平成１２年度情報数理系　数理科学分野　　解答

基礎工学部情報科学科数理科学コース４年生　J.H

1　１番

１番

双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ は

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で定義される。次の問に答えよ。
(1)$\sinh(x), \cosh(x)$ を微分せよ。
(2) 関数

$$u(x) = \frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)}$$

は $x > 0$ で単調増加であることを示せ。ここに k は $k > 1$ なる定数である。
(3)a, b, c, d を $a > b > c > d > 0 \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ なる定数とする。このとき

$$A = \sinh(a)\sinh(d), \quad B = \sinh(b)\sinh(c)$$

の大小を判定し、その理由を述べよ。

1.1　解答

1.1.1　(1)

$(\sinh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(\cosh(x))' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1.1.2　(2)

$u'(x) = (\frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)})'$
$= \frac{k\cosh(kx)\sinh(x) - \sinh(kx)\cosh(x)}{\sin^2 h(x)}$
（$u'(x)$ の分子）$= k\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$= \frac{1}{4}\{k(e^{(k+1)x} - e^{(k-1)x} + e^{(-k+1)x} - e^{-(k+1)x}) - (e^{(k+1)x} + e^{(k-1)x} - e^{(-k+1)x} - e^{-(k+1)x})\}$

$=\frac{1}{2}\{(k-1)\sinh((k+1)x)-(k+1)\sinh((k-1)x)\}$

ここで g(x)=$(k-1)\sinh((k+1)x)-(k+1)\sinh((k-1)x)$ とおくと

$g'(x)=(k^2-1)\{\cosh((k+1)x)-\cosh((k-1)x)\}$

$\cos h(x)$ は $x>0$ で単調増加関数なので

$\cosh(k+1)x>\cosh(k-1)x$

よって $x>0$ で $g'(x)>0$ また $g(0)=0$

以上より $x>0$ で $g(x)>0$

よって $x>0$ で $u'(x)>0$

以上より $u(x)$ は $x>0$ で単調増加関数である。

1.1.3　(3)

$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)}$ と $\frac{\sinh(c)}{\sinh(d)}$ を考える。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ より $a=\frac{c}{d}b, c=\frac{a}{b}d$

$a>b>c>d$ なので $\frac{c}{d}>1, \frac{a}{b}>1$

(2) より $\frac{\sinh(kx)}{\sinh(x)}$ は $k>1$ の時、単調増加関数なので、$b>d$ より

$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)}>\frac{\sinh(c)}{\sinh(d)}$

よって $\sinh(a)\sinh(d)>\sinh(c)\sinh(b)$ となるので $A>B$

1.2　１番の総評

（1）は高校生でもできる問題

（2）は計算がやや複雑で難しい。

（3）はちょっと難しい。解答を読めば十分理解できるとは思いますが。（2）を使うのがポイントです。

全体的な難易度は５段階で３と判断しました

2　（2）

２番

次の問に答えよ。

（1）行列

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

(2) 任意の自然数 n について trA^n を計算せよ。ただし、trA^n は行列 A^n の対角成分の和を表す。

2.1　予備知識

　一般に対称行列は直交行列を使って対角化することができる。しかし、これは特性方程式が重解をもたないときである。なぜなら、

「対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する」（線形代数　馬場敬之　マセマ出版社１９１ページ）

からである。例えば $\lambda=1$ が 2 重解であり、この λ に対して二つの固有ベクトルが求まった時、この二つの固有ベクトルは直交していない。
よってこの行列は直交行列では対角化できない。

2.2 解答

2.2.1 (1)

$| A-tE |=\begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix}=-t^3+1+1+t+t+t=0$

$\Leftrightarrow -t^3+3t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2=0$

$\Leftrightarrow t=2,-1$

t=2 の時、

$(A-2E)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は定数)

t=-1 の時、

$(A+E)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2は定数)

以上より固有値 2 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値-1 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2.2 (2)

（1）より $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

よって $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ となるので

$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$

ここで掃き出し法によりPの逆行列を求めると

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

よって $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 3(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$

