y_n}<\frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda+\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}$
$a=\frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda-\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}, b=\frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda+\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}$ とおくと
$\lim_{\lambda\to+0}P(\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}<\lambda<\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}})=\lim_{\lambda\to+0}\{P(\overline{Y_n}=[a]+1)+P(\overline{Y_n}=[a]+2)+\cdots+P(\overline{Y_n}=[b])\}$
(3) より $\lim_{\lambda\to+0}P(\overline{Y_n}=0)=1$ なので $\lim_{\lambda\to+0}P(\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}<\lambda<\overline{Y_n}-u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}})=0$

9.2 ９番の総評

(1) は簡単だが、(4) は難しい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

10 １０番

10.1 解答

10.1.1 （1）

(a) より $\frac{pr(y_j,z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}=\frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}\cdot\frac{pr(z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
$\Leftrightarrow pr(y_j,z_k,x_i,u_l)=pr(y_j,x_i,u_l)\frac{pr(z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
ここで (与式の左辺)=$\frac{pr(y_j,z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,z_k,u_l)}=\frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
(与式の右辺)=$\frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
以上より $pr(y_j|x_i,z_k,u_l)=pr(y_j|x_i,u_l)$

10.1.2 （2）

$A=pr(y_1|x_1,u_1), B=pr(x_1|u_1,z_1)$ とおく
この時 $0\le A,B\le 1$ なので $AB\le A\le 1-B+AB$ を使うと
$\frac{pr(x_1,y_1,u_1)}{pr(x_1,u_1)}\cdot\frac{pr(x_1,z_1,u_1)}{pr(z_1,u_1)}\le pr(y_1|x_1,u_1)\le 1-pr(x_1|u_1,z_1)+pr(y_1|x_1,u_1)pr(x_1|u_1,z_1)$
$=1-\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(u_1)pr(z_1)}+pr(y_1|x_1,u_1)\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(u_1)pr(z_1)}$
両辺に $pr(u_1)$ をかけて

$\frac{pr(x_1,y_1,u_1)}{pr(x_1,u_1)} \cdot \frac{pr(x_1,z_1,u_1)}{pr(z_1)} \leq pr(u_1)pr(y_1|x_1,u_1) \leq pr(u_1) - \frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)} + pr(y_1|x_1,u_1)\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)}$
よって $pr(y_1|x_1,u_1) \cdot pr(x_1,u_1|z_1) \leq pr(u_1)pr(y_1|x_1,u_1) \leq pr(u_1) - pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|u_1,x_1)pr(x_1,u_1|z_1)$ ー（A）
同様に $A = pr(y_1|x_1,u_2), B = pr(x_1|u_2,z_1)$ とおいて

$pr(y_1|x_1,u_2) \cdot pr(x_1,u_2|z_1) \leq pr(u_2)pr(y_1|x_1,u_2) \leq pr(u_2) - pr(x_1,u_2|z_1) + pr(y_1|u_2,x_1)pr(x_1,u_2|z_1)$ ー（B）
(A) の左辺と (B) の左辺を足し合わせると

$pr(y_1|x_1,u_1) \cdot pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|x_1,u_2) \cdot pr(x_1,u_2|z_1)$

$= pr(y_1|x_1,u_1,z_1) \cdot pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|x_1,u_2,z_1) \cdot pr(x_1,u_2|z_1)$（(1) を使った）
=$\frac{pr(x_1,y_1,u_1,z_1)}{pr(x_1,u_1,z_1)} \frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)} + \frac{pr(x_1,y_1,u_2,z_1)}{pr(x_1,u_2,z_1)} \frac{pr(x_1,u_2,z_1)}{pr(z_1)}$ =$pr(y_1,x_1,u_1|z_1) + pr(y_1,x_1,u_2|z_1) = pr(y_1,x_1|z_1)$
A) の右辺と (B) の右辺を足し合わせると

$1 - pr(x_1|z_1) + pr(x_1,y_1|z_1)$ =$1 - pr(x_1,y_1|z_1) - pr(x_1,y_2|z_1) + pr(x_1,y_1|z_1)$ =$1 - pr(x_1,y_2|z_1)$
よって与式の k=1 の時が示せた、k=2 の時も同様

10.2　１０番の総評

A,B の置き方はちょっと思いつかないだろう。難易度は５段階で４か 4.5。

全体的な総評

７番以外はどれも取り組みにくい。なかなか難しい年だと思う。

平成１９年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{ax-by}\{a\cos(bx+ay) - b\sin(bx+ay)\}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{ax-by}\{a^2\cos(bx+ay) - 2ab\sin(bx+ay) - b^2\cos(bx+ay)\}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{ax-by}\{b\cos(bx+ay) + a\sin(bx+ay)\}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{ax-by}\{b^2\cos(bx+ay) + 2ab\sin(bx+ay) - a^2\cos(bx+ay)\}$
よって $\nabla f = 0$

1.1.2　(2)

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$
$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$
よって $\nabla \varphi = 0$

1.1.3　(3)

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}(\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial y})^2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$
ここで $\nabla \psi = 0$ なので (1) と (2) より $\nabla f = 0$

1.2　１番の総評

例年通りチェインルールの問題。(3) で少し迷うかも。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$t = 3$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = -3$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をグラムシュミットの直交化法によって直交化すると

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

これより $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.1.2 （2）

$x' =^t Tx$ なので $x = Tx'$

よって ${}^txAx = -3 \Leftrightarrow^t x'\, {}^tTATx' = -3$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -3$

$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$

2.1.3 （3）

二葉双曲面である。図は省略。

2.2 ２番の総評

(1) は $t = 3$ から得られる二つの固有ベクトルは直交していないのでグラムシュミットを使う必要がある。これさえ気をつければ後は簡単。難易度は５段階で 2.5。

3 ３番

3.1 予備知識

$V(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ の微分は

$V'(t) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}$

列についても同じことが言える。

3.2 解答

3.2.1 （1）

$\frac{d}{dt}J(t) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1' & x_2 & x_3' \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1" & x_2" & x_3" \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}$

$=0 + 0 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ -a(t)x_1"(t) - b(t)x_1'(t) - c(t)x_1(t) & -a(t)x_2"(t) - b(t)x_2'(t) - c(t)x_2(t) & -a(t)x_3"(t) - b(t)x_3'(t) - c(t)x_3(t) \end{vmatrix}$

$=-a(t) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1" & x_2" & x_3" \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} = -a(t)J(t)$

3.2.2 （2）

(1) より $J(t) = Ce^{-\int_0^t a(s)ds}$
$J(0) = C \neq 0$ で a(t) は有界なので $\forall t \in RJ(t) \neq 0$
よって $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみなので３つのベクトルは１次独立。

3.3 ３番の総評

(1) はガチで計算するとかなりしんどい。難易度は５段階で 3.5。

4 ４番

4.1 解答

4.1.1 （1）

$\begin{vmatrix} \alpha - t & \beta \\ \beta & \alpha - t \end{vmatrix} = 0$ を解くと $t = \alpha + \beta, \alpha - \beta$ なので $\alpha + \beta < 0, \alpha - \beta < 0$

4.1.2 （2）

極座標変換すると
$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = \pi$

4.1.3 （３）

$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ここで $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ は対称行列なので (1) より $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと

${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix}$

ここで $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$ とおくと

$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)x'^2 + (\alpha-\beta)y'^2$

また $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$、$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$

よって $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1$ なので

（与式）=$\iint_{R^2} \mid J \mid e^{(\alpha+\beta)x'^2+(\alpha-\beta)y'^2} dx'dy' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+\beta)x'^2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)y'^2} dy'$

=$\sqrt{\frac{\pi}{-\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

4.2 ４番の総評

基本的な微積分と線形代数の問題。選択すべき。難易度は５段階で２。

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （１）

$\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\lambda|z|}dz = 1$ なので $C = \frac{\lambda}{2}$

5.1.2 （２）

$M_Z(t) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}e^{-\lambda|z|}dz = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}$

5.1.3 （３）

$X-Y$ の積率母関数は $E[e^{t(X-Y)}] = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \int_0^{\infty} e^{-ty}\lambda e^{-\lambda y}dy = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}$
よって $X-Y$ と Z の積率母関数は一致するので同一の分布に従う。

5.2 ５番の総評

標準的な統計の問題。難易度は５段階で 2.5。

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（１）

$\mid x_{(1)} - \alpha \mid + \mid x_{(n)} - \alpha \mid$ を最小にする α は $x_{(1)} < \alpha < x_{(n)}$ を満たす
$\mid x_{(2)} - \alpha \mid + \mid x_{(n-1)} - \alpha \mid$ を最小にする α は $x_{(2)} < \alpha < x_{(n-1)}$ を満たす
この議論を繰り返すと、n が奇数の時、$\alpha = x_{(\frac{n+1}{2})}$
n が偶数の時、$\alpha = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n+1}{2})}}{2}$

6.1.2　（２）

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} j = \frac{n+1}{2n}$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mid x_i - x_j \mid = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \mid x_{(i)} - x_{(j)} \mid = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$
これより $G = \frac{\frac{1}{3}(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{3n}$

6.2　６番の総評

(1) は取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5。

全体的な総評

選択問題は４と５がやりやすい。２番はグラムシュミットを使うのを忘れた人が多かったのではないだろうか？十分に高得点も狙えるが、思わぬところで失点してしまいそうな内容だろう。

平成１９年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$f(z) = \frac{e^{-i\xi z}}{e^z + e^{-z}}$ とおく。
$e^z + e^{-z} = 0$ とおくと、$f(z)$ の上半平面における極は $z = \frac{i\pi}{2}(1+2n)(n = 0, 1, 2, \cdots)$
これらはすべて１位の極である。
よって $C_1 = [-R, R], C_2 = \{| z |= R, Imz \geq 0\}$ とおいて、$C = C_1 + C_2$ とおくと
$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)} f(z)$
ここで $Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)} = \frac{e^{-i\xi\frac{i\pi}{2}(1+2n)}}{e^{\frac{i\pi}{2}(1+2n)} - e^{-\frac{i\pi}{2}(1+2n)}}$
$= \begin{cases} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi}}{2i} & \text{n が偶数の時} \\ \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi}}{-2i} & \text{n が奇数の時} \end{cases}$
よって $2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)} f(z) = \pi \frac{e^{\frac{\pi}{2}\xi} - e^{\frac{3\pi}{2}\xi}}{1-e^{2\pi\xi}}$($\xi < 0$ の時)
ここで $\lim_{R\to\infty} | \int_{C_2} f(z)dz |\leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} | f(z) || dz |$
$z = Re^{i\theta}(0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと
$\int_{C_2} | f(z) || dz |= \int_0^{\pi} \frac{|e^{-i\xi Re^{i\theta}}|}{|e^{Re^{i\theta}}|+|e^{-Re^{i\theta}}|} | i || R || e^{i\theta} | d\theta = R \int_0^{\pi} \frac{|e^{-i\xi Re^{i\theta}}|}{|e^{Re^{i\theta}}|+|e^{-Re^{i\theta}}|} d\theta$
$=R \int_0^{\pi} \frac{e^{\xi R\sin\theta}}{e^{R\cos\theta} + e^{-R\cos\theta}} d\theta$
$e^{R\cos\theta} + e^{-R\cos\theta} \leq 2$(相加相乗平均の関係より)
よって $\int_{C_2} | f(z) || dz |\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi} e^{\xi R\sin\theta} d\theta$
また $| \int_0^{\pi} e^{\xi R\sin\theta} d\theta |\leq \pi \cdot \max_{0\leq\theta\leq\pi} e^{\xi R\sin\theta}$ で $\lim_{R\to\infty} \max_{0\leq\theta\leq\pi} e^{\xi R\sin\theta} = 0(\xi < 0)$ より
よって $\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)dz = 0$
以上より $\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \pi \frac{e^{\frac{\pi}{2}\xi} - e^{\frac{3\pi}{2}\xi}}{1-e^{2\pi\xi}}$

