# 平成１3年度　情報数理系　数理科学分野１ 解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

# 1　１番

１番

f(x,y) は二変数 x,y の関数で、２階までの偏導関数がすべて連続であるとする。次の問に答えよ。
(1) 変数変換 $x = e^{\nu}\cos\theta, y = e^{\nu}\sin\theta$ を通じて f を $(\nu, \theta)$ の関数と見なすとき
$(x^2 + y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$
を示せ。
(2) さらに $e^{\nu} = r$ とおくことによって、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を変数 $r, \theta$ およびそれらによる偏導関数のみを用いて表せ。

## 1.1　解答

### 1.1.1　（1）

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$
よって $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v})$
$= \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
=$(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial y}{\partial v})\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial v})\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
=$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + (\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\frac{\partial y}{\partial v})^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$
同様にして $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + (\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\frac{\partial y}{\partial \theta})^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$
ここで $\frac{\partial x}{\partial v} = x, \frac{\partial y}{\partial v} = y, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -y, \frac{\partial y}{\partial \theta} = x, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = x, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = y, \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -x, \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -y$
以上より $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2 + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$
=$(x^2 + y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$

### 1.1.2　（2）

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より
$x^2 + y^2 = r^2$, よって $r = \sqrt{x^2 + y^2}(r = e^v > 0)$ より
また $\tan\theta = \frac{y}{x}$ より $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$
また $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$
同様にして $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$
$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$
$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$
よって $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial x})^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$
同様にして
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial \theta}{\partial y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\frac{\partial \theta}{\partial y})^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$
以上より
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

=$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}(\frac{\partial r}{\partial x})(\frac{\partial\theta}{\partial x})+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}(\frac{\partial r}{\partial y})(\frac{\partial\theta}{\partial y})+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial y})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$
=$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$

### 1.2　１番の総評

連鎖律の問題。計算は結構複雑だが、これくらいはできなくてはならないでしょう。ちなみにこういった連鎖律の問題がどれくらいできるかによって、微積分がどれくらいできるかが判断できるそうです。難易度は５段階で３。

## 2　２番

2 番

行列
$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
について次の問に答えよ。
(1)A=LR を満たす下三角行列
L= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix}$
と上三角行列
R= $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & r_4 & r_5 \\ 0 & 0 & r_6 \end{pmatrix}$
を求めよ。
(2)B=RL とおくとき、行列Ａと行列Ｂの固有値はすべて一致することを示せ。

### 2.1　解説

#### 2.1.1　（1）

$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$E_1A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$E_2E_1A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{5}{8}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\-5&5&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&\frac{5}{8}&\frac{31}{8}\end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}$ とおくと、

$E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&\frac{5}{8}&\frac{31}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}$

A=$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{5}{8}&1&0\\-\frac{5}{8}&\frac{5}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix} = LR$

### 2.1.2 （２）

B=RL=$\begin{pmatrix}8&-7&3\\0&\frac{3}{8}&\frac{9}{8}\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{5}{8}&1&0\\-\frac{5}{8}&\frac{5}{3}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{4}&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2\end{pmatrix}$

よって

$\mid A-tE \mid = \begin{vmatrix}\frac{7}{4}&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2\end{vmatrix} = -t^3+6t^2-11t+6=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)(t-3)=0$

$\Leftrightarrow t=1,2,3$

$\mid B-tE \mid = \begin{vmatrix}\frac{7}{4}-t&-2&3\\-\frac{15}{32}&\frac{9}{4}-t&\frac{9}{8}\\-\frac{10}{8}&\frac{10}{3}&2-t\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow -t^3+6t^2-11t+6=0$

$\Leftrightarrow t=1,2,3$

よってＡとＢの固有値は一致する。

### 2.1.3 （２）の別解

行列 A,B の固有方程式が一致することを示す。

$\mid A-\lambda I \mid = \mid LR-\lambda I \mid$

$= \mid LR-\lambda R^{-1}R \mid$

$= \mid R(L-\lambda R^{-1}) \mid$

$= \mid R \mid\mid (L-\lambda R^{-1}) \mid$

$\mid B-\lambda I \mid = \mid RL-\lambda I \mid$

$= \mid RL-\lambda R^{-1}R \mid$

$= \mid R(L-\lambda R^{-1}) \mid$

$= \mid R \mid\mid (L-\lambda R^{-1}) \mid$

よって $\mid A-\lambda I \mid = \mid B-\lambda I \mid$ より二つの行列の固有方程式は一致する。

### 2.2　２番の総評

LU 分解についての知識があれば（１）がかなり解きやすくなる。もちろん LU 分解を知らなくても解ける。全体として易しめの問題。難易度は５段階で１。

## 3　３番

3 番

u=u(t) に関する常微分方程式
$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+3t\frac{du}{dt}+u=0\quad(t>0)$
の一般解を $t=e^s$ とおくことで求めよ。

