平成１２年度　情報数理系　数理科学分野解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

n 次元列ベクトル $a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}$ とスカラー $u_1, u_2, \cdots u_{n+1}$ が
$u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n + u_{n+1}a_{n+1} = 0$
を満たすとする。$n \times n$ 行列
$A_n = (a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_{n+1}), \quad A_{n+1} = (a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n)$
の行列式を $\mid A_n \mid, \mid A_{n+1} \mid$ と書くとき
$u_n \mid A_{n+1} \mid = -u_{n+1} \mid A_n \mid$
を示せ。

1.1　予備知識

行列式の次のような性質を解答で使う。

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$ (同じ行または列があるとその行列の行列式は 0 になる。)

1.2　解答

$u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots u_na_n + u_{n+1}a_{n+1} = 0$ より
$a_{n+1} = -\frac{u_1}{u_{n+1}}a_1 - \frac{u_1}{u_{n+1}}a_2 - \cdots - \frac{u_n}{u_{n+1}}a_n$
よって $\mid A_n \mid = \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}(-\frac{u_1}{u_{n+1}}a_1 - \frac{u_2}{u_{n+1}}a_2 - \cdots - \frac{u_n}{u_{n+1}}a_n) \mid$
$= -\frac{u_1}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_1 \mid - \frac{u_2}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_2 \mid \cdots - \frac{u_1}{u_{n+1}} \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n \mid$ -（A）(予備知識 1 を使った。)
ここで同じ列を持つ行列の行列式は 0 なので
$\mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_1 \mid = \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_2 \mid = \cdots \mid a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_{n-1} \mid = 0$

よって（A）より $-u_{n+1} \mid A_n \mid= u_n \mid a_1 \cdots a_{n-1}a_n \mid$
=$u_n \mid A_{n+1} \mid$

1.3　１番の総評

行列式の性質さえ知っていれば簡単。１０問の中では一番易しい問題でしょう。難易度は５段階で１。

2　２番（解答発案者 T.K）

２番

$x > 0$ において $f(x) > 0, f'(x) < 0$ であるとき、関数
$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(\mid y \mid)dy$
について次の問に答えよ。
(1)$-u"(x) + u(x) = 2f(\mid x \mid)$ を示せ。
(2)$u(x)$ は $x > 0$ で単調減少であることを示せ。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$u(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} f(\mid y \mid)dy + \int_{x}^{\infty} e^{-(y-x)} f(\mid y \mid)dy$
$u'(x) = -e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy + e^{x} \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy$
$u"(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy - e^{-x}e^{x} f(\mid x \mid) + e^{x} \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy - f(\mid x \mid)$
=$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy + e^{x} \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy - 2f(\mid x \mid)$
よって $-u"(x) + u(x) = 2f(\mid x \mid)$ が成立する。

2.1.2　（2）

$u'(x) = e^{x} \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy - e^{-x} \int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy - e^{-x} \int_{-\infty}^{-x} e^{y} f(\mid y \mid)dy$
=$(e^{x} - e^{-x}) \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy - e^{-x} \int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy$
ここで $A = (e^{x} - e^{-x}) \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(\mid y \mid)dy$, $B = e^{-x} \int_{-x}^{x} e^{y} f(\mid y \mid)dy$ とおくと
$A < (e^{x} - e^{-x}) \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(x)dy$（$f(x)$ は $x > 0$ で単調減少なので)
=$f(x)(e^{x} - e^{-x})[-e^{-y}]_{x}^{\infty}$
=$f(x)(e^{x} - e^{-x})e^{-x}$
=$f(x)(1 - e^{-2x})$
$B > e^{-x} \int_{-x}^{x} e^{y} f(x)dy$
=$f(x)e^{-x}(e^{x} - e^{-x}) = f(x)(1 - e^{-2x})$（$f(x)$ は $x > 0$ で単調減少なので)
よって $u'(x) = A - B < f(x)(1 - e^{-2x}) - f(x)(1 - e^{-2x}) = 0$
以上より $u(x)$ は $x > 0$ で単調減少である。

2.2　総評

（１）はできるだろうが、（２）はかなり難しい。この解答は（２）において（１）を利用していない。もしかしたら（１）を利用する方法もあるかもしれない。難易度は５段階で４くらい