1.2　１番の総評

型にはまっていない複素積分。だが、十分取り組める。難易度は５段階で３。$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z) = 0$ はきちんと証明しなくてはいけないそうです。（by 鈴木研究室の先輩より）

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

１列について余因子展開すると

$$\det B_n = x \det B_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ x & -1 & 0\cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} = x \det B_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} a_n = x \det B_{n-1} + a_n$$

2.1.2 （２）

１行目の $-\frac{a_n}{x}$ 倍を n 行目に足し合わせると

$0 \ \ a_{n-1}+\frac{a_n}{x} \ \ a_{n-2} \cdots\cdots a_3 \ \ a_2 \ \ x+a_1$

２行目の $-\frac{a_{n-1}+\frac{a_n}{x}}{x}$ 倍を n 行目に足し合わせると

$0 \ \ 0 \ \ a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} \ \ a_{n-3} \cdots\cdots a_3 \ \ a_2 \ \ x+a_1$

これを繰り返すと n 行目は

$0 \ \ 0 \ \cdots\cdots x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}$

よって $x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}=0$ すなわち、$x^n+\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}=0$ が成立する時、$rankB_n=n-1$

2.1.3 （３）

$\mid A_n-xE\mid=(-1)^n\det B_n$

ここで定理より

「A_n が対角化できる」⇔「$n-rank(A_n-\lambda_i E)=m_i$(ただし A_n の固有方程式は $\varphi(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$)」ー（A）

また計算により $\det B_n=x^n+\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}$

よって A_n の固有方程式は $(-1)^n\{x^n+\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}\}$ なので

「$x^n+\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}=0$ が重根を持たない」

⇔「$m_i=1, rankB_n=n-1$」

ここで $rankB_n=rank(A_n-\lambda_i E)=n-1$ なので

$n-rank(A_n-\lambda_i E)=n-(n-1)=1=m_i$

が成立し、（A）を満たすので A_n は対角化できる。

2.2 ２番の総評

(3) はなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5。

3 ３番

3.1 解答

$u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}\leq 0 \Leftrightarrow u_{j+1}-u_j\leq u_j-u_{j-1}$ー $(*)$

(1)$u_{n+1}-u_n\geq 0$ の時

$u_{n+1}\geq u_n\geq\cdots\geq u_1\geq u_0$ なので $\min_{1\leq j\leq n} u_j=u_1\geq u_0=\min\{u_0,u_{n+1}\}$

(2)$u_1-u_0\leq 0$ の時

$u_{n+1}\leq u_n\leq\cdots\leq u_1\leq u_0$ となるので $\min_{1\leq j\leq n} u_j=u_n\geq u_{n+1}=\min\{u_0,u_{n+1}\}$

(3)$u_{n+1}-u_n<0$ かつ $u_1-u_0>0$ の時

(*) より

$$\begin{cases} u_{j+1}-u_j\leq 0 & j=i+1\cdots n \\ u_{j+1}-u_j\geq 0 & j=1,\cdots i \end{cases}$$

となる i が存在する。ゆえに

$u_{n+1} \leq u_n \leq \cdots \leq u_{i+1}$ かつ $u_{i+1} \geq u_i \geq \cdots \geq u_0$ となるので
$\min_{1\leq j\leq n} u_j \geq \min\{u_0, u_{n+1}\}$ が成立する

3.2　３番の総評

１２問の中で１番易しい。難易度は５段階で 2.5 か３。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

$\frac{\partial}{\partial s}(e^{-x}x^{s-1}) = e^{-x}x^{s-1}\log x$
$\frac{\partial}{\partial s}(e^{-x}x^{s-1}\log x) = e^{-x}x^{s-1}(\log x)^2$
ここで $a < s < b$ なる範囲内で s を考えるとき
$\int_0^1 \mid e^{-x}x^{s-1}(\log x)^2 \mid dx \leq \int_0^1 \mid e^{-x}x^{a-1}(\log x)^2 \mid dx < \infty$
$\int_0^1 \mid e^{-x}x^{s-1}(\log x)^2 \mid dx \leq \int_0^1 \mid e^{-x}x^{b-1}(\log x)^2 \mid dx < \infty$
これより $\int_0^1 \mid e^{-x}x^{s-1}(\log x)^2 \mid dx < \infty$
よって微分積分の順序交換可能定理より
$\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-x}x^{s-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\log x dx$
$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial s^2}e^{-x}x^{s-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log x)^2 dx$
これより $f"(s) = \frac{\Gamma"(s)\Gamma(s)-(\Gamma'(s))^2}{\Gamma(s)^2} = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\frac{(\log x)^2}{\Gamma(s)}dx - (\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\frac{\log x}{\Gamma(s)}dx)^2$

4.1.2　（２）

(1) より $f"(s) = \frac{\Gamma"(s)\Gamma(s)-(\Gamma'(s))^2}{\Gamma(s)^2}$
ここで $\Gamma"(s)\Gamma(s) - (\Gamma'(s))^2 = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}(\log y)^2 dy - \{\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}(\log x)dx\}^2$
=$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}(xy)^{s-1}(\log y)^2 dxdy - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}(xy)^{s-1}\log x\log y dxdy$
=$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}(xy)^{s-1}\{(\log y)^2 - \log x\log y\}dxdy$
これより $f"(s) = \frac{2\{\Gamma"(s)\Gamma(s)-(\Gamma'(s))^2\}}{2\Gamma(s)^2}$
=$\frac{1}{2\Gamma(s)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}(xy)^{s-1}\{(\log y)^2 - \log x\log y - \log x\log y + (\log x)^2\}dxdy$
=$\frac{1}{2\Gamma(s)^2}\int_{(x,y)|x>0,y>0} e^{-x-y}(xy)^{s-1}\{\log\frac{y}{x}\}^2 dxdy$

4.1.3　（3）

$\frac{y}{x} = t, x+y = u$ とおくと、$x = \frac{u}{1+t}, y = \frac{tu}{1+t}$
この時 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+t} & -\frac{u}{(1+t)^2} \\ \frac{t}{1+t} & \frac{u}{(1+t)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+t)^2}$
よって (2) より $f"(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)^2}\iint_{u>0,t>0}(\log t)^2 e^{-u}(\frac{tu^2}{(1+t)^2})^{s-1}\frac{u}{(1+t)^2}dtdu$
$= \frac{1}{2\Gamma(s)^2}\int_0^\infty(\log t)^2\frac{t^{s-1}}{(1+t)^{2s}}dt\int_0^\infty e^{-u}u^{2s-1}du$
$= \frac{\Gamma(2s)}{2\Gamma(s)^2}\int_0^\infty(\log v)^2\frac{v^{s-1}}{(1+v)^{2s}}dv$

4.1.4 （4）

4.2 ４番の総評

あまり易しくはない。難易度は５段階で 3.5 か４。

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （１）

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(\frac{dx}{dt})^{-1}$
$\frac{dx}{dt} = a(x)\cos\theta = a(x)\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}$
$\frac{dy}{dt} = a(x)\sin\theta = a(x)\frac{t-y}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}$
よって (与式の右辺)=$\frac{1}{a(x)(1-x)}\sqrt{1+(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx})^2} = \frac{1}{a(x)(1-x)}\sqrt{1+(\frac{t-y}{1-x})^2} = \frac{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}{a(x)(1-x)^2}$
(与式の左辺)=$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}) = \frac{dt}{dx}\frac{\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}}{dt} = \frac{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}{a(x)(1-x)}\frac{d}{dt}\frac{t-y}{1-x} = \frac{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}{a(x)(1-x)}\times\frac{(1-\frac{dy}{dt})(1-x)-(t-y)(-\frac{dx}{dt})}{(1-x)^2}$
これより $\frac{(1-\frac{dy}{dt})(1-x)-(t-y)(-\frac{dx}{dt})}{(1-x)^2} = 1$ が示せればよい
$\frac{(1-\frac{dy}{dt})(1-x)-(t-y)(-\frac{dx}{dt})}{(1-x)^2} = 1 - \frac{dy}{dt} - \frac{t-y}{1-x}(-\frac{dx}{dt}) = 1 - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 1$

5.1.2 （2）

$\frac{dy}{dx} = z$ とする。$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1+z^2}}{a(x)(1-x)} \Leftrightarrow \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a(x)(1-x)}$
これより $\int_0^s \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+z^2}}dx = \int_0^s \frac{dx}{a(x)(1-x)}$
よって $\int_0^{z(s)} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int_0^s \frac{dr}{a(r)(1-r)}$
これより $\log\mid z(s)+\sqrt{z^2(s)+1}\mid = A(s)$ なので
$e^{A(s)} - e^{-A(s)} = z(s) + \sqrt{z^2(s)+1} - \frac{1}{z(s)+\sqrt{z^2(s)+1}} = \frac{2z(s)\{z(s)+\sqrt{z^2(s)+1}\}}{z(s)+\sqrt{z^2(s)+1}} = 2z(s)$
以上より $\frac{1}{2}\int_0^x 2z(s)ds = \int_0^x z(s)ds = y(\because \frac{dy}{dx} = z(x))$

5.2 ５番の総評

とっつきにくい問題。難易度は５段階で 3.5 か 4。

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （１）

二つ目の条件より $\int_0^1\{f(x)^2 - 2f(x)\sum(f,e_n)e_n + (\sum(f,e_n)e_n)^2\}dx$
=$\int_0^1\{f(x)^2 - 2\sum(f,e_n)^2 + A$

