平成１４年度　情報数理系　数理科学分野１ 解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

$f(x,y)$ は $\{(x,y); x>0y>0\}$ で定義された２変数 x,y の関数で、２階までの偏導関数がすべて連続であるものとする。α を定数とし、変数変換
$x=e^{u\cos\alpha - v\sin\alpha}$, $y=e^{u\sin\alpha + v\cos\alpha}$
を通じて f を u,v の関数とみなすとき、$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を変数 u,v による f の偏導関数を用いて表せ。

1.1　解答

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial u})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial u})^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$
$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial v})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial v})^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$
$\frac{\partial x}{\partial u}=x\cos\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=x\cos^2\alpha$
$\frac{\partial x}{\partial v}=-x\sin\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=x\sin^2\alpha$
$\frac{\partial y}{\partial u}=y\sin\alpha, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=y\sin^2\alpha$
$\frac{\partial y}{\partial v}=y\cos\alpha, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=y\cos^2\alpha$
よって $\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}=x\cos^2\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$
$\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=-x\sin^2\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$ より
$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=x\frac{\partial f}{\partial x}$
また $\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}=x\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\sin^2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$
$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=-x\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+y\cos^2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$ より
$\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}=y\frac{\partial f}{\partial y}$
よって$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=x^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y\sin\alpha\cdot x\cos\alpha+y^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y\sin\alpha\cdot x\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial x}$
=$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial x}$
=$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}$
以上より $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial u}-\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}-\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}$

1.2　１番の総評

１３年に引き続きチェインルールの問題。１３年とほぼ同じ内容の問題なので答案はいくらか省略して書いてある。難易度は５段階で３。

2　２番

２番

次の問いに答えよ。
（１）行列
A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
を直交行列によって対角化せよ。

(2) ２次形式
$Q(x,y) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2yz + 2zx$
の単位球面 $S = \{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ における最大値および最小値を求めよ。また、それらの値をとる S 上の点も求めよ。

2.1　解答

2.1.1　（１）

$| A - tE |= \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 2 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$=0
$\Leftrightarrow t^3 - 4t^2 - t + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (t-1)(t-4)(t+1) = 0$
$\Leftrightarrow t = 1, 4, -1$
t=1 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
t=4 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
t=-1 の時の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
以上より P= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.1.2 （2）

$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と書ける。ここで

a= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ =P $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Pb$ とおくと、

${}^t a = {}^t b {}^t P = {}^t bP^{-1}$ なので

${}^t aAa = {}^t bP^{-1}APb$

$= {}^t b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b$

$= x'^2 + 4y'^2 - z'^2 \leq 4(x'^2 + y'^2 + z'^2)$

ここで $x'^2 + y'^2 + z'^2 = {}^t bb$

$= {}^t aP {}^t Pa$

$= {}^t aa$

$= x^2 + y^2 + z^2 = 1$

よって ${}^t aAa \leq 4$

${}^t aAa = 4$ とおくと、$x'^2 + 4y'^2 - z'^2 = 4(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ より

$x' = 0, y' = \pm 1, z' = 0$ このとき

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

また $-(x'^2 + y'^2 + z'^2) = -1 \leq x'^2 + 4y'^2 - z'^2$

このとき $x' = 0, y' = 0, z' = \pm 1$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

以上より

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ のとき最大値４　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ の時最小値-1

2.2 ２番の総評

（１）は絶対にできなくてはならない。（２）はラグランジュの未定乗数法でも良いが、この解答の方が計算が楽。行列Ａの固有値の最大値、最小値がそのまま $Q(x,y,z)$ の最大値、最小値になっているのに注目。難易度は５段階で２。

3　３番

3 番

$x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ に対する次の微分方程式系を考える。
$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
$(x_1(0), x_2(0), x_3(0),) = (3, 0, 0)$

(1)$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ を求めよ。
(2)i=1,2,3 に対して、$x_i(t)$ を求め、さらに $\lim_{t\to\infty} x_i(t)$ を求めよ。

3.1　解答

3.1.1　（1）

$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + x_3$ ー（A）
$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + x_3$ ー（B）
$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - 2x_3$ ー（C）
とおいて、（A）〜（C）の両辺を足し合わせると
$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) = 0$
よって $(x_1 + x_2 + x_3) = K(K$ は定数)
ここで初期条件より $(x_1 + x_2 + x_3) = 3$