3　３番（解答発案者 Y.M）

３番

漸化式
$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,\ \ f_0 = 0, f_1 = 1,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$
により定まるフィボナッチの数列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ とその母関数
$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$
について次の問いに答えよ。
(1)G(x) を用いて $A = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$ と $B = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^n$ を表せ。
(2)(1) の結果を用いて G(x) を x の有理式で表せ。

3.1　解答

3.1.1　（１）

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$
=$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$
$f_0 = 0$ なので
$\frac{G(x)}{x} = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + \cdots = A$
$f_1 = 1$ より
$\frac{G(x)-x}{x^2} = f_2 + f_3 x + f_4 x^2 + \cdots = B$ ー（L）

3.1.2　（２）

$B = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} + f_n) x^n$
=$A + G(x)$
=$(1 + \frac{1}{x})G(x)$ ー (M)
(L) と (M) より
$\frac{G(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = G(x) + \frac{G(x)}{x}$
$\Leftrightarrow (\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x})G(x) = \frac{1}{x}$
よって $(1 - x - x^2)G(x) = x$
以上より $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

3.2　３番の総評

（２）で $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,\ \ f_0 = 0$ が使えるかどうかがポイントでしょう。難易度は５段階で 1.5 くらい

4　４番（解答発案者 N.Y）

４番

次の問に答えよ。
(1) 区間 $[a, b]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ がある定数Kについて
$| f'_n(x) |< K, \quad (x \in [a, b], \ \ n = 1, 2, \cdots)$
を満たすとする。任意の $x \in [a, b]$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
ならば $f_n(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で０に一様収束することを示せ。
(2) 区間 $[0, \infty)$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
を満たす関数 $f(x)$、及び、ある定数 K について
$| f_n(x) |\leq| f(x) |, \ \ | f'_n(x) |\leq K \quad (x \in [0, \infty), n = 1, 2, \cdots)$
を満たすとする。任意の $x \in [0, \infty)$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
ならば、$f_n(x)$ は区間 $[0, \infty)$ 上で０に一様収束することを示せ。

4.1　解答

4.1.1　（１）

$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ なので
$\forall x \in [a, b] \, \forall \epsilon > 0 \, \exists N(x, \epsilon) \forall n \geq N \quad | f_n(x) - 0 |< \epsilon$ ー (A) となる。
$f_n(x)$ が０に一様収束することを示すには、任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ が存在し、$n > N$ に対し任意の x で
$| f_n(x) - 0 |< \epsilon$
とできることを証明できればよい。
$\epsilon > 0$ を固定する。
$I > \frac{K(b-a)}{\epsilon/2}$ となるように I をおく。
この区間 [a,b] を I 等分し、$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_I < x_{I+1} = b$ とする。
この $x_1 \sim x_I$ は (A) より $N(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ が存在する。
$Nmax = max_{i=1,2,\cdots I} N(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ をとると、$n > Nmax$ に対して $| f_n(x_i) - 0 |< \frac{\epsilon}{2}$-(b)
とできる。ここから任意の点 x で $| f_n(x) - 0 |< \epsilon$ とできることを示す。
$x \in [a, b]$ を固定する。
x には I 等分した点の中で x より小さくその中で最も大きい点 x_j が存在する。
１区間の大きさは $I > \frac{K(b-a)}{\epsilon/2}$ より高々$(b - a)/(\frac{K(b-a)}{\epsilon/2}) = \frac{e}{2K}$ となる。
$x - x_j < \frac{e}{2K}$ である。
ここで仮定 $| f'_n(x) |< K$ より
$| f_n(x) - f_n(x_j) |< K \cdot \frac{\epsilon}{2K} = \frac{\epsilon}{2}$-(C)
よって $| f_n(x) - f_n(x_j) + f_n(x_j) |<| f_n(x) - f_n(x_j) | + | f_n(x_j) |< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon((B)、(C)$ より)
よって $| f_n(x) |< \epsilon$
これは任意の x, ϵ で言える。よって題意を示せた。

