平成１４年度　情報数理系　数理科学分野２ 解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

積分
$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+a^2}dx\quad(a>0)$
の値を複素積分を用いて計算せよ。ただし、k は実数とする。

1.1　解答

$f(z)=\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$ とおく
f(z) の上半平面にある曲は $z=ai$ で１位の極である。その留数は
$Res_{z=ai}f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{e^{ikz}}{z+ai}=\frac{e^{-ak}}{2ai}$
ここで二つの積分路 $C_1=\{z;z$ は実数で $\mid z\mid<R$ $(R$ は実数$)\},C_2=\{\mid z\mid=R,Imz\geq 0\}$ を設定し、$C=C_1+C_2$ とおく。
$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$ を示す。
$\lim_{R\to\infty}\mid\int_{C_2}f(z)dz\mid\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\mid f(z)\mid\mid dz\mid$
=$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\mid\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mid\mid dz\mid$
$z=Re^{i\theta}(0\leq\theta\leq\pi)$ とおくと、$\frac{dz}{d\theta}=iRe^{i\theta}$、よって $\mid dz\mid=Rd\theta$
よって $\int_{C_2}\mid\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mid\mid dz\mid\leq\int_0^{\pi}\mid\frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+1}\mid Rd\theta$
$\leq\int_0^{\pi}\frac{|e^{ikR\cos\theta}||e^{-kR\sin\theta}|}{|R^2e^{2i\theta}|-1}d\theta$=$\int_0^{\pi}\frac{e^{-kR\sin\theta}}{R^2-1}d\theta$
ここで $\int_0^{\pi}e^{-kR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^{kR\sin\theta}}d\theta\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^{kR\frac{2\theta}{\pi}}}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}}d\theta$
=$[-\frac{\pi}{2kR}e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}}]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2kR}(e^{-kR}-1)$
よって $\int_0^{\pi}\frac{e^{-kR\sin\theta}}{R^2-1}d\theta\leq-\frac{\pi}{2kR(R^2-1)}(e^{-kR}-1)$
ここで $\lim_{R\to\infty}-\frac{\pi}{2kR(R^2-1)}(e^{-kR}-1)=0$
以上より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$ ー（A）
ここで留数定理より $\int_C f(z)dz=2\pi iRes_{z=ai}f(z)=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（B）
また $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)=\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)+\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)$
=$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)$ ー（C）(（A）より)
（B）より $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（D）
（C)、（D）より $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$ ー（E）
（E）において $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kz}{z^2+a^2}dz$ は実数なので
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{a}e^{-ak}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz$ は偶関数なので
$\int_0^{\infty}\frac{\cos kz}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ak}$

1.2　１番の総評

極めて基本的な複素積分の問題。絶対に選択すべき。難易度は５段階で２。

2　２番

２番

$I=[0,\infty)$ で連続な関数 $f_0(x)$ を用いて
$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(\xi)d\xi$, $n=1,2,\cdots$
で関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0,1,2,3,\ldots}$ を定めるとき、次の問に答えよ。
(1)n=0,1,2, ⋯ に対し
$g_n(x)=\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi$, $h_n(x)=\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi$
とおいて $g_n(x)$ を $f_{n+1}(x)$ と $g_{n+1}(x)$ で、$h_n(x)$ を $f_{n+1}(x)$ と $h_{n+1}(x)$ で表せ。
(2)n=0,1,2, ⋯ に対し、
$f_{n+2}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})(f_n(\xi)-f_{n+2}(\xi))d\xi$
を示せ。
(3)F(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(x)$ は I 上広義一様収束することを示し、F(x) を f_0 で表せ。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(\xi)d\xi$ より $\frac{df_{n+1}(x)}{dx}=f_n(x)$
よって $g_n(x)=\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi$
=$\int_0^x e^{x-\xi}\frac{df_{n+1}(\xi)}{d\xi}d\xi$
=$[e^{x-\xi}f_{n+1}(\xi)]_0^x+\int_0^x e^{x-\xi}f_{n+1}(\xi)d\xi,$
=$f_{n+1}(x)-e^x f_{n+1}(0)+g_{n+1}(x)$
ここで $f_{n+1}(0)=\int_0^0 f_{n-1}(\xi)d\xi=0$
よって $g_n(x)=f_{n+1}(x)+g_{n+1}(x)$
同様にして $h_n(x)=\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi$
=$\int_0^x e^{\xi-x}\frac{df_{n+1}(\xi)}{d\xi}d\xi$
=$[e^{\xi-x}f_{n+1}(\xi)]_0^x-\int_0^x e^{\xi-x}f_{n+1}(\xi)d\xi$
=$f_{n+1}(x)-h_{n+1}(x)$