ここで $A=\int_0^1\{\sum_{n=1}^N(f,e_n)^2e_n^2dx+\sum_{i\neq j}(f,e_i)(f,e_j)e_ie_j\}dx$
$=\sum_{n=1}^N(f,e_n)^2+\sum_{i\neq j}^N(f,e_i)(f,e_j)(e_i,e_j)$
$=\sum_{n=1}^N(f,e_n)^2$
これより $\lim_{N\to\infty}(\int_0^1 f(x)^2dx-\sum_{n=1}^N(f,e_n)^2)=0$
よって $\int_0^1 f(x)^2dx=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N(f,e_n)^2$
以上より $\int_0^1 \mid f(x)\mid^2 dx=\sum_{n=1}^\infty(f,e_n)^2$

6.1.2 （２）

$m(A)=\int_0^1 1_A dx=\int_0^1 1_A^2dx=\sum_{n=1}^\infty(1_A,e_n)^2=\sum_{n=1}^\infty(\int_0^1 e_n(x)1_A(x)dx)^2=\sum_{n=1}^\infty(\int_A e_n(x)dx)^2$

6.1.3 （３）

$\forall t$ で $(e_n1_A+t1_A)^2\geq 0$ なので $\int_0^1(e_n1_A+t1_A)^2dx\geq 0$ より
$\int_0^1 e_n^21_A^2+2t\int_0^1 e_n1_A1_Adx+t^2\int_0^1 1_A^2\geq 0$
これが全ての t において成立するので
$(e1_A,1_a)^2-(e_n1_A,e_n1_A)(1_A,1_A)\leq 0$
これより $(\int_A e_n(x)dx)^2\leq\int_A e_n(x)^2dx$・$\mid A\mid$

6.1.4 （４）

$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{m(A)}(\int_0^1 e_n1_Adx)^2=\frac{1}{m(A)}\sum_{n=1}^\infty(1_A,e_n)^2=\frac{1}{m(A)}\int_0^1 1_A^2dx=\frac{1}{m(A)}\int_0^1 1_Adx=1$
ここで $\int_A S(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_A e_n^2(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^1 e_n^2(x)1_A^2dx\geq\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{m(A)}(\int_0^1 e_n1_Adx)^2=1$ （(3) より）
よって与式が示せた

6.1.5 （５）

$S(x)=\infty$ ではないと仮定する。
この時 $\exists B\subset(0,1)m(B)>0,\sup\{S(x)|x\in B\}=Max<\infty$
$B'\subset B,0<m(B')<\frac{1}{Max}$
$\int_{B'}Max\geq\int_{B'}S(x)dx$
(左辺)=$Max\int_{B'}dx<Max\frac{1}{Max}=1$
これより $1\geq\int_{B'}S(x)dx<1$（(4) より）
これは仮定に矛盾。以上より $S(x)=\infty(P-a.s)$

6.2 ６番の総評

出来なくてもいい問題だと思われる。選択しない方が良い。難易度は５段階で 4.5。

7　７番

7.1　解答

7.1.1　（1）

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$, $f_{Y|X}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}\exp(-\frac{(y-x)^2}{2v^2})$
よって $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}}\exp(-\frac{(y-x)^2}{2v^2})$
これより $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+v^2)}}\exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2(\sigma^2+v^2)})$ なので平均 μ 分散 σ^2+v^2 の正規分布

7.1.2　（2）

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2v^2}{\sigma^2+v^2}}}\exp(-\frac{(x-\frac{\mu v^2+y\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{2\frac{\sigma^2v^2}{\sigma^2+v^2}})$ なので平均 $\frac{\mu v^2+y\sigma^2}{\sigma^2+v^2}$ 分散 $\frac{\sigma^2v^2}{\sigma^2+v^2}$ の正規分布

7.2　７番の総評

計算が非常にしんどいが統計ができる人は選択すべき。難易度は５段階で３。

8　８番

9　９番

9.1　解答

9.1.1　（1）

$F(x) = P(X_\delta^2 \leq x)$ とおくと $f(x|\delta) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}P(-\sqrt{x} \leq X_\delta \leq \sqrt{x})$
$=\frac{d}{dx}(G(\sqrt{x}) - G(-\sqrt{x}))$($X_\delta$の分布関数を $G(x)$ とおいた)
$=\frac{1}{2\sqrt{x}}g(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}g(-\sqrt{x})$
$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi x}}\{\exp(-\frac{(\sqrt{x}-\delta)^2}{2}) + \exp(-\frac{(\sqrt{x}+\delta)^2}{2})\}$
また $\frac{f(x|\delta)}{f(x|0)} = \frac{\exp(\delta\sqrt{x}-\frac{\delta^2}{2})}{2} + \frac{\exp(-\delta\sqrt{x}-\frac{\delta^2}{2})}{2}$ なので
$\{\frac{f(x|\delta)}{f(x|0)}\}' = \frac{\delta}{4\sqrt{x}}\{\exp(\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2}) - \exp(-\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2})\}$
$\delta > 0$ の時 $\exp(\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2}) - \exp(-\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2}) \leq 0$
$\delta < 0$ の時 $\exp(\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2}) - \exp(-\delta\sqrt{x} - \frac{\delta^2}{2}) \geq 0$
これより $\{\frac{f(x|\delta)}{f(x|0)}\}' \geq 0 (x > 0)$ なので $\frac{f(x|\delta)}{f(x|0)}$ は x の狭義単調増加関数である。

10　１０番

10.1　解答

10.1.1　（1）

$f_{Y,Z}(y,z) = 2!\lim_{h\to 0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta} = 2f(y)f(z) = 2$

10.1.2 （２）

$E[Y]=\frac{1}{3}, E[Z]=\frac{2}{3}, E[Y^2]=\frac{1}{6}, E[Z^2]=\frac{1}{2}, V[Y]=V[Z]=\frac{1}{18}$
$E[YZ]=\int_0^1\{\int_0^z 2yzdy\}dz=\frac{1}{4}, Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]=\frac{1}{36}$
よって $\rho=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}$

10.2 １０番の総評

類題をやったことがあれば簡単。難易度は５段階で３か 3.5。

11 １１番

11.1 解答

11.1.1 （１）

(右辺)=$\frac{pr(x_i,u_1)}{pr(u_1)}pr(u_1)+\frac{pr(x_i,u_2)}{pr(u_2)}pr(u_2)=pr(x_i)$ =(左辺)
U で条件付けた時、X,Y,Z,W は独立なので X,Y も独立。
よって (右辺)=$pr(x_i,y_j|u_1)pr(u_1)+pr(x_i,y_j|u_2)pr(u_2)=pr(x_i,y_j,u_1)+pr(x_i,y_j,u_1)=pr(x_i,y_j)$ =(左辺)

11.1.2 （２）

(1) より $pr(x_i,y_j)-pr(x_i)pr(y_j)$
$=\{pr(x_i|u_1)pr(y_j|u_1)pr(u_1)+pr(x_i|u_2)pr(y_j|u_2)pr(u_2)\}-\{pr(x_i|u_1)pr(u_1)+pr(x_i|u_2)pr(u_2)\}\{pr(y_i|u_1)pr(u_1)+pr(y_i|u_2)pr(u_2)\}$
=$\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}pr(u_1)pr(u_2)\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}$
これより $\{pr(x_i,y_j)-pr(x_i)pr(y_j)\}\{pr(z_k,w_l)-pr(z_k)pr(w_l)\}$
=$pr(u_1)^2pr(u_2)^2\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}\{pr(z_k|u_1)-pr(z_k|u_2)\}\{pr(w_l|u_1)-pr(w_l|u_2)\}$
$\{pr(x_i,z_k)-pr(x_i)pr(z_k)\}\{pr(y_j,w_l)-pr(y_j)pr(w_l)\}$
=$pr(u_1)^2pr(u_2)^2\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}\{pr(z_k|u_1)-pr(z_k|u_2)\}\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}\{pr(w_l|u_1)-pr(w_l|u_2)\}$
よって (右辺)$=0$

11.2 １１番の総評

計算は大変だがあまり難しくはない。前年に似た問題が出ていてそれが難しかったため、この問題も敬遠してしまった人がいたのではないだろうか？難易度は５段階で３。

12 １２番

12.1 解答

12.1.1 （１）

$\mu_n=\sum_{k=2}^n(-1)^{k-1}\cdot kP(X_i=(-1)^{k-1}k)$
=$C\sum_{k=2}^n(-1)^{k-1}\frac{\log k}{k^2}$

12.1.2 （２）

$\mu_{2n+2}-\mu_{2n}=(-1)^{2n}\frac{\log(2n+1)}{(2n+1)^2}+(-1)^{2n+1}\frac{\log(2n+2)}{(2n+2)^2}$
$=\frac{\log(2n+1)}{(2n+1)^2}-\frac{\log(2n+2)}{(2n+2)^2}$
$=\log\frac{x^{\frac{1}{x^2}}}{(x+1)^{\frac{1}{(x+1)^2}}}(x=2n+1$ とおいた)
$\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$ を言うには $x>3$ で $f(x)=x^{\frac{1}{x^2}}>(x+1)^{\frac{1}{(x+1)^2}}$ を示せば良い。
$f(x)$ を微分することにより $x>3$ で $f'(x)<0$ が言えるので $\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$
$\mu_{2n+3}-\mu_{2n+2}=\frac{\log(2n+3)}{(2n+3)^2}>0$
$\mu_{2n+1}-\mu_{2n+3}$ は $\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$ と同様の議論をすればよい。
ここで $\mu_{2n}<\mu_{2n+2}<\mu_{2n+3}<\mu_{2n+1}$ において n を $n+1$ で置き換えて
$\mu_{2n+2}<\mu_{2n+4}<\mu_{2n+5}<\mu_{2n+3}$
よって $\mu_{2n}<\mu_{2n+2}<\mu_{2n+4}<\mu_{2n+5}<\mu_{2n+3}<\mu_{2n+1}$
この議論を繰り返すことによって $\mu_2<\mu_4<\mu_6<\cdots\mu_{2n}<\mu_{2n+1}<\mu_{2n-1}<\mu_{2n-3}<\cdots<\mu_3$ が言える
よって $\{u_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少かつ $\mu_{2n+1}>\mu_2$
また $\{u_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加かつ $\mu_{2n}<\mu_3$
これより $\lim_{n\to\infty}u_{2n+1},\lim_{n\to\infty}u_{2n}$ が存在し、$\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}-u_{2n}=0$ なので $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

12.1.3 （３）

チェビシェフの不等式より $P(|\frac{S_n}{n}-\mu|>\epsilon)\leq\frac{1}{\epsilon}E[\frac{S_n}{n}-\mu]=\frac{\mu_n-\mu}{\epsilon}$
よって $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{S_n}{n}-\mu|>\epsilon)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu}{\epsilon}=\frac{\mu-\mu}{\epsilon}=0$