3.1.2　（2）

（１）より $x_1(t) = 3 - x_2(t) - x_3(t)$
これを（B）に代入して
$\frac{dx_2}{dt} = 3 - x_2 - x_3 - 2x_2 + x_3$
=$-3x_2 + 3$
よって $\frac{dx_2}{dt} + 3x_2 = 3$
ここで積分因子として e^{3t} を両辺にかけると
$e^{3t}\frac{dx_2}{dt} + 3x_2e^{3t} = 3e^{3t}$
よって $\frac{d}{dt}(x_2(t)e^{3t}) = 3e^{3t}$
よって $x_2(t)e^{3t} = \int 3e^{3t} = e^{3t} + C$(C は定数)
以上より $x_2(t) = 1 + Ce^{-3t}$
初期条件より $x_2(0) = 0$ なので $C = -1$
よって $x_2(t) = 1 - e^{-3t}$
同様にして $x_1(t) = 1 + 2e^{-3t}$
$x_3(t) = 1 - e^{-3t}$
また $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1$
$\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 1$

$\lim_{t\to\infty} x_3(t) = 1$

3.2　３番の総評

基本的な常微分方程式の問題。あまり難しくはない。選択すべき。難易度は５段階で２。

4　４番（解答提案者 T.K）

４番

$\alpha > \beta > \frac{1}{2}, \gamma \in R$ とする。広義積分
$I(\alpha,\beta,\gamma) = \iint_{R^2} \frac{|\log(x^2+y^2)|^\gamma}{(x^2+y^2)^\alpha+(x^2+y^2)^\beta} dxdy$
について次の問いに答えよ。
(1)$I(\alpha,\beta,\gamma) < \infty$ となる α,β,γ の条件を求めよ。
(2)$I(\frac{5}{4},\frac{3}{4},0)$ を求めよ。

4.1　解答

4.1.1　（１）

$x = e^v\cos\theta, y = e^v\sin\theta$ とおくと、$\mid J \mid = e^{2v}$
よって $I = \iint_{R^2} \frac{|\log(x^2+y^2)|^\gamma}{(x^2+y^2)^\alpha+(x^2+y^2)^\beta} dxdy$
=$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|2v|^\delta}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} e^{2v} dv d\theta$
=$2\pi 2^\delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
$C_1 = 2\pi 2^\delta$ とおくと、
$\frac{I}{C_1} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv + \int_{-1}^{1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv + \int_1^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
ここで $I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv, I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv, I_3 = \int_1^{\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$ とおく
I_3 について
$e^{2\alpha v} \leq e^{2\alpha v} + e^{2\beta v}$ より
$\frac{1}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} \leq \frac{1}{e^{2\alpha v}}$
$v \geq 1$ より $\mid v \mid^\delta = v^\delta \leq v^{|\delta|}$
よって $I_3 \leq \int_1^{\infty} v^{|\delta|} e^{2v-2\alpha v} dv = \int_1^{\infty} v^{|\delta|} e^{-2(\alpha-1)v} dv$
$\alpha - 1 > 0$ の時 $t = 2(\alpha-1)v$ とすると
$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2(\alpha-1)}$
このとき $I_3 \leq \frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \int_{2(\alpha-1)}^{\infty} t^{|\delta|} e^{-t} dt$
$\leq \frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \int_0^{\infty} t^{|\delta|+1-1} e^{-t} dt$
=$\frac{1}{\{(2\alpha-1)\}^{|\delta|+1}} \Gamma(\mid \delta \mid +1)$ ($\Gamma()$ はガンマ関数)
以上より $\alpha > 1$ の時 $I_3 < \infty$
I_1 について
$I_1 = -\int_{-1}^{-\infty} \frac{|v|^\delta e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} dv$
$-t = v$ として