以上より

$tr(A^n) = \frac{1}{3} \cdot 3(2^n + 2(-1)^n)$

$=2^n + 2(-1)^n$

2.3 総評

教科書の例題レベルの問題。計算はやや煩雑かもしれないが、絶対にできなくてはならないと思う。

3 ３番

3番

$t \geq 0$ について $x(t)$ を常微分方程式

$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \sin t$

$x(0) = 1$

の解とする。次の問に答えよ。

(1) この方程式を解け。

(2) 上極限と下極限

$A = \overline{\lim}_{t\to\infty} x(t), \quad B = \underline{\lim}_{t\to\infty} x(t)$

を求めよ。

3.1 （1）

$\frac{dx}{dt} = -x(t)$ を解くと。

$x(t) = Ce^{-t}$(Cは定数)

ここで $x(t) = C(t)e^{-t}$ とおくと（定数変化法）

$\frac{dx}{dt} = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} = -c(t)e^{-t} + \sin t$

よって $C'(t) = e^t \sin t$

これより $C(t) = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C_2 \quad (C_2)$ は定数

以上より $x(t) = e^{-t}C(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + C_2 e^{-t}$

x(0)=1 より $-\frac{1}{2} + C_2 = 1$

$\Leftrightarrow C_2 = \frac{3}{2}$
よって $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{3}{2}e^{-t}$

3.2 （2）

$\sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})$
よって $\overline{\lim_{t\to\infty}}x(t) = \lim_{k\to\infty}\sup_{t\geq k} x(t)$
$=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}e^{-k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\underline{\lim_{t\to\infty}}x(t) = \lim_{k\to\infty}\inf_{t\geq k} x(t)$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.3 ３番の総評

(1) はただの線形一階常微分方程式
(2) は上極限と下極限の意味さえ知っていれば難しくはない。難易度は５段階で２くらい

4 ４番

４番

次の各問に答えよ。
(1)$\alpha > -3, n = 1, 2,$・・・とする。積分
$I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$
について I_nを I_{n-1} で表せ。
(2) $\alpha \geq -3, n = 1, 2,$・・・とする。積分
$F(\alpha, n) = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\log(x^2+y^2+z^2))^n dxdydz$
の収束、発散を判定し、収束する時はその値を求めよ。

4.1 （1）

$\log r = t$ とおくと、$r : 0 \to 1$ のとき $t : -\infty \to 0$
よって $I_n = \int_{-\infty}^0 (e^t)^{\alpha+2}t^n r \cdot dt$ ($\log r = t$ より $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}$)
$=\int_{-\infty}^0 (e^t)^{\alpha+3}t^n dt$
$=\int_{-\infty}^0 t^n(\frac{1}{\alpha+3}e^{(\alpha+3)t})'$
$=[\frac{1}{\alpha+3}t^n e^{(\alpha+3)t}]_{-\infty}^0 - n \cdot \int_{-\infty}^0 t^{n-1}\frac{1}{\alpha+3}e^{(\alpha+3)t}dt$
$=-\frac{n}{\alpha+3}I_{n-1}$

4.2 （2）

(1)$\alpha > -3$ の時
$x = r\sin\theta\cos\psi,\ y = r\sin\theta\sin\psi, z = r\cos\theta\ \ (0 \leq r, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \psi < 2\pi)$
と極座標変換すると $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ なので

$r^2 \leq 1$ すなわち $0 \leq r \leq 1$

またヤコビアンは

J=$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & r\cos\theta\sin\psi & r\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$=$r^2\sin\theta$

よって $F(\alpha, n) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{\alpha}(\log r^2)^n r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$