2.1.2　（2）

（右辺）=$\frac{1}{2}\int_0^x e^{x-\xi}f_n(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^x e^{x-\xi}f_{n+2}(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^x e^{\xi-x}f_n(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^x e^{\xi-x}f_{n+2}(\xi)d\xi$
=$\frac{1}{2}\{g_n(x)-g_{n+2}(x)\}+\frac{1}{2}\{h_{n+2}(x)-h_n(x)\}$
ここで（1）より

$$\begin{cases} f_{n+2}(x)=g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x) \\ f_{n+1}(x)=g_n(x)-g_{n+1}(x) \end{cases}$$

これより $f_{n+2}(x)+f_{n+1}(x)=g_n(x)-g_{n+2}(x)$ ー（A）
また

$$\begin{cases} f_{n+2}(x)=h_{n+1}(x)+h_{n+2}(x) \\ f_{n+1}(x)=h_n(x)+h_{n+1}(x) \end{cases}$$

これより $f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)=h_{n+2}(x)-h_n(x)$ ー（B）
（A)、（B）より（右辺）=$\frac{1}{2}\{f_{n+2}(x)+f_{n+1}(x)\}+\frac{1}{2}\{f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\}=f_{n+2}(x)$

2.1.3 （3）

$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}(x)=\lim_{n\to\infty}\{f_2+f_4+\cdots+f_{2n}\}$
=$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})(f_0(\xi)-f_{2n}(\xi))d\xi$(（２）を使った)
ここで $\lim_{n\to\infty}\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_n(\xi)d\xi$ について考える。
$f_0(x)$ を n 回不定積分したものを $G_n(x)$ とおく。
$f_1(x)=\int_0^x f_0(x)dx=[G_1(x)]_0^x=G_1(x)-G_1(0)$
$f_2(x)=\int_0^x f_1(x)dx=[G_2(x)-G_1(0)x]_0^x=G_2(x)-G_1(0)x-G_2(0)$
$f_3(x)=\int_0^x f_2(x)dx=[G_3(x)-\frac{G_1(0)}{2}x^2-G_2(0)x]_0^x=G_3(x)-G_3(0)-G_2(0)x-\frac{G_1(0)}{2}x^2$
これを繰り返して $f_n(x)=G_n(x)-G_n(0)-G_{n-1}(0)x-\frac{1}{2!}G_{n-2}(0)x^2-\frac{1}{3!}G_{n-3}(0)x^3-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}G_1(0)x^{n-1}$ ー（A）
ここで $G_n(x)$ について $[0,x]$ でマクローリン展開すると
$G_n(x)=G_n(0)+G_{n-1}(0)x+G_{n-2}(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+G_1(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+G_0(cx)\frac{x^n}{n!}(0<c<1)$ ー（B）
（B）を（A）に代入して $f_n(x)=G_0(cx)\frac{x^n}{n!}=f_0(cx)\frac{x^n}{n!}$
よって $\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi$ がある値に広義一様収束することを示せば良い。
$x\in[a,b]0\leq a<b$ を取る。
$|\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi|\leq\int_0^x(|e^{x-\xi}|+|e^{\xi-x}|)|f_0(c\xi)|\frac{\xi^n}{n!}d\xi\leq\int_0^b(|e^{b-\xi}|+|e^{\xi-a}|)|f_0(c\xi)|\frac{\xi^n}{n!}d\xi$
f は $[a,b]$ 上の連続関数なので $[a,b]$ において最大値を取る。その最大値を f_{max} とおくと、
$|\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi|\leq f_{max}\times\frac{b^n}{n!}\int_0^b(|e^{b-\xi}|+|e^{\xi-a}|)d\xi$
ここで $\forall\epsilon\ |f_{max}\times\frac{b^n}{n!}\int_0^b(|e^{b-\xi}|+|e^{\xi-a}|)d\xi-0|\leq\epsilon$
となるように n の値を定めると、n は ϵ にしかよらない。
以上より $\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_0(c\xi)\frac{\xi^n}{n!}d\xi=\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_n(\xi)d\xi$ は $[a,b]$ で０に一様収束する。
よって $F(x)$ は $\frac{1}{2}\int_0^x(e^{x-\xi}-e^{\xi-x})f_0(\xi)d\xi$ に I 上広義一様収束する。

