平成１３年度　情報数理系　数理科学分野２ 解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

行列

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

について次の問に答えよ。

(1) 固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

(2)R^3 の部分ベクトル空間

W=$\{x \in R^3 | A^n x$ は $n \to \infty$ のとき収束する $\}$

V=$\{\lim_{n\to\infty} A^n x | x \in W\}$

を求めよ。

(3) 零ベクトルでないベクトル $x \in R^3$ に対し、$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{||A^n x||}$ を求めよ。ただし $||\ x\ ||$ はベクトル x の長さを表す。

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\mid A - tE \mid = 0$ とおくと、

$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-t & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-t \end{vmatrix} = 0$

これより $(t-1)(2t-1)(t-2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1, 2, \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = 2$ のとき $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.1.2　（2）

A は対称行列なので直交行列によって対角化できる。

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

よって

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n \\ (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n \\ (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} - \frac{2}{6}2^n & (\frac{1}{2})^n\frac{1}{3} + \frac{4}{6}2^n \end{pmatrix}$

よって $A^n x$ が $n \to \infty$ のとき収束するためには

$2^n\{\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{2}{6}x_3\} = 0$ であればよい。

よって W は $x_1 + x_2 = 2x_3$ このとき $\lim_{n\to\infty} A^n x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よってVは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる空間。

1.1.3 （3）

$y =^t Px$ とおくと

$A^n x = P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ y $= P\Lambda^n y$

よって $\| A^n x \| = \sqrt{x^T (A^n)^T A^n x}$

$=\sqrt{x^T (P\Lambda^n P^T)^T P\Lambda^n P^T x}$

$=\sqrt{x^T P\Lambda^n P^T P\Lambda^n P^T x}$

$=\sqrt{y^T \Lambda^{2n} y}$

$=\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}$

以上より $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{||A^n x||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(1)$y_3 \neq 0$ の時

$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{||A^n x||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n} y_1^2 + y_2^2 + 2^{2n} y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^{2n} y_1^2 + (\frac{1}{2})^{2n} y_2^2 + y_3^2}} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{4})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{y_3} P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$=P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(2) $y_3=0, y_2\neq 0$ の時

$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n x}{||A^n x||}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2+y_2^2+2^{2n}y_3^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2+y_2^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n y_1\\ y_2\\ 0\end{pmatrix}\overrightarrow{n\to\infty}\ \frac{1}{y_2}P\begin{pmatrix}0\\ y_2\\ 0\end{pmatrix}$

= P $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$

(3) $y_3=y_2=0(y_1\neq 0)$ の時

$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n x}{||A^n x||}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{2n}y_1^2}}P\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n y_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

1.2　１番の総評

（３）の計算はかなり複雑なため、ちょっとやりにくいかも。難易度は５段階で 3.5 くらい。

2　２番

２番

$[0,\infty)$ で定義された関数 x(t) に関する積分方程式
$x(t)+a(t)\int_0^t x(s)ds=b(t)\ \ (t\geq 0)$
を考える。ただし、$a(t), b(t)$ は実数値関数とする。
(1)y(t)=$\int_0^t x(s)ds$ とおく。y(t) のみたす微分方程式を導き、それを解いて解 x(t) を関数 a(t),b(t) を用いて表せ。
(2)a(t),b(t) は有界であり、さらに $\inf_{t\geq 0}a(t)>0$ および $\lim_{t\to\infty}b(t)=0$ を仮定する。この時
$\lim_{t\to\infty}=0$
となることを示せ。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$y(t)=\int_0^t x(s)ds$ より $\frac{dy}{dt}=x(t)$
よって与式は
$\frac{dy}{dt}+a(t)y(t)=b(t)$
積分因子として、$e^{\int_0^t a(s)ds}$をかけると
$\frac{dy}{dt}e^{\int_0^t a(s)ds}+a(t)y(t)e^{\int_0^t a(s)ds}=b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
よって $\frac{d}{dt}(ye^{\int_0^t a(s)ds})=b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
$ye^{\int_0^t a(s)ds}=\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C$(C は定数)

これより $y(t)=e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}$
よって $x(t)=\frac{dy}{dt}$
=$-a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+e^{-\int_0^t a(s)ds}b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}$
=$-a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+b(t)$