4.1.2 （２）

仮定より任意の $\epsilon > 0$ に対して $X(\epsilon)$ が存在し、$x > X$ に対し、$|\, f(x) - 0 \,| < \epsilon$ とできる。ー（A）
$f_n(x)$ が０に一様収束することを示すには、任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ が存在し、$n > N$ に対し、任意の x で $|\, f_n(x) - 0 \,| < \epsilon$ とできることを示せばよい。
$\epsilon > 0$ を固定する。
（A）より $X(\epsilon)$ が存在し、$x > X$ に対し、$|\, f(x) - 0 \,| < \epsilon$ すなわち、$x > X$ に対し、$|\, f_n(x) - 0 \,| < \epsilon$
が示せる。つまり、区間 (X, ∞) は任意のＮで（１でもよい）$n > N$ に対し、$|\, f_n(x) - 0 \,| < \epsilon$ とできる。
区間 $[0, X]$ に関しては $a = 0, b = 1$ として（１）を適用して、ある $N(e)$ で $n > N$ に対し、$|\, f_n(x) - 0 \,| < \epsilon$ とできる。
よって、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(\epsilon)$ をとると、$x \in [0, \infty)$ で一様収束させることができる。

4.2 総評

非常に難しい。（２）は（１）ができれば何とかなるが‥難易度は５段階で５。

5 ５番

５番

次の定積分の値を求めよ。
I=$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx$

5.1 解答

$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^4)^2}$ とおく。
$1 + z^4 = 0$ とおくと、$z^4 = -1 = e^{i\pi(1+2n)}$(n は整数)
よって $z = e^{\frac{\pi i}{4}(1+2n)} (n = 0, 1, 2, 3)$
このうち上半平面にあるのは $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$
z_1, z_2 は共に２位の極である。
ここで $Res_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\{(z - z_1)^2 f(z)\}$
=$\lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{4}}} \{\frac{z^2}{(z-e^{\frac{3\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{5\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{7\pi i}{4}})^2}\}'$
=$\frac{\sqrt{2}i - \sqrt{2}}{16} + \frac{3}{16\sqrt{2}}(1 - i)$
同様に $Res_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz}\{(z - z_2)^2 f(z)\}$
=$\lim_{z \to e^{\frac{3\pi i}{4}}} \{\frac{z^2}{(z-e^{\frac{\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{5\pi i}{4}})^2 (z-e^{\frac{7\pi i}{4}})^2}\}'$
=$\frac{\sqrt{2}i + \sqrt{2}}{16} - \frac{3}{16\sqrt{2}}(1 + i)$
ここで次のように積分路 C_1, C_2 を設定する。
$C_1 = [-R, R], C_2 = \{|\, z \,| = R, Imz \geq 0\}$(R は実数)
また $z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと $\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$
よって $\lim_{R\to\infty} |\int_{C_2} f(z)dz| \leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} |\frac{z^2}{(1+z^4)^2}||\, dz \,|$
$= \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} |\frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^4 e^{4i\theta} + 1)^2}| R d\theta$
$\leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{R^3}{|R^4 e^{4i\theta} + 1||R^4 e^{4i\theta} + 1|}$

$\leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{R^3}{(|R^4 e^{4i\theta}|-1)(|R^4 e^{4i\theta}|-1)}$($| \alpha + \beta | \geq | \alpha | - | \beta |$ を使った)
=$\lim_{R\to\infty} \pi \frac{R^4}{(R^4-1)^2}$ =0-(１)
さらに I=$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx$ ($\frac{x^2}{(1+x^4)^2}$ の対称性より)
よって $I = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2} f(z)dz$
$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz$ (（１）より)
=$\frac{1}{2}$・$2\pi i\{Res_{z=z_1}f(z) + Res_{z=z_2}f(z)\}$ =$\pi i\{Res_{z=z_1}f(z) + Res_{z=z_2}f(z)\}$
=$\pi i\{\frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{16} + \frac{3}{16\sqrt{2}}(1-i) + \frac{\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{16} - \frac{3}{16\sqrt{2}}(1+i)\}$
=$\pi i\{\frac{\sqrt{2}}{8}i - \frac{3i}{8\sqrt{2}}\}$
=$\pi\{\frac{3}{8\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\}$
=$\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$

5.2　５番の別解

$x^2 = t$ とおくと、$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}dt$
$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}$ とおくと $f(z)$ の上半平面における極は $z = i$ で２位の極。
$Res_{z=i}f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\frac{\sqrt{z}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i}\frac{\frac{1}{2\sqrt{z}}(z+i)^2 - 2\sqrt{z}(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{16}$
ここで積分路 $C_1 = [0, R], C_2 = Re^{i\theta}(0 \leq \theta \leq \pi), C_3 = [-R, 0]$ を設定し $C = C_1 + C_2 + C_3$ とおく。
留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=i}f(z) = \frac{2\sqrt{2}\pi(1+i)}{16}$ ー(１)
$\int_{C_1} f(z)dz$ において $z = xe^{i\pi}$ とおくと
$-\int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_1}\frac{\sqrt{x}e^{\frac{i\pi}{2}}}{(1+x^2)^2}e^{i\pi}dx = -i\int_{C_1}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx = -i\int_{C_1} f(z)dz$
これより $\int_{C_3} f(z)dz = i\int_{C_1} f(z)dz$
また $\deg((1+t^2)^2) \geq \deg(\sqrt{t}) + 2$ なのでジョルダンの補題より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)dz = 0$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz = (1+i)\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{2\sqrt{2}\pi(1+i)}{16}$ （(1) より）
よって $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{2\sqrt{2}\pi}{16}$
以上より $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$