12.2 １２番の総評

完答は難しい。難易度は５段階で 3.5 か４。

全体的な総評

1,3,7,10,11 あたりから選ぶと良いと思われる。１８年度よりは難度が下がった。

平成２０年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$
$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$
よって $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

1.1　１番の総評

チェインルールの問題なので解答は省略。計算頑張ってください。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$t=2$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$t=-4$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ をグラムシュミットの直交化法によって直交化すると

$u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $u_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$

これより $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$x'={}^tPx$ とおくと $Px'=x$
この時 $F(x)={}^tx'\,{}^tPAPx'=\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=2x'^2+2y'^2-4z'^2$
ここで ${}^tx'x'={}^txP\,{}^tPx={}^txx=1$ なので
$F(x)=2x'^2+2y'^2-4z'^2\le 2(x'^2+y'^2+z'^2)=2$
この時 $x'^2+y'^2=1, z'=0$

よって $x' = {}^tPx = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ \frac{-1}{\sqrt{30}}x + \frac{2}{\sqrt{30}}y + \frac{5}{\sqrt{30}}z \\ \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$
よって $x - 2y + z = 0$ かつ $(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y)^2 + (\frac{-1}{\sqrt{30}}x + \frac{2}{\sqrt{30}}y + \frac{5}{\sqrt{30}}z)^2 = 1$
これをまとめると $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$
以上より $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ かつ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の時に最大値 2 を取る
また $-4(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq F(x)$ なので $-4 \leq F(x)$ なので F(x) の最小値は-4
このとき $-4(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2x'^2 + 2y'^2 - 4z'^2$ より $x' = 0, y' = 0, z' = \pm 1$
よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

2.2　２番の総評

2 番の最大値の所はなかなかやりにくいかもしれない。難易度は５段階で３。

3　３番

3.1　解答

$f(x) = e^x + 2\cos x \int_0^x \cos(s)f(s)ds + 2\sin x \int_0^x \sin(s)f(s)ds - (A)$
よって $f'(x) = e^x - 2\sin x \int_0^x \cos(s)f(s)ds + 2\cos x \int_0^x \sin(s)f(s)ds + 2f(x)$
$f''(x) = e^x - 2\cos x \int_0^x \cos(s)f(s)ds - 2\sin x \int_0^x \sin(s)f(s)ds + 2f'(x)$
これより $2\cos x \int_0^x \cos(s)f(s)ds + 2\sin x \int_0^x \sin(s)f(s)ds = e^x + 2f'(x) - f''(x)$ なのでこれを (A) に代入して
$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$
この 2 階線形常微分方程式を解くと $f(x) = C_1e^x + C_2xe^x + x^2e^x(C_1, C_2$は定数$)$
$f(0) = C_1 = 1, f'(0) = C_1 + C_2 = 3$ なので $C_1 = 1, C_2 = 2$
よって $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x + 1)^2$

3.2　３番の総評

$f(x)$ を微分する際に $f'(x) = e^x + 2f(x)$ としないように。難易度は５段階で３。

4　４番

5　５番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} P(X \leq k)$
また (右辺)=$\{P(X \leq n) - P(X < 1)\} + \{P(X \leq n) - P(X < 2)\} + \cdots + \{P(X \leq n) - P(X < n)\}$

=$\sum_{k=1}^{n}\{P(X \leq n) - P(X < k)\}$
=$\sum_{k=1}^{n} P(k \leq X \leq n)$
=$\sum_{k=1}^{n} P(X \leq k)$
よって与式が成立する

5.1.2　（2）

$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(X = j)$
=$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} P(X = j)$(正項級数なので項を入れ替えた)
=$\sum_{j=1}^{\infty} jP(X = j)$
=$E[X]$

5.1.3　（3）

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \frac{(k-1)(k+4)}{(k+1)(k+2)} = \frac{6}{(k+1)(k+2)}$
よって (2) より $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = 6\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 3$

5.2　5番の総評

難しくはないが、細かいところでいくらか減点されそうな感じ。難易度は５段階で３。

6　6番

6.1　解答

6.1.1　（1）

$E[X] = n, V[X] = 2n$

6.1.2　（2）

$E[\hat{v}_\alpha] = aE[S], E[\frac{S}{v}] = n(\because \frac{S}{v} \sim \chi_n^2)$
よって $E[\hat{v}_\alpha] = anv$
$\hat{v}_\alpha$ が v の不偏推定量になるので $anv = v$。よって $a = \frac{1}{n}$

6.1.3　（3）

$E[(\hat{v}_\alpha - v)^2] = E[\hat{v}_\alpha^2] - 2vE[\hat{v}_\alpha] + v^2$
$E[\hat{v}_\alpha^2] = a^2v^2(n^2 + 2n), E[\hat{v}_\alpha] = anv$ より
$E[(\hat{v}_\alpha - v)^2] = v^2(2na^2 + a^2n^2 - 2an + 1) = (n^2 + 2n)\{a - \frac{1}{n+2}\}^2 + \frac{2n}{n^2+2n}$
よって $a = \frac{1}{n+2}$ で最小となる

6.2　６番の総評

取り組みやすい問題。難易度は５段階で 2.5。

全体的な総評

４番以外はすべて標準的な問題。ただ、２と５は思わぬところで失点してしまうかも。

平成２０年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

O から A の方向に積分路 C_1, 孤 AB を A から B の方向に積分路 C_2,B から O の方向に積分路 C_3 をとる
$\int_{C_1} e^{-z^2}dz$ において $z = xe^{\frac{i\pi}{4}}$ とおくと
$-\int_{C_3} e^{-z^2}dz = \int_{C_1} e^{-ix^2}e^{\frac{i\pi}{4}}dx = e^{\frac{i\pi}{4}}\int_{C_1} e^{-ix^2}dx$
また $\lim_{R\to\infty} \mid \int_{C_2} e^{-z^2}dz \mid \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-z^2} \mid\mid dz \mid$
$z = Re^{i\theta}$ とおくと、$\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ なので $\mid dz \mid = Rd\theta$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-z^2} \mid Rd\theta = \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-R^2e^{2i\theta}} \mid Rd\theta$
=$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mid e^{-R^2\cos 2\theta}e^{-R^2 i\sin 2\theta} \mid = 0$
ここで $f(z)$ は C とその内部で正則なので $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z) = 0$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2+C_3} f(z) = \lim_{R\to\infty}\{\int_{C_1} e^{-z^2}dz - e^{\frac{i\pi}{4}}\int_{C_1} e^{-ix^2}dx\} = 0$
これより $e^{-\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \int_0^\infty \cos x^2 dx - i\int_0^\infty \sin x^2 dx$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = \int_0^\infty \cos x^2 dx - i\int_0^\infty \sin x^2 dx$
実数部分と虚数部分を比較して $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

1.2　１番の総評

類題をやったことがないと多分できないだろう。参考文献に挙げてある「複素関数概説」の１５３ページに同じ問題がある。難易度は５段階で 3.5。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$$\xi(2,1,0) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2)$$

2.1.2　（2）

$S_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\xi(2,1,0)}{\xi(2,1,0)} = 1$

$$\xi(4,2,0) = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)$$

よって $S_{2,1,0}(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_2^2-x_1^2)(x_3^2-x_1^2)(x_2^2-x_3^2)}{x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)}$

2.1.3　（3）

(左辺)=$x_1^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+x_2^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+x_3^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)$
=$\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma+k} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma+k} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2+k} & x_3^{\beta+1+k} & x_3^{\gamma+k} \end{vmatrix}$
$=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+k+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+k+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma+k} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma+k} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma+k} \end{vmatrix}$(計算省略)
=$S_{\alpha+k,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta+k,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta,\gamma+k}(x_1,x_2,x_3)$

2.1.4　（4）

(3) において $k=4,\alpha=\beta=\gamma=0$ とおくと (2) より $S_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)=1$ なので
$x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)$
よって $S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)=-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$ を示せば良い
$S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^5 & 1 \\ x_2^2 & x_2^5 & 1 \\ x_3^2 & x_3^5 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1^4 \\ x_2^2 & x_2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3 & x_3^4 \end{vmatrix}\}$
$S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & x_1 \\ x_2^4 & x_2^2 & x_2 \\ x_3^4 & x_3^2 & x_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1^5 & x_1^2 & 1 \\ x_2^5 & x_2^2 & 1 \\ x_3^5 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}\}=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^5 & 1 \\ x_2^2 & x_2^5 & 1 \\ x_3^2 & x_3^5 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1^4 \\ x_2^2 & x_2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3 & x_3^4 \end{vmatrix}\}$
$=S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)$
以上より $x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$

2.2　２番の総評

計算がややしんどいが十分に取り組める問題。難易度は５段階で３。

3　３番

3.1　解答

与式より
$\frac{\dot{x}}{x}=-\frac{1}{y(t)x(t)}-(A)$
$\frac{\dot{y}}{y}=-\frac{1}{y(t)x(t)}-(B)$
よって $\frac{\dot{x}}{x}=\frac{\dot{y}}{y}$ なので $\log\mid x\mid=\log C\mid y\mid$ (C は定数)
よって $x=Cy$
$x(0)=a,y(0)=b$ なので $C=\frac{a}{b}$
よって $x=\frac{a}{b}y$。これを (A) に代入すると
$\frac{\dot{x}}{x}=-\frac{1}{\frac{b}{a}x^2}$
$\Leftrightarrow x\dot{x}=-\frac{a}{b}$
よって $\frac{1}{2}x^2=-\frac{a}{b}t+C_1$($C_1$は定数)

初期条件より $\frac{a^2}{2} = C_1$
よって $x^2 = -\frac{2a}{b}t + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2} \geq t$
同様にして $y^2 = -\frac{2b}{a}t + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2} \geq t$
よって $\lim_{t\to\frac{ab}{2}} x(t) = \lim_{t\to\frac{ab}{2}} y(t) = 0$ となる

3.2　３番の総評

あまり難しくはない。難易度は５段階で３か 3.5。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（１）

f は $[0,a]$ で実数値連続関数なので積分の平均値の定理より
$\int_0^a f(x)dx = f(\alpha)a \ \ (0 < \alpha < a)$
よって $\alpha \in (0,a)$ に対して $f(\alpha) = m_\alpha(f)$ が成立する

5　５番

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（１）

$p_1 = \frac{1}{2}\times q_1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times q_1 + \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow q_1 = 2p_1 - \frac{1}{2}$
$p_2 = \frac{1}{2}\times q_2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times q_2 + \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow q_2 = 2p_2 - \frac{1}{2}$