$I_1 = \int_1^\infty \frac{t^\delta e^{-2t}}{e^{-2\alpha t}+e^{-2\beta t}}dt$
$e^{-2\beta t} < e^{-2\alpha t} + e^{-2\beta t}$
$t \geq 1$ より $t^\delta \leq t^{|\delta|}$
$I_1 < \int_1^\infty t^{|\delta|} e^{-2t+2\beta t} dt$
$= \int_1^\infty t^{|\delta|} e^{-2(1-\beta)t} dt$
$1-\beta > 0$ の時 I_3 の時と同様にして
$I_1 < \{\frac{1}{2(1-\beta)}\}^{|\delta|+1}\Gamma(|\ \delta\ | +1) < \infty$
I_2 について
$-1 \leq v \leq 1$ で $e^{-2} \leq e^{2v} \leq e^2$
この時 $2e^{-2\alpha} \leq e^{-2\alpha} + e^{-2\beta} \leq e^{2\alpha v} + e^{2\beta v} \leq e^{2\alpha} + e^{2\beta} \leq 2e^{2\alpha}$
よって $\frac{e^{2v}}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} \leq \frac{e^2}{e^{2\alpha v}+e^{2\beta v}} \leq \frac{1}{2e^{-2\alpha}}e^2$
よって $I_2 < \int_{-1}^1 |\ v\ |^\delta \ \frac{e^{2+2\alpha}}{2} dv$
$=\frac{e^{2+2\alpha}}{2}\int_{-1}^1 |\ v\ |^\delta \ dv$
$=\frac{2}{2}e^{2+2\alpha}\int_0^1 v^\delta dv$
これは $\delta > -1$ の時収束
よって $\delta > -1$ の時 $I_2 < \infty$
以上より $\alpha > 1, \beta < 1, \delta > -1$ の時収束する。
逆に $\alpha \leq 1, \beta \geq 1, \delta \leq -1$ の時発散することを示す。
A:$\delta \leq -1, B : \delta > 1$ かつ$\alpha \leq 1, C : \delta > -1$ かつ$\beta \leq 1$
A のとき
I_2 について
$\int_{-1}^1 \frac{|v|^\delta e^{-2}}{2e^{2\alpha}} dv = +\infty$ よってこのとき $I = \infty$
B と C のとき
I_3 について
$v \geq 1$ より $e^{2\alpha v} + e^{2\beta v} < 2e^{2\alpha v}$
$\frac{e^{2v}}{2e^{2\alpha v}} = \frac{1}{2}e^{2(1-\alpha)v} \geq \frac{1}{2}$ $(1-\alpha \geq 0$ より)
また $v \geq 1, \delta > -1$ のとき $v^\delta > \frac{1}{v}$
よって $I_3 > \int_1^\infty \frac{v^\delta e^{2v}}{2e^{2\alpha v}} dv \geq \int_1^\infty \frac{1}{2} v^\delta dv = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{v} dv = \infty$
よって B の時 $I_3 = \infty$
I_1 についても同様。
以上より $A \cup B \cup C$ ならば I は発散する。
よって $\alpha > 1, \beta < 1, \delta > -1$ と I が収束することは必要十分条件であることが示せた。

4.1.2 （2）

$I(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0) = \iint_{R^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}} + (x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} dxdy$
ここで極座標変換すると
$I(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{\frac{5}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} dr d\theta$
$=2\pi \int_0^\infty \frac{1}{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{1}{2}}} dr$
$\sqrt{r} = t$ とおくと、$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2}\frac{1}{t}$
以上より $I(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0) = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt$
$=4\pi[\tan^{-1} t]_0^\infty$

=$4\pi\frac{\pi}{2}$ =$2\pi^2$

4.2　総評

(１) は難しすぎる。だが、（１）ができなくても（２）はできるので部分点は取れる。難易度は５段階で当然５。

5　５番

５番

連続な確率変数 X は、Ｙ軸対称な確率密度関数 $f(x)$ をもち、その平均と分散は $E(X)=0, V(X)=\sigma^2$ であるとする。次の問いに答えよ。
(1)X から新しい確率変数 Y を次のように定義する。
$Y=\begin{cases} X & X\geq 0 \\ 0 & X<0 \end{cases}$
今、Y の平均を $E(Y)=\mu$ とするとき、その分散 $V(Y)$ を求めよ。
さらに、確率変数 Z を
$Z=\begin{cases} 0 & X\geq 0 \\ X & X<0 \end{cases}$
で定義するとき、その平均 E(Z), と分散 V(Z) を求めよ。
(2)$k>0$ に対して、確率変数 W を
$W=\frac{2}{k+\frac{1}{k}}(kY+\frac{Z}{k})$
で定義する。このとき、W の平均 E(W) と分散 V(W) を求めよ。
(3)$k>0$ に対して、W の期待値の取りうる範囲を求めよ。

5.1　解答

5.1.1　（１）

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$
ここで $E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_Y(y)dy$
=$\int_0^{\infty}x^2f(x)dx$
=$\frac{1}{2}V(X)$
=$\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $V(Y)=\frac{1}{2}\sigma^2-\mu^2$
E[Z]=$\int_{-\infty}^{\infty}zf_Z(z)dz$
=$\int_{-\infty}^{0}xf_X(x)dx$
=$-\int_0^{\infty}xf_X(x)dx$
=$-\mu$
$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty}z^2f_Z(z)dz$
=$\int_{-\infty}^{0}z^2f_Z(z)dz$
=$\int_0^{\infty}x^2f_X(x)dx$(X はＹ軸対称なので)