2.1.2 （2）

$\inf_{t\geq 0} a(t)>0$ より $\int_0^\infty a(t)dt=\infty$
よって $=\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{Ca(t)}{e^{\int_0^t a(s)ds}}+\frac{a(t)\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}$
$a(t)$ は有界で、$\int_0^\infty a(t)dt=\infty$ より
$\lim_{t\to\infty}\frac{Ca(t)}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
ここで $\lim_{t\to\infty}\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk<\infty$ の時
$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
$\lim_{t\to\infty}\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk=\infty$(または $-\infty$) の時
$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=\lim_{t\to\infty}\frac{b(t)e^{\int_0^k a(s)ds}}{a(t)e^{\int_0^k a(s)ds}}=\lim_{t\to\infty}\frac{b(t)}{a(t)}=0$（ロピタルの定理を使った）
以上より $\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk}{e^{\int_0^t a(s)ds}}=0$
また条件より $\lim_{t\to\infty} b(t)=0$
よって $\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{t\to\infty}-a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\{\int_0^t b(k)e^{\int_0^k a(s)ds}dk+C\}+b(t)$
=0

2.2 ２番の総評

（2）はなかなか難しい。ロピタルの定理を使う。難易度は５段階で 3.5 くらい。

3　３番（解答提案者 T.K）

３番

n を自然数とし、n × n 行列、A_n をその (i,j) 成分 $(1 \leq i, j \leq n)$ が、
i=j=n のとき　1
i=j≠ n のとき　2
$\mid i - j \mid = 1$ のとき　-1
その他のとき　1
で与えられるものとして定義する。例えば、

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき次の問に答えよ。
(1)det A_n の値を求めよ。
(2)A_3 の逆行列を求めよ。
(3)n を任意の自然数とするとき、A_n の逆行列を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（1）

(n-1) 行に n 行をたすと

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

n 列について余因子展開すると

$$\det A_n = 1 \times (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix} = \det A_{n-1}$$

これを繰り返していくと
$\det A_n = \det A_{n-1} = \cdots = detA_2 = 1$

3.1.2 （2）

吐き出し法により、逆行列を求めると
$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.1.3 （3）

$A_n^{-1} = \mid b_{ij} \mid = \min(i, j) \;\; 1 \leq i, j \leq n$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & n \end{pmatrix}$
と仮定する。A_2^{-1} では満足する。
n 行に n+1 行を足すには (n+1) × (n+1) 行列
B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$
を左からかければよく、n 列に n+1 列を足すには (n+1) × (n+1) 行列
C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}$
を右からかければよい。この時

$$BA_{n+1}C=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0\\-1&2&-1&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0\\0&-1&2&-1&0&\cdot\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdot&\cdot&\cdot&-1&1&0\\0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_n&0\\0&1\end{pmatrix}=A'_n$$ となる。

ここで $A_n'^{-1}=\begin{pmatrix}A_n&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_n^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}$

よって $BA_{n+1}C=A'_n$ より

$A_{n+1}=B^{-1}A'_nC^{-1}$

よって $A_{n+1}^{-1}=CA_n'^{-1}B$

$$=C\begin{pmatrix}1&1&1&\cdot\cdot&\cdot\cdot&1&0\\1&2&2&2&\cdot\cdot&2&0\\1&2&3&3&\cdot\cdot&3&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&n-1&\cdot\\1&2&\cdot&\cdot&n-1&n&0\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{pmatrix}B=C\begin{pmatrix}1&1&1&\cdot\cdot&\cdot\cdot&1&1\\1&2&2&2&\cdot\cdot&2&2\\1&2&3&3&\cdot\cdot&3&3\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&n-1&\cdot\\1&2&\cdot&\cdot&n-1&n&n\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdot\cdot&\cdot\cdot&1&1\\1&2&2&2&\cdot\cdot&2&2\\1&2&3&3&\cdot\cdot&3&3\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&n-1&\cdot\\1&2&\cdot&\cdot&n-1&n&n\\1&2&\cdot&\cdot&\cdot&n&n+1\end{pmatrix}$$