6.1.2　（２）

また A_1, A_2, B_1, B_2 でイエスと解答する事象をそれぞれ A_1, A_2, B_1, B_2 とおく。
この時 $p(A_1A_2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + p(A_1B_2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + p(B_1A_2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + p(B_1B_2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = p_{12}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}p(A_1A_2) = p_{12} - \frac{1}{4}p(A_1B_2) - \frac{1}{4}p(B_1A_2) - \frac{1}{4}p(B_1B_2)$
$= p_{12} - \frac{1}{4}p(A_1)p(B_2) - \frac{1}{4}p(B_1)p(A_2) - \frac{1}{4}p(B_1)p(B_2)$ (A_1と B_2, B_1と A_2, B_1と B_2はそれぞれ互いに独立なので)
$= p_{12} - \frac{1}{4}(2p_1 - \frac{1}{2}) \times\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times (2p_2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
よって $p(A_1A_2) = 4p_{12} - p_1 - p_2 + \frac{1}{4}$

6.2　６番の総評

難しくはないが取り組みやすくもない。難易度は５段階で３か 3.5。

7　７番

7.1　解答

7.1.1　（１）

$Y_i = (X_i - X_{i-1})(X_{i+1} - X_i)(i = 2, 3, \cdots, n-1)$ とおいて確率変数 $U(Y_i)$ を

$U(Y_i) = \begin{cases} 1 & y_i < 0 \\ 0 & Y_i \geq 0 \end{cases}$

と定義する。この時 $T_1 = \sum_{i=2}^{n-1} U(Y_i)$

ここで $Y_i < 0 \Leftrightarrow X_{i-1} < X_{i+1} < X_i, X_{i+1} < X_{i-1} < X_i, X_i < X_{i-1} < X_{i+1}, X_i < X_{i+1} < X_{i-1}$

よって $P(Y_i < 0) = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$

よって $E[T_1] = \frac{2}{3}(n - 1 - 2 + 1) = \frac{2(n-2)}{3}$

7.1.2　（２）

X_k と X_{k+1} が転換点である

$\Leftrightarrow X_{k-1} < X_k > X_{k+1} < X_{k+2}, X_{k-1} > X_k < X_{k+1} > X_{k+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{k+1} < X_{k+2} < X_{k-1} < X_k \\ X_{k+1} < X_{k-1} < X_{k+2} < X_k \\ X_{k-1} < X_{k+1} < X_{k+2} < X_k \\ X_{k-1} < X_{k+1} < X_k < X_{k+2} \\ X_{k+1} < X_{k-1} < X_k < X_{k+2} \\ X_{k+2} < X_k < X_{k+1} < X_{k-1} \\ X_k < X_{k+2} < X_{k+1} < X_{k-1} \\ X_k < X_{k-1} < X_{k+2} < X_{k+1} \\ X_{k+2} < X_k < X_{k-1} < X_{k+1} \\ X_k < X_{k+2} < X_{k-1} < X_{k+1} \end{cases}$$

よって Z を X_k と X_{k+1} が転換点の時に１をとる確率変数とすると $Z \sim B(1, \frac{10}{4!})$

よって $T_2 \sim B(n-3, \frac{10}{4!})$ より $E[T_2] = \frac{5(n-3)}{12}$

7.2　７番の総評

類題が平成１７年に出ているので取り組めなくはない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

8　８番

8.1　解答

8.1.1　（１）

$P(R \leq 1) = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = P(-\sqrt{1 - Y^2} \leq X \leq \sqrt{1 - Y^2}) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx)dy = \frac{\pi}{4}$

8.1.2　（２）

$|\log R| = -\log R$
$S^2 = -\frac{2X^2}{X^2+Y^2}\log(X^2+Y^2)$
$T^2 = -\frac{2Y^2}{X^2+Y^2}\log(X^2+Y^2)$
よって $S^2+T^2 = -2\log(X^2+Y^2)$
これより $X^2+Y^2 = e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}$ なので $R = e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}$
ゆえに $X = \frac{S}{2}\frac{R}{\sqrt{|\log R|}} = S\frac{e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}}{\sqrt{S^2+T^2}}, Y = T\frac{e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}}{\sqrt{S^2+T^2}}$

8.1.3　（３）

(左辺)=$\frac{P(S\leq s_0, T\leq t_0, R\leq 1)}{P(R\leq 1)}$
ここで $R\leq 1$ の時 $0\leq e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}\leq 1$ なので $-\infty\leq S\leq\infty, -\infty\leq T\leq\infty$
また $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}$
よって $F_{S,T}(s,t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}\cdot\frac{1}{4}$
よって (与式)=$\frac{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{s_0}\int_{-\infty}^{t_0}\frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}dsdt}{\frac{\pi}{4}}$
=$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{s_0}\int_{-\infty}^{t_0}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}dsdt$
=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s_0}e^{-\frac{s^2}{2}}ds\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

8.2　８番の総評

なかなか取り組みにくい。難易度は５段階で４。

9　９番

9.1　解答

9.1.1　（１）

$E[X] = \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_0^\infty x\phi(x-\mu)dx = \frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt$
ここで $\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = \mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt + \int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt$
$\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt > \mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt > \int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt(\mu<-1)$ が成立し、
$\lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt = \lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt = 0$ なのではさみうちの原理より
$\lim_{\mu\to-\infty}\mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt = 0$
以上より $\lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = 0$
また $\lim_{\mu\to-\infty}(1-\Phi(-\mu)) = 1-1 = 0$
よってロピタルの定理より $\lim_{\mu\to-\infty}\frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = \lim_{\mu\to-\infty}\frac{-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt}{\phi(-\mu)}$
$\lim_{\mu\to-\infty}\phi(-\mu) = \lim_{\mu\to-\infty}-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt = 0$ よりロピタルの定理から
$\lim_{\mu\to-\infty}\frac{-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt}{\phi(-\mu)} = \lim_{\mu\to-\infty}\frac{\phi(-\mu)}{-\phi'(-\mu)} = 0$

9.1.2 （2）

(1) より $E[X] = \mu + \frac{\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)}$
また $E[X^2] = \mu^2 + \frac{2\mu}{1-\Phi(-\mu)} \int_{-\mu}^{\infty} t\phi(t)dt + \frac{1}{1-\Phi(-\mu)} \int_{-\mu}^{\infty} t^2\phi(t)dt$
ここで $\int_{-\mu}^{\infty} t\phi(t)dt = \phi(\mu)$
$\int_{-\mu}^{\infty} t^2\phi(t)dt = 1 - \Phi(-\mu)$
これより $E[X^2] = \mu^2 + \frac{2\mu\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)} + 1$
よって $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - (\frac{\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)})^2 < 1$

9.2 ９番の総評

(1) でロピタルの定理を使うのがなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい

10 １０番

全体的な総評

１，２，３，６，７，９から選択するのが良いと思われる。

平成２１年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$u=\frac{f_x}{f}, u_x=\frac{f_{xx}f-f_x^2}{f^2}, u_t=\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}, u_{xx}=\frac{(f_{xxx}f+f_{xx}f_x-2f_{xx}f_x)f^2}{f^4}-\frac{(f_{xx}f-f_x^2)2ff_x}{f^4}$
よって $2uu_x+u_{xx}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}$
これより $u_t=2uu_x+u_{xx}\Leftrightarrow\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}$
よって $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_t}{f})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_{xx}}{f})\Leftrightarrow\frac{f_t}{f}=\frac{f_{xx}}{f}+C(t)\Leftrightarrow f_t=f_{xx}+C(t)f$
以上より $(A)\Leftrightarrow(B)$

1.1.2　（2）

$u=(\log(e^{k_1x+l_1t}+e^{k_2x+l_2t}))'$($'$ は x での偏微分を表すものとする。)
よって $f=e^{k_1x+l_1t}+e^{k_2x+l_2t}=A+B$ とおける。
$f_x=k_1A+k_2B, f_t=l_1A+l_2B, f_{xx}=k_1^2A+k_2^2B, f_{xt}=k_1l_1A+k_2l_2B, f_{xxx}=k_1^3A+k_2^3B$
これより $\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}\Leftrightarrow(k_1+k_2)(k_1-k_2)^2AB=(k_1-k_2)(l_1-l_2)AB$
よって $k_1=k_2$ と $(k_1+k_2)(k_1-k_2)=(l_1-l_2)$

1.2　１番の総評

この年は前年までの傾向からいくらか変わってしまったようである。少し難度が上がった。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ とおくと
$\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}$
よって T は正則である。また
$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}$ なので
$T^{-1}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B & 0\\ 0 & A-B\end{pmatrix}$

2.1.2 （2）

A と C を正方行列として、$P = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ とするとき $\mid P \mid = \mid A \mid\mid C \mid$ が成立することを示す。
A が１次の行列である時は P の１列について余因子展開することにより $\mid P \mid = \mid A \mid\mid C \mid$ が言える
A が n 次の正方行列である時、$\mid P \mid = \mid A \mid\mid C \mid$ が成立することを仮定する。
A が (n+1) 次の時、適当な行列をかけることにより
$A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$ (K は n 次の正方行列)
という形に変更できる。このとき
$B' = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1k} \\ 0 & b_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nk} \end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix} a_{n+1n+1} & b_{n+11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1k} \\ 0 & C \end{pmatrix}$ とおくと
$P = \begin{pmatrix} K & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$
となり、K は n 次の正方行列なので $\mid P \mid = \mid K \mid\mid C' \mid$
ここで C' において１列で余因子展開すると $\mid C' \mid = a_{n+1n+1} \mid C \mid$
また A において１列で余因子展開すると $\mid A \mid = a_{n+1n+1} \mid K \mid$
よって $\mid K \mid\mid C' \mid = \mid A \mid\mid C \mid$
よって $\mid P \mid = \mid A \mid\mid C \mid$
これより $n+1$ の時が言えた。
以上より $det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = det(A+B)det(A-B)$ が言える。

2.1.3 （3）

$T^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$ において両辺の行列式を取ると
(左辺)=$\mid T^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} T \mid = \mid T^{-1} \mid\mid T \mid \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$
(右辺)=$\det(A+B)\det(A-B)$((2) より)
以上より $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$

2.1.4 （4）

$\det \begin{pmatrix} A-\lambda I & I \\ I & A-\lambda I \end{pmatrix} = \det(A-(\lambda-1)I)\det(A-(\lambda+1)I)$((3) より)
$= \begin{vmatrix} -4-\lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & -4-\lambda+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4-\lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & -4-\lambda-1 \end{vmatrix} = 0$
これより $\lambda = -3, -3+\sqrt{2}, -3-\sqrt{2}, -5, -5+\sqrt{2}, -5-\sqrt{2}$

2.2　２番の総評

これも新傾向の問題。手も足も出ないというわけではないが … 。難易度は５段階で 3.5。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

$x_1 > x_2$ のとき $max(x_1, x_2) = x_1$
$x_1 < x_2$ のとき $max(x_1, x_2) = x_2$
よって (与式)=$\int_0^a \{\int_0^{x_2} x_2 dx_1 + \int_{x_2}^a x_1 dx_1\} dx_2 = \frac{2}{3}a^3$