=$\frac{1}{2}\sigma^2$
よって $V(Z)=\frac{1}{2}\sigma^2-\mu^2$

5.1.2 （2）

$E(W)=\frac{2}{k+\frac{1}{k}}(kE(Y)+\frac{E(Z)}{k})$
=$\frac{2k}{k^2+1}(k\mu-\frac{1}{k}\mu)$
=$\frac{2k}{k^2+1}\frac{k^2-1}{k}\mu$
=2$\frac{k^2-1}{k^2+1}\mu$
$V(W)=(\frac{2k}{k^2+1})^2V(kY+\frac{Z}{k})$
=$(\frac{2k}{k^2+1})^2\{k^2V(Y)+\frac{1}{k^2}V(Z)+2Cov(Y,Z)\}$
ここで $Cov(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)$
=$0-\mu(-\mu)$
=μ^2
以上より $V(W)=(\frac{2k}{k^2+1})^2\{k^2(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu^2)+\frac{1}{k^2}(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu^2)+2\mu^2\}$

5.1.3 （3）

（2）から $E(W)=2\mu\frac{k^2-1}{k^2+1}$
=$2\mu(1-\frac{2}{k^2+1})$
よって $k>0$ の時、$-2\mu<E[W]<2\mu$

5.2 ５番の総評

問題文では「f(x) は原点対称」と書いてあるが、これだと f(x) が負の値を取ってしまうので、恐らく問題文が間違っていると思われる。正しくは「f(x) はＹ軸対称」であろう。この解説も f(x) はＹ軸対称としている。難易度は５段階で２から 2.5 くらい。

6 ６番

６番

平均 λ のポアソン分布を正の値に制限した確率変数を X とする。すなわち
$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^k}{k!}\ \ k=1,2,\cdots$
である。次の問いに答えよ。
(1)X の確率母関数 $Q(z)=E(z^X)$ を求めよ。
(2) 次の確率変数 Y は $e^{-\lambda}$ の不偏推定量であることを示せ。

6.1 解答

6.1.1 （１）

$E(z^X)=\sum_{k=1}^{\infty}p(X=k)z^k$
=$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}z^k$
=$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}(e^{\lambda z}-1)$

6.1.2 （２）

$E(Y)=$ １・$\{P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)+\cdots\}-1\cdot\{P(X=2)+P(X=4)+\cdots\}$
=1・$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k-1)-1\cdot\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)$
=$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\}$
=$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\{\lambda-\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}-\frac{\lambda^4}{4!}+\frac{\lambda^5}{5!}-\cdots\}$
=$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}(1-e^{-\lambda})$
=$e^{-\lambda}$
よって $E(Y)=e^{-\lambda}$ なのでＹは $e^{-\lambda}$ の不偏推定量である。

6.2 ６番の総評

これもあまり難しくはない。選択すべき。難易度は５段階で２。

7 ７番

７番

確率変数ＸとＹは互いに独立でそれぞれ標準正規分布 N(0,1) に従うとする。$Z=X^2+Y$ とし、$M(g)=E[\{Z-g(X)\}^2]$ とするとき、次の問に答えよ。
(1)g(X) がＸの一次関数 g(X)=aX+b（a,b は実数）であるとき、M(g) を最小にする a,b の値、およびその時の M(g) の最小値を求めよ。
(2)g(X) をＸの連続関数とするとき、M(g) を最小にする g(X) を求め、その理由を述べよ。その時の M(g) の最小値を求めよ。

7.1 解答

7.1.1 （１）

$Z=X^2+Y$ なので
$E((Z-g(X))^2)=E((X^2+Y-g(X))^2)$
=$E((X^2-g(X))^2)+2E((X^2-g(X)))E(Y)+E(Y^2)$(X とＹは独立なので)
=$E((X^2-g(X))^2)+1$　($E(Y^2)=1$ なので)
$G(X)=aX+b$ なので

M(g)=$E(X^4)+a^2E(X^2)+b^2-2aE(X^3)+2abE(X)-2bE(X^2)+1$
ここで $E(X^2)=1, E(X^3)=0, E(X^4)=3$ なので
M(g)=$4+a^2+b^2-2b$
=$a^2+(b-1)^2+3$
よって M(g) は a=0,b=1 の時、最小値３を取る。

7.1.2　（２）

（１）より g(X)=X^2 の時最小値１を取る。

7.2　７番の総評

(1) のような式変形に気づけば容易。難易度は５段階で 2.5 から３。

8　全体的な総評

必答の２問はごく標準的な問題。１番のチェインルールは去年とほとんど同じ形式である。３〜７のうち、３，６を選ぶのが一番良い。統計ができる人は５、７も十分手が出せるだろう。ただ４はかなりの難問なので、統計ができない人にとってはだいぶ苦しい出題内容だったと思われる。

9　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・国沢清典著　確率統計演習２　統計　　培風館
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >

・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房