以上より n+1 の時が言えた。

3.2　３番の総評

（３）はかなり難しい。難易度は５段階で５。

4　4番

4番

関数 f_n を
$f_n(x) = \frac{1}{2}\{\tanh(nx)+1\}$,　ただし、$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
で定義する。このとき、次の問に答えよ。
(1) 次を示せ。
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2} & x=0 \text{ のとき} \\ 0 & x<0 \text{ のとき} \end{cases}$
(2)$x \neq 0$ に対して
$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$
となることを示せ。
(3)$\phi : R \to R$ を微分可能で、$\mid \phi'(x) \mid \geq M(>0)$ が任意の x に対して成立しているような関数とする。このとき
$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_n'(x) dx = \phi(0)$
を示せ。

4.1　解答

4.1.1　（1）

$x>0$ の時
$\lim_{n\to\infty} \tanh(nx) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$
=$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-2nx}}{1+e^{-2nx}}$ =1($\lim_{n\to\infty} e^{-2nx} = 0$) より
x=0 の時
$\lim_{n\to\infty} e^0 = 1$ なので
$f_n(0) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$
$x<0$ の時
$\lim_{n\to\infty} \tanh(nx) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$
=$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2nx}-1}{e^{2nx}+1}$
=-1(($\lim_{n\to\infty} e^{-2nx} = 0$) より)
よって $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2} & x=0 \text{ のとき} \\ 0 & x<0 \text{ のとき} \end{cases}$

4.1.2　（2）

$f_n'(x) = \frac{1}{2}\frac{n(e^{nx}+e^{-nx})(e^{nx}+e^{-nx})-n(e^{nx}-e^{-nx})(e^{nx}-e^{-nx})}{(e^{nx}+e^{-nx})^2}$
=$\frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2}$
$x>0$ の時、$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \lim_{n\to\infty} e^{2nx} = \infty$ より、ロピタルの定理を使って
$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2xe^{2nx}-2xe^{-2nx}} = 0$

$x<0$ の時も同様にして $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{4}{e^{2nx}+e^{-2nx}+2}=0$
以上より $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0$

4.1.3 （３）

$\forall a>0$ に対して
$\int_a^\infty\mid\phi(x)f_n'(x)\mid dx\le\int_a^\infty(Mx+\mid\phi(0)\mid)\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx(\frac{2n}{(e^{nx}+e^{-nx})^2}\le\frac{2n}{e^{2nx}}$ を使った)
=$\int_a^\infty Mx\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx+\int_a^\infty\mid\phi(0)\mid\times\frac{2n}{e^{2nx}}dx$
=$[-e^{-2nx}Mx]_a^\infty+(M+2n\mid\phi(0)\mid)\int_a^\infty e^{-2nx}dx$-(A)
=$e^{-2na}Ma+(M+2n\mid\phi(0)\mid)\times\frac{1}{2n}\times\frac{1}{e^{2na}}\to 0\ (n\to\infty)$
同様にして $\int_{-\infty}^{-a}\mid\phi(x)f_n'(x)\mid dx\to 0(n\to\infty)$-(B)
ここで $\phi(x)$ は微分可能なので連続関数である。よって $\forall\epsilon>0$
$\phi(0)-\epsilon\le\phi(x)\le\phi(0)+\epsilon$($x$ が十分に０に近い時)
a を十分小さく取ると
$\int_{-a}^a(\phi(0)-\epsilon)f_n'(x)dx\le\int_{-a}^a\phi(x)f_n'(x)dx\le\int_{-a}^a(\phi(0)+\epsilon)f_n'(x)dx$
ここで $\int_{-a}^a(\phi(0)-\epsilon)f_n'(x)dx=(\phi(0)-\epsilon)\int_{-a}^a f_n'(x)dx$
=$(\phi(0)-\epsilon)(f_n(a)-f_n(-a))\to(\phi(0)-\epsilon)((1)$ より $n\to\infty$ の時)
同様にして $\int_{-a}^a(\phi(0)+\epsilon)f_n'(x)dx\to\phi(0)+\epsilon((1)$ より $n\to\infty$ の時)
よって $(\phi(0)-\epsilon)\le\int_{-a}^a\phi(x)f_n'(x)dx\le(\phi(0)+\epsilon)$-(C)
以上より (A)、(B)、(C) から $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty\phi(x)f_n'(x)dx=\phi(0)$ が成立する。