3.1.2　（2）

(与式)=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\int_0^{max(x_2 \cdots x_n)} max(x_2 \cdots x_n) dx_1 + \int_{max(x_2 \cdots x_n)}^a x_1 dx_1\} dx_2 dx_3 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\frac{a^2}{2} + \frac{max^2(x_2 \cdots x_n)}{2}\} dx_2 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\int_0^{max(x_3 \cdots x_n)} \frac{a^2}{2} + \frac{max^2(x_3 \cdots x_n)}{2} dx_2 + \int_{max(x_3 \cdots x_n)}^a \frac{a^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\} dx_3 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}max^3(x_3 \cdots x_n) dx_3 \cdots dx_n$
= …
=$\int_0^a \{\frac{n-1}{n}a^n + \frac{1}{n}x_n^n\} dx_n$
=$\frac{n-1}{n}a^{n+1} + \frac{a^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}a^{n+1}$

3.2　３番の総評

取り組みやすいとは言えないが、選択すべき問題。難易度は５段階で３。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

$g(s) = aB(s)g(s) + b$ より $g(s) = \frac{b}{1-aB(s)}$
よって $g'(s) = \frac{abB'(s)}{(1-aB(s))^2}$
$g"(s) = ab\frac{B"(s)(1-aB(s))+2a(B'(s))^2}{(1-aB(s))^3}$
これより (左辺)=$\frac{\frac{b}{1-aB(s)} ab \frac{B"(s)(1-aB(s))+2a(B'(s))^2}{(1-aB(s))^3}}{\frac{a^2b^2B'(s)^2}{(1-aB(s))^4}} = 2a + \frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2}$
ここで $B'(s) = \frac{g(s)}{G(s)}$(条件より)
$B"(s) = \frac{g'(s)G(s)-g(s)G'(s)}{G^2(s)}, 1 - aB(s) = \frac{b}{g(s)}$
よって $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2} = \frac{b}{g(s)} \frac{g'(s)G(s)-g(s)G'(s)}{g^2(s)}$
また $G'(s) = g(s)^2$

よって $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2}=b(\frac{g'(s)G(s)}{g^3(s)}-1)$
ここで $g'(s)=\frac{abB'(s)}{(1-ab(s))^2}=\frac{ab\frac{g(s)}{G(s)}}{(1-ab(s))^2}=\frac{ab\frac{g(s)}{G(s)}}{\frac{b^2}{g^2(s)}}=\frac{a}{b}\frac{g^3(s)}{G(s)}$
これより $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2}=b(\frac{a}{b}-1)=a-b$
以上より (左辺)=$2a+a-b=3a-b$

4.1.2 （2）

$y=\frac{g}{g'}$ とおくと、$y'=\frac{(g')^2-gg"}{(g')^2}=1-\frac{gg"}{(g')^2}$
これより $(*)\Leftrightarrow a(1-y')=3a-b\Leftrightarrow y'=-2+\frac{b}{a}$
よって $y(s)=-2s+\frac{b}{a}s+C_1(C_1$は定数)
ここで $y(0)=C_1=\frac{g(0)}{g'(0)}=\frac{b}{ab^2}=\frac{1}{ab}$
これより $y(s)=-2s+\frac{b}{a}s+\frac{1}{ab}$
よって $\frac{g'}{g}=\frac{1}{s(-2+\frac{b}{a})+\frac{1}{ab}}$
$\log g=\frac{1}{-2+\frac{b}{a}}\log\{s(-2+\frac{b}{a})+\frac{1}{ab}\}+C_1$
$g=C_2\{s(-2+\frac{b}{a})+\frac{1}{ab}\}^{-2+\frac{b}{a}}$
$g(0)=C_1(\frac{1}{ab})^{-2+\frac{b}{a}}=b\Leftrightarrow C_1=\frac{b}{(ab)^{-2+\frac{b}{a}}}$
よって $g=b\{-2abs+bs^2+1\}^{-2+\frac{b}{a}}$

4.2 ４番の総評

(1) はもっとシンプルな答案があるはず。難易度は５段階で４。

5 ５番

５番

確率変数 X は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする。さらに確率変数 Y は $X=x(0<x<1)$ が与えられたときの条件付き確率分布が二項分布 $B(n,x)$、すなわち試行回数 n（自然数)、成功確率 x のベルヌーイ試行における成功回数の分布であるとする。
(1)$P(Y=k)=\frac{1}{n+1},k=0,1,\cdots,n$ を示せ。
(2)$Y=k$ が与えられた時の X の条件付き分布を求めよ。

5.1 解答

5.1.1 （1）

$P(Y=k|X=x)={}_nC_kx^k(1-x)^{n-k}$(条件より)
ここで X の確率密度関数を $f(x)$、X,Y の同時確率密度関数を $f(x,y)$ とおくと
$f(x)=1,f(x,y)={}_nC_yx^y(1-x)^{n-y}$
よって $P(Y=k)=\int_0^1{}_nC_kx^k(1-x)^{n-k}dx$
$={}_nC_k\int_0^1x^k(1-x)^{n-k}dx$

$=_n C_k B(k+1, n-k+1)$
$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$
$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$
$=\frac{1}{n+1}(k=0,1,\cdots,n)$

5.1.2 （2）

$f(x|y=k)=\frac{f(x,k)}{P(Y=k)}=\frac{{}_nC_k x^k(1-x)^{n-k}}{\frac{1}{n+1}}=(n+1)_nC_k x^k(1-x)^{n-k}$

5.2 ５番の総評

一番簡単な選択問題。選択すべき。難易度は５段階で 2。

6 ６番

６番

3 変量の確率変数ベクトル (X,Y,Z) は平均 $E[X]=E[Y]=E[Z]$ であり，共分散行列 $\sum$ を持つとする．
(1)$\sum$ は非負定符号であることを示せ．
(2)$\sum=\begin{pmatrix}1 & \rho & \rho\\ \rho & 1 & \rho\\ \rho & \rho & 1\end{pmatrix}$ のとき，ρ の取りうる範囲を求めよ．
(3)(2) で求めた ρ の範囲の中で最大値を与える (X,Y,Z) の例を挙げよ．
(4)(2) で求めた ρ の範囲の中で最小値を与える (X,Y,Z) の例を挙げよ．

6.1 解答

6.1.1 （1）

$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V[X] & Cov(X,Y) & Cov(X,Z)\\ Cov(X,Y) & V[Y] & Cov(Y,Z)\\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & V[Z]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$
$=a_1^2V[X]+a_2^2V[Y]+a_3^2V[Z]+2a_1a_2Cov(X,Y)+2a_2a_3Cov(Y,Z)+2a_1a_3Cov(X,Z)$
$=V[a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3]\geq 0$
よって σ は非負定符号である。

6.1.2 （2）

$\sum$ が半正定値行列になるための ρ の条件を求める。
$|\sum-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & \rho & \rho\\ \rho & 1-\lambda & \rho\\ \rho & \rho & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ を解くと $\lambda=1-\rho, 1+2\rho$
よって $1-\rho, 1+2\rho\geq 0$ なので $-\frac{1}{2}\leq\rho\leq 1$

6.1.3　（３）

$X=Y=Z=\frac{1}{2}$(確率 $\frac{1}{2}$ で)、$X=Y=Z=-\frac{1}{2}$(確率 $-\frac{1}{2}$ で)

6.1.4　（４）

$X=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Y=0, Z=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$(確率 $\frac{1}{3}$ で)
$X=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Z=0$(確率 $\frac{1}{3}$ で)
$X=0, Y=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Z=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$(確率 $\frac{1}{3}$ で)

6.2　６番の総評

(3) と (4) はあくまで一例であり、他にも解答はある。難易度は５段階で 3 か 3.5。

全体的な総評

必答問題が２問とも新傾向ということもあり、多くの受験生が混乱したそうです。選択は５が簡単。

平成２１年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解説

1.1.1　（１）

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと与式は
$r^4 - r^3(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$
これより $r = \sin 3\theta$（３倍角の公式を使った。）
$r > 0$ の時、$0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi, \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$
$\frac{dr}{d\theta} = 3\cos 3\theta$ より $\frac{dr}{d\theta} = 0$ とおくと、$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$
これを元に増減表を書いて、グラフを書けばよい（省略）

1.1.2　（２）

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のときの面積は $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{12}$
よって求める面積は $3 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

1.2　１番の総評

あまりやったことのない問題なので非常に取り組みにくい。極座標で表された図形の面積の求め方は「難波誠著　「微分積分学」　裳華房」の１２５ページを参照してください。難易度は５段階で４。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（１）

$\det A(t) = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$ より
$\frac{d}{dt}\det A(t) = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} \dot{a}_{1i_1} \cdots a_{ni_n} + \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} \cdots \dot{a}_{ni_n}$
ここで $D_1 = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} \dot{a}_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$ とおくと

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \dot{a}_{1i} A_{1i}$$

また $A^{(-1)}(t) = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}$

よって $\dot{A}A^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}$

この (i,i) 成分は $\sum_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}Aij$

$tr(\dot{A}A^{-1}) \det A(t) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}Aij)$

$\frac{d}{dt}\det A(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \dot{a}_{ij}A_{ij})$

よって $\frac{d}{dt}\det A(t) = tr(\dot{A}A^{-1}) \det A(t)$

3 ３番

3.1 解答

3.1.1 （1）

$e^{-u(x,t)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\int_0^1 e^{u(y,t)}dy}$ より

$\frac{\partial}{\partial t}(-e^{-u(x,t)}) = \frac{1}{\int_0^1 e^{u(y,t)}dy}$

$\frac{1}{\int_0^1 e^{u(y,t)}dy}$ は t の関数なのでこれを $p(t)$ とおくと

$\frac{\partial}{\partial t}(-e^{-u(x,t)}) = \frac{1}{p(t)}$

よって $-e^{-u(x,t)} = \int_0^t \frac{1}{p(z)}dz + f(x)$(f(x) は x の関数)

よって $-e^{-u(x,0)} = f(x) = -e^{-u_0(x)}$

これより $e^{-u(x,t)} = -\int_0^t \frac{1}{p(z)}dz + e^{-u_0(x)}$

よって $e^{-u_0(x)} - e^{-u(x,t)} = \int_0^t \frac{1}{p(z)}dz$

以上より $e^{-u_0(x)} - e^{-u(x,t)}$ は t の関数である。

3.1.2 （2）

(1) において $e^{-u_0(x)} - e^{-u(x,t)} = g(t)$ とおく

このとき $e^{-u_0(x_1)} - e^{-u(x_1,t)} = e^{-u_0(x_2)} - e^{-u(x_2,t)}$

$\Leftrightarrow e^{-u_(x_1,t)} - e^{-u(x_2,t)} = e^{-u_0(x_1)} - e^{-u_0(x_2)}$

ここで $u_0(x_1) \leq u_0(x_2)$ より $-u_0(x_1) \geq -u_0(x_2)$ なので $e^{-u_0(x_1)} \geq e^{-u_0(x_2)}$