2.2 ２番の総評

(1) と (2) はなんとかなり、部分点は取れるだろう。しかし、(3) は極めて難しい。難易度は５段階で 4.5。

3　３番

３番

f(x) をR上の滑らかな関数で次の条件を満たすとする。
$f'(x) \geq 0(x \in R)$ $f'(x) \geq 1(x \geq 0)$
$f(0) = 1, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
微分方程式の初期値問題
$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0(t > 0)$ $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$
の解 x(t)($0 \leq t < \infty$) について次の問に答えよ。
(1)x(t) は全ての $t \geq 0$ に対して
$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = \frac{3}{2}$
を満たすことを示せ。
(2) 時刻 $t_* > 0$ が存在して、x(t) は $0 \leq t \leq t_*$ で単調に増加し、t=t_* で最大値を取り、$t > t_*$ で単調に減少することを示せ。
(3)$\lim_{t \to \infty} x(t) = -\infty$ を示せ。
(4) 極限 $\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{t}$ を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（1）

$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0$ の両辺を t で積分して
$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = C(C$ は定数)
$\dot{x}(0) = 1, f(x(0)) = f(0) = 1$ より $C = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
よって $\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + f(x(t)) = \frac{3}{2}$

3.1.2　（2）

$\ddot{x}(t) + f'(x(t)) = 0(t > 0)$ より $f'(x(t)) = -\ddot{x}(t)$
ここで $f'(x) \geq 1(x \geq 0)$ より $-\ddot{x}(t) \geq 1$ $(x(t) \geq 0)$
よって $\ddot{x}(t) \leq -1$ $(x(t) \geq 0)$
以上より $\dot{x}(t)$ は $x(t) > 0$ で単調減少する。
ここで $\dot{x}(0) = 1, x(0) = 0, \ddot{x}(t) \leq -1$ より $x(t)$ は $0 \leq t \leq t_*$ で単調増加し、t=t_* で最大値を取り、$t > t_*$ で単調に減少する

3.1.3　（3）

(2) より $t \geq t_*$ で $\dot{x}(t) \leq 0$、また $\ddot{x}(t) \leq -1(x(t) \geq 0)$ より $x(t_{**}) = 0$ を満たす $t_{**} > t_*$ が存在する。
(2) より $x(t)$ は $t > t_{**}$ で単調減少するので
$\lim_{t \to \infty} f(x(t)) = 0$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ より)
ここで（1）より $\dot{x}(t) = -\sqrt{3 - 2f(x(t))}(\dot{x}(t) < 0$ より)

また $f(x(0)) = f(0) = 1$
よって $-\sqrt{3} \leq x(t) \leq -1$
以上より $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$