=$2^n \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi$

=2^n・2・$2\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$

ここで（1）より $I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$

=$-\frac{n}{\alpha+3}I_{n-1}$

=$-\frac{n}{\alpha+3}(-\frac{n-1}{\alpha+3}I_{n-2})$

=$\frac{n(n-1)}{(\alpha+3)^2}I_{n-2}$

=・・・

=$\frac{n!}{(\alpha+3)^{n-1}}I_1(-1)^{n-1}$

ここで $I_1 = \int_0^1 r^{\alpha+2}\log r dr = [\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\log r]_0^1 - \frac{1}{\alpha+3}\int_0^1 r^{\alpha+2}dr = -\frac{1}{(\alpha+3)^2}$

以上より $I_n = \frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}}$

よって $F(\alpha, n)$ は収束し、その値は $2^{n+2}\pi\frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}}$

(2)$\alpha = -3$ の時

$I_n = \int_0^1 r^{-1}(\log r)^n dr$

=$[\frac{1}{n+1}(\log r)^{n+1}]_0^1$

$= \begin{cases} \infty & n \text{ が奇数の時} \\ -\infty & \text{n が偶数のとき} \end{cases}$

以上（1）、（2）より

$F(\alpha, n) = \begin{cases} \infty & \alpha = -3 \text{ で } n \text{ が奇数の時} \\ -\infty & \alpha = -3 \text{ で } n \text{ が偶数のとき} \\ 2^{n+2}\pi\frac{n!(-1)^n}{(\alpha+3)^{n+1}} & \text{それ以外} \end{cases}$

4.3　総評

三次元の極座標変換さえ知っていれば難しくはないでしょう。難易度は５段階で 2.5 くらい。

5　5番

5番

平均 μ_1, 分散 σ_1^2 の正規分布に従う１群（第一群）の観測値と平均 μ_2、分散 σ_2^2 の正規分布に従う別の１群（第二群）の観測値が得られたとする。ここに $\mu_1, \mu_2(\mu_2 \geq \mu_1), \sigma_1^2, \sigma_2^2(\sigma_2 \leq \sigma_1)$ は既知である。いずれの群に所属するか不明の個体の観測値 y が新たに得られた時、その個体をいずれかの群に判別したい。
(1) 第１群と第２群への所属を判別する点を y_* とおくとき、$y \geq y_*$ であれば第２群に、$y < y_*$ であれば第１群に判別する。このときそれぞれの対応する確率密度関数が交わる小さい方の値として y_* を定めよ。
(2)$\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = \frac{1}{9}$ とするとき、y_* の値を求め、第１群に所属する個体が第２群に所属すると誤って判定される確率を評価せよ。ただし、$\sqrt{36 + 16\log 3} \fallingdotseq 7.320$ とし、標準正規分布関数
$\Phi() = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$
にういて、$\Phi(1.335) = 0.9091$ とする。

5.1　（1）

(1)$\sigma_2 < \sigma_1$ の時
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})$
これを x について解いて、小さいほうの値が y_* である。その値は

$$y_* = \frac{(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}) + \sqrt{(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1\sigma_2})^2 + 2(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

(2)$\sigma_2 = \sigma_1$ の時
$x = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$

5.2　（2）

与えられた値を代入すると
$y_* = 2.335$ となる。
よって $X \sim N(1, 1)$ とおくと、
$P(X \geq y_*) = P(\frac{X-1}{1} \geq \frac{2.335-1}{1})$
$=1 - \Phi(1.335) = 0.0909$

5.3　総評

計算は非常に複雑だが、考え方は大して難しくはない。（１）はもう少し詳しく書くべきである。（１）で計算間違いをしていないか、（２）で確認できる。難易度は５段階で 2.5 くらい

6 6番

6番

確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立で、平均 μ、分散 σ^2 を持つ同一の分布に従うものとする。X_1, X_2, X_3 について、2つの実数係数の一次結合を考え

$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$

$z = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$

と置いたとき、以下の問に答えよ。

(1)Y が μ の不偏推定量（E[Y]=μ）になるように、a_1, a_2, a_3 の満たすべき条件を求めよ。

(2)(1) の条件の下で、Yが最小の分散を持つように a_1, a_2, a_3 を決定せよ。

(3)Z^2がσ^2 の不偏推定量（$E(Z^2) = \sigma^2$）になるように、b_1, b_2, b_3 の満たすべき条件を求めよ。

(4)(2) で求めたYと（3）で求めたZの共分散は0であることを示せ。

6.1 （1）

$E[Y] = \mu(a_1 + a_2 + a_3) = \mu$ より

$a_1 + a_2 + a_3 = 1$

6.2 （2）

$V[Y] = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$

よって $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ を $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ という条件の下で最小にすればよい。