よって $e^{-u_(x_1,t)} - e^{-u(x_2,t)} = e^{-u_0(x_1)} - e^{-u_0(x_2)} = e^{-u_0(x_1)} - e^{-u_0(x_2)} \geq 0$

以上より $e^{-u_(x_1,t)} \geq e^{-u(x_2,t)}$ なので $u(x_1,t) \leq u(x_2,t)$

4　4番

4.1　解答

4.1.1　（1）

1 から 2 の間で高さ 1 の三角形、3 から 4 の間で高さ $\frac{1}{2}$ の三角形、5 から 6 の間で高さ $\frac{1}{4}$ の三角形というようにすると
$\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid dx = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots) = 2$
しかし、$\lim_{x\to\infty} \mid f(x) \mid = 0$ とはならない。

5　5番

5.1　解説

5.1.1　（1）

計算結果のみ示す。
$\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial x} f(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{(y-b)^2 z_x^2}{(z-c)^2} f"(\frac{y-b}{z-c}) - (y-b) z_{xx} f'(\frac{y-b}{z-c})$
$\frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial y} f(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{\{z-c-(y-b)z_y\}^2}{(z-c)^2} f"(\frac{y-b}{z-c}) + (b-y) z_{yy} f'(\frac{y-b}{z-c})$

5.1.2　（2）

$\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-a}{z-c}\} = (a-x) z_{xx}$
同様に $\frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-a}{z-c}\} = (a-x) z_{yy}$
これより $\frac{1}{z_{xx}} \frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-a}{z-c}\} = \frac{1}{z_{yy}} \frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-a}{z-c}\}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{z_{xx}}\{\frac{(y-b)^2 z_x^2}{(z-c)^2} f"(\frac{y-b}{z-c}) - (y-b) z_{xx} f'(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{1}{z_{yy}}\{\frac{\{z-c-(y-b)z_y\}^2}{(z-c)^2} f"(\frac{y-b}{z-c}) + (b-y) z_{yy} f'(\frac{y-b}{z-c})\}$
よって $z_{yy}\{(y-b)z_x\}^2 f"(\frac{y-b}{z-c}) = z_{xx}\{z-c-(y-b)z_y\}^2 f"(\frac{y-b}{z-c})$
$f"(\frac{y-b}{z-c}) \neq 0$ の時は $z_{xx}\{z-c-(y-b)z_y\}^2 = z_{yy}\{(y-b)z_x\}^2$
$f"(\frac{y-b}{z-c}) = 0$ の時は (1) より $\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-a}{z-c}\} = (b-y) z_{xx} f'(\frac{y-b}{z-c}) = (a-x) z_{xx}$
これより $f'(\frac{y-b}{z-c}) = \frac{x-a}{y-b}$

5.2　5番の総評

計算が非常に複雑な問題。統計ができない人は絶対に選択しなければならない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

6　６番

６番

X,Y を互いに独立でともに標準正規分布に従う確率変数とする。(X,Y) の同時分布を２変量標準正規分布という。
(1) 確率変数 U,V を次式で定めるとき、(U,V) の同時分布を求めよ。
$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} (0 \leq \theta < 2\pi)$
(2) ２次の実正則行列 A,B が $AA^T = BB^T$ を満たすとする。ここで A^T は行列 A の転置行列を表す。
$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と定義するとき、(X_1, Y_1) の同時分布は (X_2, y_2) の同時分布と一致することを示せ。

6.1　（1）

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))$
ここで $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ より
$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$
よって $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$
よって $f_{U,V}(u,v) =\mid J \mid f_{X,Y}(\cos\theta u + \sin\theta v, -\sin\theta u + \cos\theta v) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(u^2+v^2))$
これより (U,V) の同時分布は $F(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(p^2+q^2))dpdq$
これも二変量正規分布である。

6.2　（2）

$f_{X_1,Y_1}(x_1,y_1) = f_{X,Y}(x,y) \mid \det(A^{-1}) \mid = \mid \det(A^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))$
ここで $x^2+y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (A^T)^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (AA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$
よって $f_{X_1,Y_1}(x_1,y_1) = \mid \det(A^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (AA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\}$
同様にして $f_{X_2,Y_2}(x_2,y_2) = \mid \det(B^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} (BB^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\}$
$= \mid \det(B^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} (AA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\}$(条件より)
ここで $AA^T = BB^T$ より $\det(AA^T) = \det(BB^T)$
これより $\det(A)\det(A^T) = \det(B)\det(B^T)$
$\det(A) = \det(A^T), \det(B) = \det(B^T)$ なので $\det(A) = \det(B)$
よって $\det(A^{-1}) = \det(B^{-1})$
よって (X_1, Y_1) と (X_2, Y_2) は同じ密度関数を持つのでその同時分布も一致する。

6.3　６番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で 3.5。

7　７番

７番

X,Y が平均 $E[X]=E[Y]=0$、分散 $V[X]=V[Y]=1$、相関係数 $Corr(X,Y)=\rho$ を持つ２変量正規分布に従うとする。$Z=max(X,Y)$ とする。
(1)$Y=y$ が与えられたときの X の条件付き確率密度関数 $f_{x\cdot y}(x|y)$ を求めよ。
(2)Z の密度関数が
$f_Z(z)=2\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$
で与えられることを証明せよ。

7.1　解答

7.1.1　（１）

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$
よって $f_{x|y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)+\frac{y^2}{2})$

7.1.2　（２）

Z の確率密度関数は $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f(x,z)dx+\int_{-\infty}^{z}f(z,y)dy=2\int_{-\infty}^{z}f(x,z)dx$
ここで $\int_{-\infty}^{z}f(x,z)dx=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{z}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho z)^2)dx$
$t=\frac{x-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}=t$ とおくと、$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$
よって $\int_{-\infty}^{z}f(x,z)dx=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z}e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{1-\rho^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
$=\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$
以上より $f_z(z)=2\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$

7.2　７番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で３か 3.5。

8　8番

8番

$X_1 \cdots X_n (n \geq 2)$ は互いに独立で、それぞれ平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数である。ここで $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ は未知である。さらに
$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, T_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$
とする。
(1)$\frac{T_n}{n}$ は σ^2 の最尤推定量であること、および不偏推定量ではないことを示せ。
(2)$E[\sqrt{Y_m}]$ を求めよ。
(3)$\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}\sqrt{T_n}$ は σ の不偏推定量である事を示せ。

8.1　解答

8.1.1　(1)

$X_1 \cdots X_n$ の同時確率密度関数を $f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n)$ とおくと
$f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})$
対数を取って $\log f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$
両辺を μ と σ^2 で微分して=0 とおくと
$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$
$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$
これより $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{x}$
$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$
よって $\frac{T_n}{n}$ は σ^2 の最尤推定量である
また $\frac{T_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \overline{X_n})^2$
=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\mu - \overline{X_n}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mu - \overline{X_n})^2$
=$\sigma^2 - 2(\overline{X_n} - \mu)^2 + (\overline{X_n} - \mu)^2$
=$\sigma^2 - (\overline{X_n} - \mu)^2$
これより $E[\frac{T_n}{n}] = \sigma^2 - E[(\overline{X_n} - \mu)^2] = \sigma^2 - V[\overline{X}] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$
よって $\frac{T_n}{n}$ 不偏推定量ではない

8.1.2　(2)

$E[\sqrt{Y_m}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty \sqrt{x}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$
=$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty x^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx$
$\frac{x}{2} = t$ とおくと $E[\sqrt{Y_m}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty (2t)^{\frac{m-1}{2}}e^{-t}2dt$
= $\cdots$
=$\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\Gamma(\frac{m+1}{2})$

8.1.3 （3）

$\frac{T_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X_n})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $(n-1)$ のカイ二乗分布に従う。
よって $E[\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma}] = \int_0^\infty \sqrt{x} \frac{1}{\Gamma(\frac{m-1}{2})2^{\frac{m-1}{2}}} x^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
よって $E[\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}} \sqrt{T_n}] = \sigma$ が成立するので $\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}} \sqrt{T_n}$ は σ の不偏推定量である。

8.2 ８番の総評

11 問の中で 1 番取り組みやすい問題。難易度は 5 段階で 3。

9 ９番

９番

次の自己回帰過程モデルを考える。
$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t t = 2, 3, \cdots, T$
ただし、$\{\epsilon_t\}$ は互いに独立で共通の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従い、かつ ϵ_t は $Y_1 \cdots Y_{t-1}$ と独立である。$\theta = (c, \phi, \sigma^2)$ とおく。
(1)$Y_1 = y_1$ という条件の下での $Y_2 \cdots Y_T$ の条件付き同時確率密度関数
$f_{Y_T \cdots Y_2|Y_1}(y_T, \cdots y_2|y_1; \theta)$
を求めよ。
(2) データ $\{y_T \cdots y_1\}$ が得られた時、c, ϕ の最尤推定量 $\hat{c}, \hat{\phi}$ を求めよ。
(3)σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ を (2) で得られた $\hat{c}, \hat{\phi}$ を用いて表せ。

9.1 解答

9.1.1 （1）

$\eta_T = c + \epsilon_T$ とおく

$$\begin{cases} Y_1 = y_1 \\ Y_2 = c + \phi y_1 + \epsilon_2 = \phi y_1 + \eta_2 \\ Y_3 = c + \phi Y_2 + \epsilon_3 = \phi Y_2 + \eta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_T = c + \phi Y_{T-1} + \epsilon_T = \phi Y_{T-1} + \eta_T \end{cases}$$

このとき $\eta_2 \cdots \eta_T$ は $\{\epsilon\}_k (k = 2, \cdots, T)$ が独立なので互いに独立である。
よって $f_{\eta_2 \cdots \eta_T}(\eta_2 \cdots \eta_T) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{T-1}} \exp(-\frac{\sum_{k=2}^{T} (\eta_k - c)^2}{2\sigma^2})$

ここで

$$\begin{cases} \eta_2 = Y_2 - \phi y_1 \\ \eta_3 = Y_3 - \phi Y_2 \\ \eta_4 = Y_4 - \phi Y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_T = Y_T - \phi Y_{T-1} \end{cases}$$

また $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \eta_2}{\partial Y_T} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \eta_3}{\partial Y_T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \eta_T}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \eta_T}{\partial Y_T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \cdot & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -\phi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\phi & 1 \end{vmatrix} = 1$

これより $f_{Y_2 \cdots Y_T | Y_1 = y_1}(y_2 \cdots y_T) = | J | f_{\eta_2 \cdots \eta_T | Y_1 = y_1}(y_2 - \phi y_1, \cdots, y_T - \phi y_{T-1})$