3.1.4　（4）

(3) より $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{3-2f(x(t))} = -\sqrt{3}$
ここで $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \lim_{t\to\infty} t = \infty$ からロピタルの定理より
$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = -\sqrt{3}$

3.2　３番の総評

解答を読めば十分理解できるだろうが、結構取り組みにくい。難易度は５段階で４。

4　４番

４番

n 本の n 次元縦ベクトル $\{g_1, \cdots g_n\}$ が正規直交系を成し、f を ${}^t g_1 f \neq 0$ なる n 次元縦ベクトルとする。行列 A=$I + \lambda f {}^t g_1$, I は n × n 単位行列、λ はスカラー
について次の問に答えよ。
(1)$f, g_j (j = 2, 3, 4, \cdots)$ がAの固有ベクトルであることを示せ。さらに、Aのジョルダン標準系を求めよ。
(2)$\det A$ を求めよ。
(3)A の逆行列 A^{-1} が存在するための条件を求めよ。さらに A^{-1} を $I + \mu f {}^t g_1$(μ はスカラー) の形で求めよ。

4.1　解答

4.1.1　（1）

$A = I + \lambda f {}^t g_1$ より
$Af = (I + \lambda f {}^t g_1) f$
=$f + \lambda f {}^t g_1 f$
=$(1 + \lambda {}^t g_1 f) f$
また $Ag_j = (I + \lambda f {}^t g_1) g_j \ (j = 2, 3, \cdots n)$
=g_j （$\{g_1 \cdots g_n\}$ は正規直交系なので)

4.1.2　（2）

行列式は固有値の積なので
$\det A = 1 + \lambda {}^t g_1 f$

4.1.3 （３）

A^{-1} が存在するには、$\det A \neq 0$、すなわち $1+\lambda^t g_1 f \neq 0$ であればよい。
$A^{-1} = I + \mu f^t g_1$ とおくと、
$AA^{-1} = (I + \lambda f^t g_1)(I + \mu f^t g_1)$
=$I + (\mu+\lambda) f^t g_1 + \mu\lambda f^t g_1 f^t g_1$
=$I + (\mu+\lambda) f^t g_1 + (\mu\lambda^t g_1 f) f^t g_1$
=$I + (\mu+\lambda+\mu\lambda^t g_1 f) f^t g_1$
$A \cdot A^{-1} = I$ なので $\mu+\lambda+\mu\lambda^t g_1 f = 0$
よって $\mu = \frac{-\lambda}{1+\lambda^t g_1 f}$
以上より $A^{-1} = I - \frac{\lambda}{1+\lambda^t g_1 f} f^t g_1$

4.2 ４番の総評

ジョルダン標準形を知らなくても（１）でＡの固有ベクトルさえ求められれば、（２）（３）を解くことができる。ただ、（３）はなかなか難しい。難易度は５段階で４。

5 ５番

５番

X,Y は次のような確率変数とする。X は平均 $\mu(\mu>0)$、分散 σ^2 を持ち、Y はX＝xが与えられたという条件の下で、平均 $\frac{x}{2}$、分散 $x^2\tau^2$ を持つとする。次の問に答えよ。
(1)Y の平均と分散を求めよ。
(2)R=X-Y とするとき、R と Y の相関係数 ρ を求めよ。
(3)(2) で求めた相関係数 ρ に対して
$\lim_{\sigma\to 0}\rho$ 　および $\lim_{\tau\to 0}\rho$
を求めよ

5.1 解答

5.1.1 （１）

X, Y を連続型の確率変数として示す。
$f(x,y)$ を同時密度関数とし、$f_1(x|y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$
$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$
$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ とおくと条件より
$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy = \mu$-(a)
$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x,y)dxdy = \sigma^2$-(b)
$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy = \frac{x}{2}$-(c)
$V[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty}(y-\frac{x}{2})^2\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy = x^2\tau^2 - (d)$
(c) より $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2}f_1(x)dx = \frac{\mu}{2}((c)$ より$)$
よって $E[Y] = \frac{\mu}{2}$