5.3　５番の総評

基本的な複素積分の問題であるが、教科書レベルの解法（始めの方の解き方）だと計算が非常に複雑。最悪の場合１時間以上かかる。別解のような解法であれば計算量は５分の１程度になる。是非このような解法も身につけましょう。難易度は５段階で 3.5 くらい。

6　６番

６番

次の問に答えよ。

(1)f(x) を条件

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid f(x)dx < \infty$

を満たす関数とする。恒等式

$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

を証明せよ。

(2) $t > 0, -\infty < x < \infty$ について

$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

で定義される関数 $g(t,x)$ は

$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2}$

を満たすことを示せ。

(3) G(t,x)=$\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy$

で定義される関数 $G(t,x)$ は

$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}$

を満たすことを示せ。

6.1　解説

6.1.1　（1）

$y-x \leq 0$ のとき、$max(y-x,0) = 0$

$y-x \geq 0$ のとき、$max(y-x,0) = y-x$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

=$\int_{-\infty}^{x} 0 \cdot f(y)dy + \int_{x}^{\infty}(y-x)f(y)dy$

=$\int_{x}^{\infty} yf(y)dy - x\int_{x}^{\infty} f(y)dy$

よって $\frac{d}{dx}\{\int_{x}^{\infty} yf(y)dy - x\int_{x}^{\infty} f(y)dy\}$

=$-xf(x) - \int_{x}^{\infty} f(y)dy + xf(x)$

=$-\int_{x}^{\infty} f(y)dy$

$\frac{d}{dx}\{-\int_{x}^{\infty} f(y)dy\} = f(x)$

以上より $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)f(y)dy$

6.1.2　（2）

$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}(-\frac{1}{2})e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(\frac{x^2}{2t^2})$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2t}\}$ =$\frac{1}{2\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1+\frac{x^2}{t}\}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(-\frac{x}{t})$ =$-\frac{x}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ =$-\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}} - \frac{x}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}(-\frac{x}{t})$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1+\frac{x^2}{t}\}$

以上より $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

6.1.3　（３）

$\int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)dx < \infty$
$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid g(t,x)dx < \infty$
なので（１）より
（右辺）$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy = \frac{1}{2}g(t,x)$
（左辺）$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} max(y-x,0)g(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty}(y-x)g(t,y)dy$
$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy - x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
ここで $\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = \frac{\partial}{\partial t}[-\frac{t}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}]_{x}^{\infty}$
$= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{t}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}})$
$= \frac{1}{2}g(t,x) + \frac{x^2}{2t}g(t,x)$
また $0 < \epsilon < t < \eta$ の範囲内で $g(t,y)$ を考える。（ϵ は任意に小さく、η は任意に大きく取れるので）
$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\{-1 + \frac{x^2}{t}\}$
なので $\mid \frac{\partial g}{\partial t} \mid \leq e^{-Cx^2} \cdot \{\frac{C_1}{\epsilon^3} - \frac{C_2}{\epsilon^2}\}$ $(C_1, C_2, C$ はある定数)
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Cx^2} \cdot \{\frac{C_1}{\epsilon^3} - \frac{C_2}{\epsilon^2}\}dx < \infty$
よって微分積分の順序交換可能定理より
$-x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = -x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} g(t,y)dy = -x\int_{x}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,y)dy = -\frac{x}{2}\int_{x}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t,y)dy$
$= \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy - \frac{x}{2t^2}\int_{x}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
ここで $-\frac{x}{2t^2}\int_{x}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
$= \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-\frac{y^2}{2t}})'dy$
$= \frac{x}{2t}(-x\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}) - \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
$= -\frac{x^2}{2t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} - \frac{x}{2t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$
以上より $-x\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = -\frac{x^2}{2t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} = -\frac{x^2}{2t}g(t,x)$
よって（左辺）$= \frac{1}{2}g(t,x) + \frac{x^2}{2t}g(t,x) - \frac{x^2}{2t}g(t,x) = \frac{1}{2}g(t,x)$
よって $\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}$