### 3.1　解答

$t=e^s$ より $\frac{dt}{ds}=e^s=t$ また $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}$
ここで $\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}$
$=\frac{du}{ds}\frac{1}{t}$
$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{t}\frac{du}{ds})$
$=\frac{-1}{t^2}\frac{du}{ds}+\frac{1}{t^2}\frac{d^2u}{ds^2}$
以上より（与式）$=-\frac{du}{ds}+\frac{d^2u}{ds^2}+3\frac{du}{ds}+u=0$
$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{ds^2}+2\frac{du}{ds}+u=0$
特性方程式を立てると
$\lambda^2+2\lambda+1=0$
$\Leftrightarrow \lambda=-1$
よって $u(s)=C_1e^{-s}+C_2se^{-s}(C_1,C_2$は定数)
$s=\log t$ より
$u(t)=C_1e^{-\log t}+C_2\log te^{-\log t}$
$=\frac{C_1}{t}+\frac{C_2}{t}\log t$

### 3.2　３番の総評

かなり取り組みやすい。選択すべき。難易度は５段階で１。

# 4　４番

4 番

以下の問いに答えよ。（１）積分値
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
を用いて
$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$
の値を求めよ。ただし $a > 0$ とする。
(2)$0 < a < b$ に対して以下の値を求めよ。
$\int_a^b e^{-x^2y}dy$
(3)$0 < a < b$ に対して以下の値を求めよ。
$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$

## 4.1　解答

### 4.1.1　（１）

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ において $x = \sqrt{a}y$ とおくと
$\frac{dx}{dy} = \sqrt{a}$　また $x : 0 \to \infty$ のとき $y : 0 \to \infty$
よって $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-ay^2}\sqrt{a}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
よって $\int_0^\infty e^{-ay^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
y を x で置き換えて $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

### 4.1.2　（２）

$\int_a^b e^{-x^2y}dy = [-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y}]_a^b$
$=\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$

### 4.1.3　（３）

（２）より
$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx = \int_0^\infty \{\int_a^b e^{-x^2y}dy\}dx$
ここで $e^{-x^2y}$ は非負可測なのでフビニの定理より、
$\int_0^\infty \{\int_a^b e^{-x^2y}dy\}dx = \int_0^\infty e^{-x^2y}dx \int_a^b dy$
$=\frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{\frac{\pi}{y}}dy$
$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}[2y^{\frac{1}{2}}]_a^b$
$=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

## 4.2　５番の総評

誘導に乗れば極めて易しい。選択すべき。難易度は５段階で 1.5 くらい。

# 5　５番

5 番

X は自然数上に値をとる確率変数で
$P(X=x+1)=\frac{\theta x}{x+1}P(X=x),\quad x=1,2,3\cdots$
を満たすものとする。ここで、$\theta$ は $0<\theta<1$ を満たす定数である。このときに次の問いに答えよ。
(1)c=P(X=1) とおくとき、確率関数 P(X=x) を $x$ と $\theta$ と c を用いて表せ。
(2)c を $\theta$ で表し、確率関数 P(X=x) を $x$ と$\theta$ を用いて表せ。
(3)$X_1,X_2,\cdots X_n$ を X が従う分布からの無作為標本とするとき、標本平均 $X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ を $\theta$ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を用いて表せ。

## 5.1　解説

### 5.1.1　（1）

$P(X=x)=\frac{\theta(x-1)}{x}P(X=x-1)$
$=\frac{\theta(x-1)}{x}\frac{\theta(x-2)}{x-1}P(X=x-2)$
= $\cdots$
=$\frac{\theta^{x-1}c}{x}$