4.2 ４番の総評

（３）がきわめて取り組みにくい。（１）と（２）で部分点は取れるが。難易度は５段階で４。

5 ５番

５番

複素関数
$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$
について次の問に答えよ。
(1)f(z) は円環領域 $D:1<\mid z-2\mid<4$ において正則である。f(z) をＤにおいて
$f(z)=\sum_{m=1}^\infty\frac{a_{-m}}{(z-2)^m}+\sum_{n=0}^\infty a_n(z-2)^n$
の形にローラン展開したときの a_{-m},a_n を求めよ。
(2)C は複素平面上の円 $\mid z\mid=3$ で向きが反時計周りのものとする。積分
$I=\int_C f(z)dz$
の値を求めよ。

5.1　解答

5.1.1　（1）

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(z+2)^2}$
ここで $1<\mid z-2\mid<4$ のとき
$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-(2-z)}=\frac{1}{2-z}\frac{1}{\frac{1}{2-z}-1}$
=$\frac{-1}{2-z}\frac{1}{1-\frac{1}{2-z}}$
$1<\mid z-2\mid$ より $\mid\frac{1}{2-z}\mid<1$ なので
$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2-z}(1+(\frac{1}{2-z})+(\frac{1}{2-z})^2+(\frac{1}{2-z})^3+\cdots)$
=$\frac{-1}{2-z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2-z})^n$
=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(2-z)^{n+1}}$
=$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}$
また $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4(1+\frac{z-2}{4})}$
=$\frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{z-2}{4})}$
$\mid z-2\mid<4$ より $\mid\frac{z-2}{4}\mid<1$
よって $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}(1+(-\frac{z-2}{4})+(-\frac{z-2}{4})^2+\cdots)$
$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z-2}{4})^n$
=$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n(z-2)^n$ ー（A）
（A）の両辺を z で微分して
$\frac{-1}{(z+2)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n n(z-2)^{n-1}$ =$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)(z-2)^n$
以上より $f(z)=\frac{1}{9}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}-\frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n(z-2)^n+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)(z-2)^n$
=$\frac{1}{9}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-2)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}\{-\frac{1}{36}(\frac{-1}{4})^n+\frac{1}{12}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)\}(z-2)^n$
以上より $a_{-m}=\frac{1}{9}(-1)^{m+1}$
$a_n=\{-\frac{1}{36}(\frac{-1}{4})^n+\frac{1}{12}(\frac{-1}{4})^{n+1}(n+1)\}$

5.1.2　（2）

C_1 を $\mid z-1\mid=0.5, C_2$を $\mid z+2\mid=0.5$ とおくと、$f(z)$ はCとその内部（ただし C_1,C_2 の内部をのぞく）で正則なので
コーシーの積分定理より
$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$
ここで $\int_{C_1}f(z)dz=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+2)^2}}{z-1}dz$,$f_1(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$ とおくと、$f_1(z)$ は C_1 とその内部で正則なので
$\int_{C_1}f(z)dz=2\pi i f_1(1)=\frac{2\pi i}{9}$
同様にして $\int_{C_2}f(z)dz=\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z-1}}{(z+2)^2}dz$
$f_2(z)=\frac{1}{z-1}$ とおくと、$f_2(z)$ は C_2 とその内部で正則なのでグルサの定理より
$\int_{C_2}\frac{f_2(z)}{(z+2)^2}=\frac{2\pi i}{1!}f_2'(-2)$
=$2\pi i\frac{-1}{(-2-1)^2}$
=$-\frac{2\pi i}{9}$
よって $\int_C f(z)dz=\frac{2\pi i}{9}-\frac{2\pi i}{9}=0$
以上より $I=0$

5.2　５番の総評

共に複素積分の基本的な問題ではあるが、（１）は $\frac{1}{(z+2)^2}$ のローラン展開がなかなか難しいので取り組みやすいとは言えない。難易度は５段階で３。

6　６番

６番

３階常微分方程式に関する初期値問題

$$\begin{cases} u^{(3)} - 7u' + 6u = 0 (0 < x < \infty) \\ u(0) = u'(0) = 0, u"(0) = 1 \end{cases}$$