6.2　６番の総評

（１）、（３）はかなり難しいと思う。計算も複雑。（３）において微分積分の順序交換可能定理が使えることを示すのが特に難しい。選ばない方が良いかもしれない。難易度は５段階で５。

7　７番

７番

確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ は互いに独立で
$E[Y_i] = \theta x_i, \quad Var(Y_i) = x_i^2, \; i = 1, 2, \cdots n$
である。ただし、$x_1, x_2, \cdots x_n$ は与えられた定数であり、すべての i で $x_i \neq 0$ である。θ を推定したい。以下の問に答えよ。
(1)$\sum_{i=1}^n (Y_i - \theta x_i)^2 / x_i^2$ を最小にする $\theta = \hat{\theta}$ を求めよ。
(2)$\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示せ。
(3)$\hat{\theta}$ の分散 Var($\hat{\theta}$) を求めよ
(4)$\sum_{i=1}^n a_i Y_i$ の形の不偏推定量の中で $\hat{\theta}$ が最も分散を小さくすることを示せ。

7.1　予備知識

7.1.1　ヘッセ行列について（すいません、これはこの問題には必要ありません。）

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ を C^2 関数とし、点 P=$(a_1, a_2, \cdots a_n)$ で
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$
を満たすとする。n 次対称行列
$[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)]$
(f のヘッセ行列という) の固有値が
(1) すべて正ならば $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極小
(2) すべて負ならば $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極大
(3) 正負が混合しているならば、$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ はＰで極値をとらず、(P,f(P)) がグラフの峠の点となる。

7.1.2　ラグランジュの未定乗数法について

n と k を自然数で $k < n$ とする。n 次元閉領域Ｄ上に、k+1 個の C^1 関数 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$,$\phi_1(_1, x_2, \cdots x_n) \cdots \phi_k(_1, x_2, \cdots x_n)$ が与えられているとする。$\lambda_1, \cdots \lambda_k$ を k 個のパラメータとして
$F(x_1, \cdots x_n, \lambda_1, \cdots \lambda_k) = f(x_1, x_2, \cdots x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_j(x_1 \cdots x_n)$
とおく。
条件　$\phi_j(x_1 \cdots x_n) = 0 \;\; (1 \leq j \leq k)$
のもとでの $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ の最大値、最小値を与える点、$(x_1, x_2, \cdots x_n)$ は、次の（１）〜（３）のどれかの点である。
（１）D の境界の点で、$\phi_j(x_1 \cdots x_n) = 0, (1 \leq j \leq k)$ を満たす点。
（２）D から R^k への写像
Φ：$(x_1, x_2, \cdots x_n) \to (\phi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots \phi_k(x_1 \cdots x_n))$
のヤコビ行列 $d\Phi$ の階数が k より小さくなる点
（３）$x_1, \cdots x_n, \lambda_1, \cdots \lambda_k$ を未知数とする次の連立方程式の解を与える点:
$F_{x_i} = 0 (1 \leq i \leq n), \quad \phi_j = 0 \;\; (1 \leq j \leq k)$
（１)、（２）はあまり気にしなくてもいいと思う。（３）についてしか言及していない本もある。これはあくまで必要条件であるので、求まった点で本当に最大、最小となるかについては確かめる必要がある。

7.2 解説

7.2.1 （1）番

$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\theta x_i)^2}{x_i^2}=-2\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\theta x_i}{x_i})$
$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\theta x_i}{x_i})=0$ を解くと
$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}=n\theta\Leftrightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$
ここで増減表を書くと

θ	$\cdots$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$	$\cdots$
$(\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2)$'	-	0	+
$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

表 1: 増減表

となり $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta x_i)^2/x_i^2$ を最小にする $\theta=\hat{\theta}$ は $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$

7.2.2 （2）番

$E[\hat{\theta}]=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}]=\frac{1}{n}\theta\cdot n=\theta$

7.2.3 （3）番

$V[\hat{\theta}]=V[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}]=\frac{1}{n^2x_i^2}x_i^2\cdot n=\frac{1}{n}(Y_1\cdots Y_n$は独立なので$)$