### 5.1.2　（2）

$\sum_{x=1}^{\infty}P(X=x)=1$ ー（A）より
$c\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\theta^{x-1}}{x}=1$
ここで $0<t<1$ の時、
$1+t+t^2+t^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}t^i=\frac{1}{1-t}$
が成立する。この両辺を $(0,\theta)$ で項別積分すると
$\int_0^{\theta}(1+t+t^2+t^3+\cdots)dt=\int_0^{\theta}\sum_{i=0}^{\infty}t^i dt=\int_0^{\theta}\frac{1}{1-t}dt$
よって $\theta+\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^3}{3}+\cdots=-\log(1-\theta)$
これより $1+\frac{\theta}{2}+\frac{\theta^2}{3}+\cdots=-\frac{\log(1-\theta)}{\theta}$
以上より $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\theta^{x-1}}{x}=-\frac{\log(1-\theta)}{\theta}$ なので（A）において
$-\frac{c\log(1-\theta)}{\theta}=1$
$\Leftrightarrow c=-\frac{\theta}{\log(1-\theta)}$
=$\frac{\theta}{\log\frac{1}{(1-\theta)}}$
よって $P(X=x)=\frac{\theta^x}{x\log(\frac{1}{1-\theta})}$

### 5.1.3　（3）

$f(\theta)=\Pi_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}}{x_i\log(\frac{1}{1-\theta})}$ とおく。
$\log f(\theta)=\log\frac{\theta^{x_1+x_2+\cdots x_n}}{x_1x_2\cdots x_n\{\log(\frac{1}{1-\theta})\}^n}$
=$\log\theta^{x_1+x_2+\cdots x_n}-\log x_1-\log x_2-\cdots\log x_n-n\log(\log\frac{1}{1-\theta})$

よって $\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta}-n\frac{\frac{1}{1-\theta}}{\log(\frac{1}{1-\theta})}=0$
を解くと、
$\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta}=n\frac{\frac{1}{1-\theta}}{\log(\frac{1}{1-\theta})}$
よって $\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}=\frac{-\hat{\theta}}{(1-\hat{\theta})\log(1-\hat{\theta})}$

### 5.2　５番の総評

（２）で項別積分をするのはなかなか難しい。統計以外のところで悩むだろう。ただ、最尤推定量くらいは求められる必要がある。難易度は５段階で３程度。

## 6　６番

６番

各成分が０か１の値を取るベクトル $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して関数 $\phi(x)$ を
$\phi(x)=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^n x_i\geq k\\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i<k\end{cases}$
で定義する。独立な確率変数 $X_1,X_2,\cdots X_n$ は $P(X_i=1)=p_i,P(X_i=0)=1-p_i,(p_i\geq 0),i=1,2,\cdots n$ を満たし、$X=(X_1,X_2,\cdots X_n)$ とする。この時次の問に答えよ。
(1) 全ての i に対して $p_i=p$ であるとき、$\gamma=E[\phi(X)]$ を求めよ。
(2)n=3,k=2 の時、$p_1,p_2,p_3$ の値が必ずしも等しいとは限らない場合、$\gamma$ を $p_1,p_2,p_3$ を用いて表せ。

### 6.1　解答

#### 6.1.1　（１）

二項分布の再生性より
$\sum_{i=1}^n X_i\ B(n,p)$
よって $\gamma=E[\phi(X)]=P(\sum_{i=1}^n X_i\geq k)=\sum_{k\leq i\leq n}p^iq^{n-i}$

#### 6.1.2　（２）

$\gamma=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)+p_1p_2p_3$

### 6.2　６番の総評

（１）はこれ以上整理する必要は多分ないと思う。ただ、次のような関係が知られている。
$\sum_{i=0}^k b(i;n,p)=\frac{1}{B(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2})}\int_{\frac{\phi_2 p}{\phi_1 q}}^{\infty}(\frac{\phi_1}{\phi_2})^{\frac{\phi_1}{2}}x^{\frac{\phi_1}{2}-1}(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}x)^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}dx$
この公式の証明は「確率統計演習２　統計　国沢清典　培風館」の１７４ページにあります。
(2) については何も言うことはないだろう。難易度は５段階で１。

## 7　全体的な総評

必答の２問は極めて標準的な問題。選択は３，４を選べば良いだろう。難度が４以上の問題は見受けられず、極めて取り組みやすいと言える。

## 8　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・国沢清典著　確率統計演習２　統計　　培風館
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房