シュワルツの不等式

$(x, y)^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2$

を使う。$x = (1, 1, 1), y = (a_1, a_2, a_3)$ とおくと、

$1 = (x, y)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$

$\frac{1}{3} \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

等号が成立するのは

$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \frac{a_3}{1}$

よって $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ の時、最小となる。

6.3 （2）の別解（こっちの方が良いかも）

$V[Y] = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$

よって $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ を $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ という条件の下で最小にすればよい。

$f(a) = a_1 + a_2 + a_3 - 1, g(a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ としてラグランジュの未定乗数法を使うと

$\frac{\frac{\partial g}{\partial a_1}}{\frac{\partial f}{\partial a_1}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial a_2}}{\frac{\partial f}{\partial a_2}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial a_3}}{\frac{\partial f}{\partial a_3}}, \quad f(a) = 0$

これを解くと $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$

この時に最大または最小となる。

ここで $a_1=1, a_2=0, a_3=0$ とおくと、$\frac{1}{3}<a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$
よって $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$ の時最小となる。

6.4 （3）

$Z^2=b_1^2X_1^2+b_2^2X_2^2+b_3^2X_3^2+2b_1b_2X_1X_2+2b_1b_3X_1X_3+2b_2b_3X_2X_3$
ここで $E[X_1^2]=E[X_2^2]=E[X_3^2]=\sigma^2+\mu^2$
$E[x_1x_2]=E[x_2x_3]=E[x_3x_1]=\mu^2(X_1, X_2, X_3$ は独立なので$)$
よって $E[Z^2]=(\sigma^2+\mu^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+2\mu^2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$
$=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\sigma^2+(b_1+b_2+b_3)^2\mu^2$
よって $b_1+b_2+b_3=0, b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$ となればよい。

6.5 （4）

$Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]$
$E[YZ]=E[(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3)(b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3)]$
$=(\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3)(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{3}b_2\mu^2+\frac{1}{3}b_3\mu^2+\frac{1}{3}b_1\mu^2+\frac{1}{3}b_3\mu^2+\frac{1}{3}b_1\mu^2+\frac{1}{3}b_2\mu^2$
$=(\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3)(\sigma^2+\mu^2)+\frac{2}{3}\mu^2(b_1+b_2+b_3)$
$=0(b_1+b_2+b_3=0$ より$)$
$E[Y]E[Z]=\mu\cdot E[b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3]$
$=0(b_1+b_2+b_3=0$ より$)$
以上より $Cov(Y,Z)=0$

6.6 6番の総評

(2) は知っていないとできないし、(2) を間違えると (4) は絶対にできない。難易度は５段階で 2.5 くらい

7 全体的な総評

全体的に取り組みやすいと思われる。選択問題は統計の方がやりにくいので、微積分の方を選択する方が良い。

8 参考文献

< 微積分 >
・ 難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・ 馬場敬之 ・ 高杉豊著　「微分積分キャンパス ・ ゼミ」　マセマ出版社
・ 杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・ 寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・ 馬場敬之 ・ 高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社

< 統計 >

・ 稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・ 白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・ 馬場敬之 ・ 久池井茂著　「確率 ・ 統計キャンパス ・ ゼミ」　マセマ出版社

< 複素関数 >

・ 今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・ 坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・ 馬場敬之 ・ 高杉豊著　「複素関数キャンパス ・ ゼミ」　マセマ出版社

< 常微分方程式 >

・ 古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・ 馬場敬之 ・ 久池井茂著　「微分方程式キャンパス ・ ゼミ」　マセマ出版社

< ルベーグ積分 >

・ 伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房