7.2.4 （4）番

$\sum_{i=1}^{n}a_iY_i$ が θ の不偏推定量であるので
$E[\sum_{i=1}^{n}a_iY_i]=\theta\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\theta$
よって $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$
また $V[\sum_{i=1}^{n}a_iY_i]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2(Y_1,Y_2,\cdots Y_n$は独立なので$)$
よって $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$ という条件の下で $\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2$ の最小値が $\frac{1}{n}$ であることを示せばよい。
ラグランジュの未定乗数法を使うと
$f(a)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-1$
$g(a)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2$ において
$\frac{f_{a_1}}{g_{a_1}}=\frac{f_{a_2}}{g_{a_2}}=\cdots=\frac{f_{a_n}}{g_{a_n}}$ より
$\frac{x_1}{2a_1x_1^2}=\frac{x_2}{2a_2x_2^2}=\cdots\frac{x_n}{2a_nx_n^2}$
よって $a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n$
$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=1$ より $a_1x_1=a_2x_2=\cdots=a_nx_n=\frac{1}{n}$
以上より $a_1=\frac{1}{nx_1},a_2=\frac{1}{nx_2},\cdots a_n=\frac{1}{nx_n}$ において最大値または最小値を取る可能性がある。
このとき $\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$

また $a_1=\frac{1}{2nx_1}, a_2=\frac{3}{2nx_1}, a_i=\frac{1}{nx_i}(3\leq i\leq n)$ とおくと、
$\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2=\frac{2n+1}{2n^2}>\frac{1}{n}$
以上より $\sum_{i=1}^n a_ix_i=1$ の下での $\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2$ の最小値は $\frac{1}{n}$ なので $\sum_{i=1}^n a_iY_i$ の形の中で $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Y_i}{x_i}$ が分散を最も小さくする推定量である。

7.3　７番の総評

（３）までは統計の知識があれば難しくはないが、（４）はラグランジュの未定乗数法を使いこなせないとちょっとやりにくい。ただ１０問の中では比較的やりやすい問題。難易度は５段階で２くらい。

8　８番（解答発案者 S.N）

８番

$N(t), t\in T=[0,\infty)$ は時刻 t までに、ある店に到着した店の数を表すとし、(1)N(0)=0,(2) 任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n, t_i\in T$ に対して、$N(t_2)-N(t_1), N(t_3)-N(t_2),\cdots N(t_n)-N(t_{n-1})$ が互いに独立、(3) 任意の $s,t\in T$ に対し、$P(N(t+s)-N(s)=x)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, x=0,1,2,\cdots$
を満たすとする。ただし、λ は正の定数、店に到着した客は、当たる確率 $p>0$ のくじを引き、当たった客の時刻 t までの総数を $N_1(t)$、外れた客の時刻 t までの総数を $N_2(t)$ とする。m,n を非負の整数として次の問に答えよ。
(1) 条件付き確率
$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)$
を求めよ。
(2) 確率
$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n)$
を求めよ。
(3)$N_1(t)$, と $N_2(t)$ が独立であることを示せ。

8.1　解説

8.1.1　（1）

$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)$ は (m+n) 人の客が時刻 t までに来たという条件の下でくじに当たった客が m 人、外れた客が n 人という確率なので
${}_{m+n}C_m p^m(1-p)^n$

8.1.2　（2）

$P(N_1(t)=m, N_2(t)=n|N(t)=m+n)=\frac{P((N_1(t)=m,N_2(t)=n)\cap(N(t)=m+n))}{P(N(t)=m+n)}=\frac{P((N_1(t)=m,N_2(t)=n))}{P(N(t)=m+n)}$
ここで条件より $P(N(t)=m+n)=P(N(t)-N(0)=m+n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}$
よって $P((N_1(t)=m, N_2(t)=n))=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}{}_{m+n}C_m p^m(1-p)^n$
$=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!}p^m(1-p)^n$