$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T-1}{2}}} \exp(-\frac{\sum_{k=2}^{T}(y_k - \phi y_{k-1} - c)^2}{2\sigma^2})$

9.1.2 （２）

$f_{Y_2 \cdots Y_T | Y_1 = y_1} = \frac{f_{Y_1 \cdots Y_T}(y_1 \cdots y_T)}{f_{Y_1}(y_1)}$

これより $\log L(\theta) = \log f_{Y_2 \cdots Y_T | Y_1 = y_1}(y_1 \cdots y_T) + \log f_{Y_1}(y_1)$

よって $\frac{\partial}{\partial c} \log L(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{T}(y_k - \phi y_{k-1} - c) = 0$ ー（A）

$\frac{\partial}{\partial \phi} \log L(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{T} y_{k-1}(y_k - \phi y_{k-1} - c) = 0$ ー（B）

(A) と (B) を解いて $\hat{\phi} = \frac{(\sum_{k=2}^{T} y_k)(\sum_{k=2}^{T} y_{k-1}) - (T-1)(\sum_{k=2}^{T} y_k y_{k-1})}{(\sum_{k=2}^{T} y_{k-1})^2 - (T-1)(\sum_{k=2}^{T} y_{k-1}^2)}$

$\hat{c} = \frac{\sum_{k=2}^{T} y_k - \hat{\phi} \sum_{k=2}^{T} y_{k-1}}{T-1}$(上の $\hat{\phi}$ を代入する)

9.1.3 （３）

$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log L(\theta) = -\frac{(T-1)}{2\sigma^2} + \sum_{k=2}^{T} \frac{(y_k - y_{k-1}\phi - c)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$

これより $\hat{\sigma^2} = \sum_{k=2}^{T} \frac{(y_k - y_{k-1}\hat{\phi} - \hat{c})^2}{T-1}$

9.2 ９番の総評

どのように変数変換するかがなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

10　１０番

１０番

$\{X_k; k = 1, 2, \cdots, n\}$ を互いに独立な確率変数の列で平均と分散を $E[X_k] = \mu, Var(X_k) = k$ とする。$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく。T_n を未知母数 μ の推定量であるとする。
(1)T_n を μ の不偏推定量であるとする。$Var[T_n] \to 0 (n \to \infty)$ のとき、T_n は μ の一致推定量である事を示せ。
(2)$\overline{X_n}$ は μ の一致推定量とはならない場合があることを具体例を用いて示せ。
(3)w_k を定数とし $\hat{\mu} = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k$ とおく。$\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量である時、その分散 $Var[\hat{\mu}]$ が最小となるように w_k を定めよ。
(4) (3) で定めた w_k を持つ $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量であることを示せ。

10.1　解答

10.1.1　（１）

チェビシェフの不等式より
$P\{(T_n - \mu)^2 \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon} E[(T_n - \mu)^2]$
が成立する。ここで
$E[(T_n - \mu)^2] = E[(T_n - E[T_n] + E[T_n] - \mu)^2]$
$= E[(T_n - E[T_n])^2] + 2E[T_n - E[T_n]]E[E[T_n] - \mu] + (E[T_n] - \mu)^2$
$= V[T_n] + (E[T_n] - \mu)^2$
ここで T_n は μ の不偏推定量なので $E[T_n] = \mu$
また条件より $\lim_{n\to\infty} V[T_n] = 0$
これより $\lim_{n\to\infty} E[(T_n - \mu)^2] = 0$
以上よりチェビシェフの不等式から $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - \mu)^2 \geq \epsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon} E[(T_n - \mu)^2] = 0$
が成立するので $\lim_{n\to\infty} P(\mid T_n - \mu \mid < \epsilon) = 1$ となる。
以上より T_nはμ の一致推定量である。

10.1.2　（２）

$X_k \sim N(\mu, k)$ とする。この時正規分布の再生性より $\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}))$
この時 $\lim_{n\to\infty} P(\mid T_n - \mu \mid < \epsilon) = 1$ は成立しないので $\overline{X_n}$ は μ の不偏推定量ではない。

10.1.3　（３）

$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k$ より
$E[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} w_k E[X_k] = \mu \sum_{k=1}^{n} w_k = \mu$
よって $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$
また $Var[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 k (X_1 \cdots X_n$は独立なので$)$
よって $f(w_1, \cdots, w_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 k$、$g(w_1, \cdots, w_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k - 1$ とおいて、$g = 0$ の下で f を最小にする問題を考えればよい。
ラグランジュの未定乗数法を使うと、

$\frac{\frac{\partial f}{\partial a_1}}{\frac{\partial g}{\partial w_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_2}}{\frac{\partial g}{\partial w_2}} = \cdots = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_n}}{\frac{\partial g}{\partial w_n}}$
これより $\frac{2w_1}{1} = \frac{4w_2}{1} = \cdots = \frac{2nw_n}{1}$
この時 $f=0$ なので $w_1 + \frac{1}{2}w_1 + \cdots + \frac{1}{n}w_1 = 1$
よって $w_1 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$
以上より $w_k = \frac{1}{k} \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$

10.1.4 （4）

$V[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (\frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}})^2 = \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$
よって $\lim_{n\to\infty} V[\hat{\mu}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}} = 0$
よって $\hat{\mu}$ は μ の不偏推定量で $\lim_{n\to\infty} V[\hat{\mu}] = 0$ が成立するので $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量である。

10.2 １０番の総評

(2) は一致推定量である例を探す方が難しいような気がする。一致推定量についての理解がないと非常にやりにくい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

11 １１番

１１番

確率変数 $X_i (i = 1, 2, \cdots)$ は０か１の値を取り、正の定数 π_0, π_1 に対して
$P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) = \pi_0 \quad P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) = \pi_1$
とする。さらに自然数 $j = 2, 3, \cdots$ に対して以下を仮定する。
$P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 0, X_i = 1) = \pi_0, P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 1, X_i = 1) = \pi_1$
(1)$p_i = p(X_i = 1)$ とおくとき、p_{i+1} を p_i, π_0, π_1 で表せ。
(2) 任意の自然数 i に対して $p_i = q$(定数) とする。このとき $E[X_i X_{i+k}]$ は i に関係しないことを示し、$e_k = E[X_i X_{i+k}]$ とおくとき、e_0, e_1 を求めよ。また e_k を e_{k-1}, π_0, π_1, q を用いて表せ。
(3)(2) の条件の下で共分散に対して
$\lim_{k\to\infty} Cov(X_i, X_{i+k}) = 0$
が成立することを示せ。

11.1 解答

11.1.1 （1）

$p_{i+1} = P(X_{i+1} = 1) = P(X_{i+1} = 1, X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1, X_i = 1)$
$= P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) P(X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) P(X_i = 1)$
=$\pi_o (1 - p_i) + p_i \pi_1$

11.1.2 （２）

$E[X_i X_{i+k}] = P(X_i = 1, X_{i+k} = 1) = P(X_{i+k} = 1 | X_i = 1) P(X_i = 1)$
よって $\forall i, j \in N$ に対して $P(X_{i+k} = 1 | X_i = 1) = P(X_{j+k} = 1 | X_j = 1)$ が $\forall k \in N$ で成立することをいえば良い
$k = 1$ の時は自明
$k = n$ の時に成立することを仮定
$k = n+1$ の時、$P(X_{i+n+1} = 1 | X_i = 1) = P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 1 | X_i = 1) + P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 0 | X_i = 1)$
ここで $P_A^{(i)} = P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 1 | X_i = 1)$ とおくと、
$P_A^{(i)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1, X_{i+n}=1, X_i=1)}{P(X_i=1)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1, X_{i+n}=1)}{P(X_{i+n}=1)} \cdot \frac{P(X_{i+n}=1, X_i=1)}{P(X_i=1)}$
$\because$）条件より $\frac{P(X_i=1, X_{i+n}=1, X_{i+n+1}=1)}{P(X_i=1, X_{i+n}=1)} = \frac{P(X_{i+n}=1, X_{i+n+1}=1)}{P(X_{i+n}=1)} = \pi_1$ だから
よって $P_A^{(i)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1, X_{i+n}=1)}{P(X_{i+n}=1)} \cdot \frac{P(X_{i+n}=1, X_i=1)}{P(X_i=1)}$
$= P(X_{i+n+1} = 1 | X_{i+n} = 1) \cdot P(X_{i+n} = 1 | X_i = 1)$
$= P(X_{i+n+1} = 1 | X_{i+n} = 1) \cdot P(X_{j+n} = 1 | X_j = 1) = p_A^{(j)}$(帰納法の仮定より)
同様にして $P_B^{(i)} = p_B^{(j)}$
以上より $E[X_i X_{i+k}]$ は i によらない。
また $e_0 = E[X_i X_i] = q$
$e_1 = E[X_i X_{i+1}] = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1) = q\pi_1$
$e_k = P(X_{i+k} = 1, X_i = 1) = P(X_{i+k} = 1, X_{i+k-1} = 0, X_i = 1) + P(X_{i+k} = 1, X_{i+k-1} = 1, X_i = 1)$
$= P(X_{i+k} = 1 | X_{i+k-1} = 0, X_i = 1) P(X_{i+k-1} = 0, X_i = 1) + P(X_{i+k} = 1 | X_{i+k-1} = 1, X_i = 1) P(X_{i+k-1} = 1, X_i = 1)$
$= \pi_0 (q - e_{k-1}) + \pi_1 e_{k-1}$

11.1.3 （３）

(2) より $e_k = (\pi_1 - \pi_0) e_{k-1} + \pi_0 q - (A)$
また与えられた条件より $q = q\pi_1 + (1-q)\pi_0$
ここで (A) の特性方程式を考えると $\lambda = (\pi_1 - \pi_0)\lambda + \pi_0 q$
これより $\lambda = \frac{\pi_0 q}{1 - \pi_1 + \pi_0} = \frac{\pi_0 q}{\frac{1-q}{q}\pi_0 + \pi_0} = q^2$
よって $e_k - q^2 = (\pi_1 - \pi_0)(e_{k-1} - q^2), e^0 = q$
これより $e_k = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} + q^2$
よって $Cov(X_i, X_{i+k}) = E[X_i X_{i+k}] - E[X_i] E[X_{i+k}] = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} + q^2 - q^2 = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} \to 0 (k \to \infty)$

11.2 １１番の総評

(1) は簡単だが、(2) と (3) はかなり取り組みにくい。難易度は５段階で４。

全体的な総評

まず、７番と８番が取り組みやすい。その次に５、６、９に何とか手を出せるだろう。２，３，４は結構難しいので統計ができない人は非常に苦しい内容だっただろう。

参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
・G ストラング著　「線形代数とその応用」　産業図書
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房