の解 u=u(x) を求め、$x > 0$ の時 $u(x) > 0$ を示せ。

6.1　解答

特性方程式を立てると、
$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$
よって $\lambda = 1, 2, -3$
よって u(x) の一般解は $u(x) = C_1e^x + c_2e^{2x} + C_3e^{-3x}$ $(C_1, C_2, C_3$は定数$)$
ここで $u'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 3C_3e^{-3x}$
$u"(x) = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{-3x}$
であり初期条件を代入すると

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{1}{5} \\ C_3 = \frac{1}{20} \end{cases}$$

よって $u(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{1}{20}e^{-3x}$
ここで $u'(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$x > 0$ において $e^{2x} > e^x$ より
$u'(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$> \frac{3}{20}e^x - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$x > 0$ において $e^x > e^{-3x}$ より
$u'(x) > \frac{3}{20}e^x - \frac{3}{20}e^{-3x}$
$> \frac{3}{20}e^{-3x} - \frac{3}{20}e^{-3x} = 0$
よって $x > 0$ において $u'(x) > 0$

また $u(0)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=0$
以上より $x>0$ の時 $u(x)>0$

6.2　６番の総評

極めて取り組みやすい。１０問の中では１番簡単である。選択すべき。難易度は５段階で１。

7　７番

７番

区間 [0,1] からランダムに１点を取りその点をＸとする。次に、区間 [0,X] からランダムに１点を取りその点をＹとし、区間 [X,1] からランダムに１点を取りその点を Z とする。そのとき次の問に答えよ。
(1)X=x を与えた時、Y,Z の条件付き同時密度を求めよ。
(2)(X,Y,Z) の同時密度を求めよ。
(3)Y,Z の同時密度を求めよ。
(4)Y,Z の平均、分散、共分散、相関係数を求めよ。

7.1　解説

7.1.1　（１）

X=x を与えた時、Y,Z は独立になる。よって
$f_{YZ|X}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-x}$ $(x\neq 0,1$ の時)

7.1.2　（２）

$f_{YZ|X}=\frac{f_{XYZ}(x,y,z)}{f_X(x)}$
$f_X(x)=1$ $(0\leq x\leq 1)$ なので
$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{1}{x(1-x)}$ $(0\leq y\leq x\leq z\leq 1)$

7.1.3　（３）

$f_{YZ}(y,z)=\int_y^z\frac{dx}{x(1-x)}$
$=\int_y^z(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x})dx$
$=[\log\mid x\mid-\log\mid 1-x\mid]_y^z$
=log $\mid\frac{1-y}{y}\mid+\log\mid\frac{z}{1-z}\mid$

7.1.4 （4）

$E[Y]=\int_0^1\{\int_x^1\{\int_0^x \frac{y}{x(1-x)}dy\}dz\}dx$
=$\int_0^1\{\int_x^1 \frac{x}{2(1-x)}dzdx$
=$\int_0^1 \frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$
$E[Y^2]=\int_0^1\{\int_x^1\{\int_0^x \frac{y^2}{x(1-x)}dy\}dz\}dx=\frac{1}{9}$
よって $V[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$
以下同様にして $E[Z]=\frac{3}{4},\ E[Z^2]=\frac{11}{18},\ V[Z]=\frac{7}{144}, E[YZ]=\frac{5}{24}$
$Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]=\frac{5}{24}-\frac{3}{16}=\frac{1}{48}$
$\rho=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{V[Y]}\sqrt{V[Z]}}=\frac{3}{7}$

7.2 ７番の総評

少しやりにくい問題。難易度は５段階で 3.5 くらい。

8 ８番

８番

ある非負の連続な１次元確率変数 T の分布関数を F(t), 密度関数を f(t) とする。また、T の期待値は $E[T]<\infty$ とする。次の問に答えよ。
(1)$\lim_{t\to 0} tF(t)=\lim_{t\to\infty} t(1-F(t))=0$ を示せ。
(2)$\int_0^\infty(1-F(t))dt=E[T]$ を示せ。
(3)T を寿命と見るとき、条件付き期待値 $E[T-t|T>t]$ は ある時点 $t(\geq 0)$ での平均余命の関数として知られている。ここではその関数を $R(t)=E[T-t|T>t]$ とおく。このとき
$1-F(t)=\frac{R(0)}{R(t)}\exp\{-\int_0^t \frac{ds}{R(s)}\}$
を示せ。