8.1.3 （３）

$\{N_1=m\}=\{N_1=m,N_2=0\}\cup\{N_1=m,N_2=1\}\cup\cdots$
=$\cup_{n=0}^{\infty}\{N_1=m,N_2=n\}$ (ただし $\{N_1=m,N_2=p\}\cup\{N_1=m,N_2=q\}=\phi(p\neq q)$)
よって $P(N_1(t)=m)=P(\cup_{n=0}^{\infty}\{N_1=m,N_2=n\})$
=$\sum_{n=0}^{\infty}P(N_1=m,N_2=n)$(確率測度の完全加法性より)
=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!}p^m q^n$(（２）より、q=1-p とした)
=$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}p^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda tq)^n}{n!}$ =$\frac{e^{(q-1)\lambda t}(\lambda t)^m p^m}{m!}$ =$\frac{e^{-p\lambda t}(\lambda t)^m p^m}{m!}$
同様に $P(N_2(t)=n)=\frac{e^{-q\lambda t}(\lambda t)^n q^n}{n!}$
よって $P(N_1(t)=m)P(N_2(t)=n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m+n}}{m!n!}p^m q^n=P(N_1(t)=m,N_2(t)=n)$
以上より $N_1(t)$ と $n_2(t)$ は独立である。

8.2 ８番の総評

（1）と（2）はそこまでではないが、（3）はかなり難しい。部分点はとれるだろうが、完答は極めて難しいだろう。難易度は５段階で４くらい。

9 ９番（解答発案者 T.K）

９番

ある寿命 $T\geq 0$ の分布関数を F(t)、密度関数 f(t) とし、その平均 μ を、分散 σ^2 をとする。その時、寿命 R の分布関数は
$G(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^t[1-F(s)]ds$
で表されるという。
次の問に答えよ。
(1)G(t) は分布関数の性質を満たすことを示せ。
(2) 平均余命 E(R) の寿命の平均 μ と分散 σ^2 で表せ。

9.1 予備知識

9.1.1 分布関数の性質について

分布関数の性質とは次のようなものである。
(1) 任意の $x\in R$ に対して、$0\leq F(x)\leq 1$ であり、かつ
$F(-\infty)=0,F(\infty)=1$
(2)F(x) は単調非減少である。$x<y\rightarrow F(x)\leq F(y)$
(3)F(x) は右側連続：$\lim_{y\rightarrow x+0}F(y)=F(x)$
ただし、この問題においては、$T\geq 0$ より証明することは少し違う。詳しくは解答

9.2　解説

9.2.1　（１）

(1)$t_1 < t_2$ とする。
F(s) は分布関数なので $1 - F(s) \leq 0$
よって $G(t_1) = \frac{1}{\mu}\int_0^{t_1}(1-F(s))ds \leq \frac{1}{\mu}\int_0^{t_2}(1-F(s))ds = G(t_2)$
よって $t_1 < t_2$ ならば $G(t_1) \leq G(t_2)$
(2)$G(\infty) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(1-F(s))(s)'ds$
=$\frac{1}{\mu}\{[(1-F(s))s]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(s)\cdot sds\}$
=$\frac{1}{\mu}\{0+\mu\}$ ー (A)
=1
(A) について
$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds$
$s > 1$ の時 $\int_t^{\infty} f(s)ds < s\int_t^{\infty} f(s)ds < \int_t^{\infty} sf(s)ds$
$t \to \infty$ とする時、$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} f(s)ds = 0, \lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} sf(s)ds = 0$（平均が存在するので）
よってはさみ打ちの原理より $\lim_{t\to\infty} s\int_t^{\infty} f(s)ds = 0$
また $G(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^0[1-F(s)]ds = 0$
(3)$\lim_{t\to x+0} G(t)$
=$\lim_{t\to x+0}\int_0^t(1-F(s))(s)'ds$
=$\lim_{t\to x+0}[(1-F(s))s]_0^t + \int_0^t f(s)sds$
=$\lim_{t\to x+0}\{(1-F(t))t + \int_0^t f(s)sds\}$
=$(1-F(x))x + \int_0^x f(s)sds$(F は右連続関数なので)
=$\int_0^x(1-F(s))(s)'ds$
=$\int_0^x(1-F(s))ds$
=G(x)
よって G は右連続関数である。

9.2.2　（２）

$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\mu}(1-F(t)) = g(t)$
よって
E[R]=$\int_0^{\infty} tg(t)dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} t(1-F(t))dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} t\{\int_0^{\infty} f(s)ds - \int_0^t f(s)ds\}dt$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_t^{\infty} tf(s)dsdt$
ここで $tf(s)$ は非負可測関数なのでフビニの定理より積分の順序を交換して
$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_0^s tf(s)dtds$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^s tdt\int_0^{\infty} f(s)ds$
=$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\frac{s^2}{2}f(s)ds$
=$\frac{1}{2\mu}(\sigma^2 + \mu^2)$