(d) より $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y^2-xy+\frac{x^2}{4})f(x,y)dxdy=\tau^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_1(x)dx$
$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(x,y)dxdy=\tau^2(\sigma^2+\mu^2)-\frac{1}{4}(\sigma^2+\mu^2)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$
ここで $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\quad xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y|x)dy$
=$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2}f_1(x)dx$
=$\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)$-(e)
よって $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(x,y)dxdy=(\tau^2-\frac{1}{4})(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)=(\tau^2+\frac{1}{4})(\sigma^2+\mu^2)$
以上より $V[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\tau^2(\sigma^2+\mu^2)+\frac{1}{4}\sigma^2$

5.1.2 （2）

$Cov(R,Y)=Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-V(Y)$
ここで $Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-E[X]E[Y]$
=$\frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2)-\mu\cdot\frac{\mu}{2}$
=$\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $Cov(R,Y)=\frac{1}{2}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)-\frac{1}{4}\sigma^2$
=$\frac{1}{4}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)$
また $V[R]=V[X-Y]=V[X]+V[Y]-2Cov(X,Y)$
=$\frac{1}{4}\sigma^2+\tau^2(\sigma^2+\mu^2)$
よって $\rho=\frac{Cov(R,Y)}{\sqrt{V[R]}\sqrt{V[Y]}}=\frac{\frac{1}{4}\sigma^2-\tau^2(\sigma^2+\mu^2)}{\frac{1}{4}\sigma^2+\tau^2(\sigma^2+\mu^2)}$

5.1.3 （3）

$\lim_{\sigma\to 0}\rho=\frac{-\tau^2\mu^2}{\tau^2\mu^2}=-1,\lim_{\tau\to 0}\rho=\frac{\frac{1}{4}\sigma^2}{\frac{1}{4}\sigma^2}=1$

5.2 ５番の総評

比較的やりやすい問題。統計ができる人は絶対に選択すべき。難易度は５段階で３。

6　６番

６番

２次元確率ベクトル Y=$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ が二次元正規分布に従う時、その確率密度関数は

$f(y) = (2\pi)^{-1}[\det(V)]^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{(y-\mu)^T V^{-1}(y-\mu)}{2}],\ \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

で与えられる。ここに $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ はＹの平均ベクトル、および、V=$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ はＹの分散共分散行列であり、$\det(V)$ はその行列式である。またＴはベクトルまたは行列の転置を表す。次の問に答えよ。

(1) いま、$Q = (y-\mu)^T V^{-1}(y-\mu)$ が

$Q = 4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16$

であるとき、μ と V を求めよ。さらにそれを用いて f(y) を書き下せ。

(2)Y_1 と Y_2 の相関係数を求めよ。

6.1　解答

6.1.1　（1）

$Q = \begin{pmatrix} y_1-\mu_1 & y_2-\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1-\mu_1 \\ y_2-\mu_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$Q = 4y_1^2 + 7y_2^2 + y_1(-8\mu_1 - 2a\mu_2) + y_2(-2a\mu_1 - 14\mu_2) + 2ay_1y_2 + 4\mu_1^2 + 2a\mu_1\mu_2 + 7\mu_2^2$

よって

$$\begin{cases} -8\mu_1 - 2a\mu_2 = -16 \\ -2a\mu_1 - 14\mu_2 = -8 \\ 2a = 4 \\ 4\mu_1^2 + 2a\mu_1\mu_2 + 7\mu_2^2 = 16 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

よって $Q = \begin{pmatrix} y_1-2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1-2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおける。以上より $\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

また $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

このとき $\det V = \frac{1}{24}$

以上より $f(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{24}}} \exp(-(4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16))$