8.1 解答

8.1.1 （1）

$\lim_{t\to 0} tF(t)=0\cdot 0=0$ (分布関数の性質より $\lim_{t\to 0} F(t)=0$ なので)
$t(1-F(t))=t\int_t^\infty f(s)ds$
ここで $t>1$ のとき
$\int_t^\infty f(s)ds<t\int_t^\infty f(s)ds<\int_t^\infty sf(s)ds$
$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty f(s)ds=0$
$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty sf(s)ds=0$ (平均が存在するので)
よってはさみうちの原理より $\lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty f(s)ds=0$
以上より $\lim_{t\to\infty} t(1-F(t))=0$

8.1.2　（２）

$\int_0^\infty (1-F(t))dt = \int_0^\infty (1-F(t))(t)'dt$
=$[(1-F(t))t]_0^\infty + \int_0^\infty tf(t)dt$
=$\lim_{t\to\infty} t(1-F(t)) + E[T]$
=E[T] ((1) より)

8.1.3　（３）

$P(T \leq x|T>t) = 1 - P(T>x|T>t)$
=$1-\frac{P(T>x)}{P(T>t)}$
=$1-\frac{1-F(x)}{1-F(t)}$
=$\frac{F(x)-F(t)}{1-F(t)}$
よって $T>t$ における T の条件付き密度関数 $f(x|t)$ は
$f(x|t) = \frac{d}{dx}P(T \leq x|T>t) = \frac{f(x)}{1-F(t)}$
よって $R(t) = E[T-t|T>t]$
$= E[T|T>t] - E[t|T>t]$
=$\int_t^\infty \frac{sf(s)}{1-F(t)}ds - t$
ここで常微分方程式
$y' = -\frac{1}{R(t)}y$
を解くと $y = C\exp(-\int_0^t \frac{ds}{R(s)})$(C は定数)
よって $y = \int_\infty^t (1-F(s))ds$ が微分方程式 $y' = -\frac{1}{R(t)}y$ の解である場合、解の一意性より
$y = \int_\infty^t (1-F(s))ds = C\exp(-\int_0^t \frac{ds}{R(s)})$ ー（０）となる。
両辺を微分して、$C = -R(0)$ を言えば良い。
以上より $y = \int_\infty^t (1-F(s))ds$ が微分方程式 $y' = -\frac{1}{R(t)}y$ の解であることを示す。
$y = \int_\infty^t (1-F(s))ds$ より $y' = 1-F(t)$ ー（１）
$R(t) = \int_t^\infty \frac{sf(s)}{1-F(t)}ds - t$ ー（２）より
$-R(t)(1-F(t)) = t(1-F(t)) - \int_t^\infty sf(s)ds$
よって $t(1-F(t)) = \int_t^\infty sf(s)ds - R(t)(1-F(t))$ ー（A）
また $\int_\infty^t (1-F(s))ds = [s(1-F(s))]_\infty^t - \int_t^\infty f(s)sds$
=$t(1-F(t)) - \int_t^\infty f(s)sds$
よって $t(1-F(t)) = \int_t^\infty f(s)sds + \int_\infty^t (1-F(s))ds$ ー（B）
(A)、(B) より $-R(t)(1-F(t)) = \int_\infty^t (1-F(s))ds = y$
以上より $-\frac{1}{R(t)}y = 1-F(t) = y'$（(１）より）
ここで（０）において t=0 とすることによって $C = -E[T]$ をえる。(２番より）
また $R(0) = \int_0^\infty sf(s)ds = E[T]$（(２）より）
よって $C = -R(0)$
以上より題意を示せた。

8.2　８番の総評

（３）はかなり難しい。統計以外のところで悩みそう。難易度は５段階で４。

9　９番

９番

次のデータは、ある母集団から無作為抽出された 350 の標本が４つのグループに分類されたものとする。
(121,120,79,30)
これらの比率は通常
(0.4,0.3,0.2,0.1)
となることが分かっている。このとき、データがこの分布に適合しているかどうかの検定を有意水準 0.05 で行え。
必要ならば $\chi^2_{3,0.05} = 7.8$ を使ってもよい。