9.2.3 （２）（別解）

$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty t(1-F(t))dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(t))(\frac{1}{2}t^2)'dt$
=$\frac{1}{\mu}\{[(1-F(t))\frac{1}{2}t^2]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)\frac{1}{2}t^2dt\}$
$s>1$ とおくと $\int_t^\infty f(s)ds < s^2\int_t^\infty f(s)ds < \int_t^\infty s^2 f(s)ds$
ここで分散が存在するので、はさみ打ちの原理を使って $\lim_{t\to\infty} s^2\int_t^\infty f(s)ds = 0$
よって $\frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(t))(\frac{1}{2}t^2)'dt = \frac{1}{2\mu}\int_0^\infty f(t)t^2dt = \frac{1}{2\mu}(\sigma^2+\mu^2)$

9.3 ９番の総評

これは分布関数の性質についてちゃんと知っていないとできない。ちょっとやりにくいかも。難易度は５段階で 4.5 くらい

10 １０番

１０番

確率変数 $X_1,\cdots X_n$ は独立に、平均 λ のポアソン分布に従うとする。このとき次の問に答えよ。
(1)$T=X_1+\cdots+X_n$ は平均 $n\lambda$ のポアソン分布に従うことを示せ。
(2) ある非負定数 x を固定する。次の統計量
Y=$\begin{cases} 1 & (X_1 = x \text{ の時}) \\ 0 & (X_1 \neq x \text{ の時}) \end{cases}$
は平均 λ のポアソン分布の x における確率 $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ の不偏推定量であることを示せ。
(3)T=t が与えられたときの条件付き確率 $P(Y=1|T=t)$ を求めよ。

10.1 解説

10.1.1 （１）

X が平均 λ のポアソン分布に従う時、積率母関数 $M(\theta)$ は
$M(\theta) = E[e^{\theta x}] = \sum_{x=0}^\infty e^{\theta x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$
=$e^{-\lambda}\sum_{x=0}^\infty \frac{(e^\theta\lambda)^x}{x!}$
=$e^{-\lambda}e^{e^\theta\lambda}$
よって $X_1+X_2+\cdots X_n$ の積率母関数 $M_n(\theta)$ は
$M_n(\theta) = E[e^{\theta(X_1+X_2+\cdots X_n)}]$
=$\{E[e^{\theta X}]\}^n (X_1,X_2,\cdots X_n$は独立同分布なので$)$
=$e^{-n\lambda}e^{ne^\theta\lambda}$
よって $M_n'(\theta) = e^{-n\lambda}e^{ne^\theta\lambda}ne^\theta\lambda$
以上より $M_n'(0) = n\lambda$
以上より T は平均 $n\lambda$ のポアソン分布に従う。

10.1.2　（２）

$E[Y] = 1 \cdot P(X_1 = x) + 0 \cdot P(X_1 = 0)$
=$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
よって Y は $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ の不偏推定量。

10.1.3　（３）

$P(Y = 1|T = t) = \frac{P((Y=1)\cap(T=t))}{P(T=t)}$
P(T=t)=$e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!}$
$P((Y = 1) \cap (T = t)) = P(Y = 1) \cdot P(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = t - x)$
$= P(Y = 1) \cdot P(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = t - x)$
$X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ は平均 $(n-1)\lambda$ のポアソン分布に従うので
$P(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = t - x) = e^{-(n-1)\lambda} \frac{((n-1)\lambda)^{t-x}}{(t-x)!}$
また $P(X_1 = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
よって $P(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = t - x)P(X_1 = x) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^t (n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!}$
以上より $P(Y = 1|T = t) = \frac{e^{-n\lambda} \frac{\lambda^t (n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!}}{e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!}}$
=$\frac{\lambda^t (n-1)^{t-x}}{x!(t-x)!} \frac{t!}{(n\lambda)^t}$
=$\frac{(n-1)^{t-x}}{n^t} \frac{t!}{x!(t-x)!}$
=$\frac{(n-1)^{t-x}}{n^t} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

10.2　１０番の総評

これもポアソン分布の確率量関数及び積率母関数を知っていれば難しくはない。７番と同様にやりやすい問題でしょう。選択すべきです。難易度は５段階で２くらい。

11　全体的な総評

　１番が一番易しい。次に取り組みやすいのが３，７，１０。この４問をやるのが一番いいと思われる。５は解法を知っていれば手を付けるのもいいだろう。２，６、８、９は部分点はとれるかもしれないが、完答は極めて困難。４は部分点も取れないかもしれない。

12　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社

・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房