=$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp(-(4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_1y_2 - 16y_1 - 8y_2 + 16))$

6.1.2 （2）

$\rho_{Y_1,Y_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-1}{\sqrt{7}}$

6.2 ６番の総評

統計ができる人にとっては十分取り組める問題。難易度は５段階で３。

7 ７番

７番

確率変数ＸとＹは互いに独立で、それぞれ正規分布 $N(\mu, \sigma_1^2)$、$N(0, \sigma_2^2)$ に従うとする。また $Z = X + Y$ とする。次の問に答えよ。
(1)Z=z が与えられている時の X の条件付き密度関数 $p(x|z)$ を求めよ。
(2)Z が与えられているときのＸの条件付き期待値 $E(X|Z)$ を求めよ。
(3)$f(z) = (Z-\mu)^2, g(Z) = \{E(X|Z) - \mu\}^2$ とするとき、f(Z) と g(Z) の期待値の比
$\frac{E[g(Z)]}{E[f(Z)]}$
はＸとＹの分散の比にのみ依存することを示せ。

7.1 解答

7.1.1 （1）

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = X \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} Y = Z - W \\ X = W \end{cases}$$

よって J=$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{vmatrix}$=$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
よって W と Z の同時確率密度関数は
$f_{W,Z}(w,z) = 1 \cdot f_X(x) f_Y(z-w)$ =$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp(-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma_1^2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp(-\frac{(z-w)^2}{2\sigma_2^2})$
ここで Z=X+Y で、X、Y はそれぞれ $N(\mu, \sigma_1^2)$,$N(0, \sigma_2^2)$ に従って、X,Y は共に独立なので Z は $N(\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従う。
よって Z の確率密度関数は
$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2+\sigma_2^2})$
よって $p(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)}$
=$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2})}{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2+\sigma_2^2})}$
=$\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{\{x-\frac{\mu\sigma_2^2+z\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}})$

7.1.2 （２）

(1) より $p(x|z)$ は平均が $\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ の正規分布である。
よって $E(X|Z)=\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

7.1.3 （３）

$E[Z]=\mu, E[Z^2]=V[Z]+E[Z^2]=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\mu^2$
よって $E[g(Z)]=E[(\frac{z\sigma_1^2+\mu\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-\mu)^2]=\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$
$E[f(Z)]=E[(Z-\mu)^2]=V[Z]=\sigma_1^2+\sigma_2^2$
よって $\frac{E[g(Z)]}{E[f(Z)]}=\frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}$
$=\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^4(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})^2}$
$=\frac{1}{(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})^2}$
よって $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ の比にのみ依存する。

7.2 ７番の総評

計算量が半端ない。この解答ではその尋常ではない計算過程を省略した。難易度は５段階で４か 4.5 くらい。

8 ８番

８番

8.1 解答

9 ９番

９番

さいころを n 回投げるとき、「同じ目が３回以上続くことはない」という事象の確率を求めよ。

9.1 解答

さいころを１回または２回しか振らないときは絶対に同じ目が三回以上続くことはないのでその確率は１。
さいころを三回以上振ることを考える。
解答は $\frac{(105+47\sqrt{5})(\frac{5+3\sqrt{5}}{2})^{n-3}+(105-47\sqrt{5})(\frac{5+3\sqrt{5}}{2})^{n-3}}{6^n}$

9.2　９番の総評

私はこの問題を解くのに８時間かかった。（ちなみに Y.N 君は４５分で解いたらしいが ‥ ）もっと丁寧に解答を書きたかったが、これで許して下さい。難易度は５段階で５。

10　全体的な総評

この年は１番以外はどれも非常に取り組みにくい。取り組みやすいのは１、５，６の３題。これは十分完答が狙える。これ以外の問題は時間内に解ききるのは非常に難しいだろう。部分点がとりやすいのは、２。統計ができない人は半分取るのも難しかったのではないだろうか??

11　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房