9.1　解答

$p = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$,
$\phi = (\frac{121}{350}, \frac{120}{350}, \frac{79}{350}, \frac{30}{350})$
$n_1 = 121, n_2 = 120, n_3 = 79, n_4 = 30$ とおく。
帰無仮説：$H_0 : p = \phi$ 対立仮説：$H_1 : p > \phi$ 有意水準：$\alpha = 0.05$ として検定を行う。
検定統計量 $T = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ は自由度 3 の χ^2 分布に従う。
$T = \frac{(121-140)^2}{140} + \frac{(120-105)^2}{105} + \frac{(79-70)^2}{70} + \frac{(30-35)^2}{35}$
=$\frac{361}{140} + \frac{225}{105} + \frac{81}{70} + \frac{25}{35}$
=$\frac{923}{140} = 6.592 < 7.8 = \chi^2_{3,0.05}$
よって棄却域には入らないので帰無仮説は棄却されない。

9.2　９番の総評

適合度検定について知っていれば極めて簡単な問題であるが、知らないと手も足も出ない問題であろう。難易度は５段階で 1.5。

10　１０番

１０番

U_1, U_2 を互いに独立で区間 (0,1) の一様分布に従う確率変数とする。$\alpha, \beta > 0$ に対し、$Y_1 = U_1^{\frac{1}{\alpha}}, Y_2 = U_2^{\frac{1}{\beta}}$ とおく。
さらに
$X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2},\ Z = Y_1 + Y_2$
とおく。
(1)(X,Z) の同時確率密度関数を求めよ。
(2)$Z < 1$ という条件の下でのＸの条件付き分布を求めよ。

10.1　解答

10.1.1　（1）

U_1の $p.d.f$ を $f(x)$、分布関数を F(x) とおくと、
$p(Y_1 \leq x) = P(U_1^{\frac{1}{\alpha}} \leq x)$
=$P(U_1 \leq x^{\alpha})$
=$F(x^{\alpha})$
よって Y_1 の p.d.f を $g(x)$ とおくと、
g(y)=$\frac{dF(x^{\alpha})}{dx} = f(x^{\alpha})\alpha x^{\alpha-1}$
=)$\alpha x^{\alpha-1}$($f(x^{\alpha}) = 1$ なので)
同様に Y_2の $p.d.f$ を f(z) とおくと、
$f(z) = \frac{dF(z^{\beta})}{dz} = \beta z^{\beta-1}$
ここで $X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{Y_1}{Z}$ より $Y_1 = ZX, Y_2 = Z(1-X)$
よって $\mid J \mid = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X} & \frac{\partial Y_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X} & \frac{\partial Y_2}{\partial Z} \end{vmatrix}$
=$\begin{vmatrix} Z & X \\ -Z & 1-X \end{vmatrix}$
$= Z(1-X) + ZX = Z$
よって $f_{X,Z}(x,z) = zf_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$= zf_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$
$= z \cdot \alpha(zx)^{\alpha-1} \cdot \beta(z(1-x))^{\beta-1}$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$

10.1.2　（2）

$X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Z = Y_1 + Y_2$ より
$0 < X < 1, 0 < Z < 2$
よって $f_Z(z) = \int_0^1 \alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
=$\alpha\beta z^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)$ (B はガンマ関数)
$F(z) = \alpha\beta B(\alpha,\beta)\int_0^z z_1^{\alpha+\beta-1}dz_1$
=$\alpha\beta B(\alpha,\beta)\frac{1}{\alpha+\beta}[z_1^{\alpha+\beta}]_0^z$
=$\alpha\beta B(\alpha,\beta)\frac{1}{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}$
また $P(X \leq x, Z \leq z) = F(x,z) = \alpha\beta\int_0^z z_1^{\alpha+\beta-1}dz_1\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx$
=$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1$
よって条件付き分布は $p(X \leq x|Z < 1) = \frac{P(X \leq x, Z \leq 1)}{P(Z \leq 1)}$
$= \frac{F(x,1)}{F(1)}$
=$\frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1}{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)}$
=$\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\beta-1}dx_1$

10.2　１０番の総評

類題をやったことがあればできるだろう。ただ、難度はかなり高い。難易度は５段階で 3.5 くらい。

11　全体的な総評

まず、６番は絶対にやるべき。そして１，２，５，９から３問選択するのがよいと思われる。統計が得意な人は８，１０にも十分取り組めるだろう。３，４，７は取り組めそうに見えるが、難しいのでやらない方がよい。

12　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房