平成１５年度　情報数理系　数理科学分野１
解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ なので
$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$
よって $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$
$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta}{r}$
$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$
$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}, \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$
ここで $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ より
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$
また $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\frac{\partial\theta}{\partial y})^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$
よって $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$

1.1.2　（2）

$\triangle^2 f = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r})$
$=\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 g}{\partial r^3} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r})$
$=\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 g}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$

1.2　１番の総評

３年連続でチェインルールの問題である。前２年をやっていれば十分できるはず。（２）は新傾向だが。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

t=2 に対して $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $t = 5$ の時 $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ t=8 の時 $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
P=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと、
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$5x^2+5y^2+5z^2+2\sqrt{6}xz+2\sqrt{3}yz=8$ を行列形式で書くと
$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=8$ ー（A）
ここで $a=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて $a={}^t Pb$ とおくと（A）は
${}^t b\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}b=8$
$\Leftrightarrow {}^t a {}^t P\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}Pa=8$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=8$
よって $2x'^2+5y'^2+8z'^2=8$
$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{4}+\frac{5}{8}y'^2+z'^2=1$
この平面を S' とおく。$x'y'z'$ 平面において、$l'={}^t(1\ 0\ 0)$ であるとき、l' が S’ を切り取る線分の長さは最大になり、その長さは４.
よって xyz 平面においては
$l=Pl'=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
以上より l の方向ベクトルは ${}^t(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ であり、これが切り取る線分の長さは４。

2.2　２番の総評

似たような問題はどこかでやったことがあるはず。難易度は５段階で 2.5 くらい。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

$\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$ より
$y=e^{-\int adx}\{\int_0^x e^{\int adt}f(t)dt+C\}$(C は定数)
=$e^{-ax}\{\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\}$
$y(0)=C=b$ より
$y=e^{-ax}\{\int_0^x e^{at}f(t)dt+b\}$

ここで $\lim_{x\to\infty} be^{-ax}=0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}$
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{at}f(t)dt=+\infty$ の時、ロピタルの定理より
$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a}=0(x>M$ で $f(x)=0$ より)
$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{at}f(t)dt<+\infty$ の時、
$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}=0$
以上より $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$

3.1.2 （2）

$\int_0^\infty \mid f(x)\mid dx<+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\mid f(x)\mid dx=0$
すなわち $\forall\epsilon,\exists N_0 n\leq N_0\Rightarrow\int_n^{n+1}\mid f(x)\mid dx<\epsilon$ が言える。
ここで $y(x)=\frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt+b}{e^{ax}}$ より
$\mid y(x)\mid\leq\frac{\int_0^x e^{at}|f(t)|dt}{e^{ax}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\int_0^{[x]+1} e^{at}|f(t)|dt}{e^{ax}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{[x]+1}\int_{k-1}^k e^{at}|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}$
ここで $\int_{k-1}^k e^{at}\mid f(t)\mid dt\leq e^{ak}\int_{k-1}^k\mid f(t)\mid dt$ より
$\mid y(x)\mid\leq\frac{\sum_{k=1}^{[x]+1}e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{N_0-1}e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{\sum_{k=N_0}^{[x]+1}e^{ak}\int_{k-1}^k|f(t)|dt}{e^{a[x]}}+\frac{|b|}{e^{ax}}$
$<\frac{\epsilon\sum_{k=N_0}^{[x]+1}e^{ak}}{e^{a[x]}}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}(A=\sum_{k=N_0}^{[x]+1}e^{ak}\int_{k-1}^k\mid f(t)\mid dt,B=\mid b\mid$ とおいた)
$=\epsilon\frac{\frac{e^{a([x]+1)}-e^{aN_0}}{e^a-1}}{e^{a[x]}}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}$
$=\epsilon\frac{e^{a([x]+1)}}{e^{a[x]}(e^a-1)}-\frac{\epsilon e^{aN_0}}{e^{a[x]}(e^a-1)}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}$
よって $\lim_{x\to\infty}\mid y(x)\mid<\lim_{x\to\infty}\{\frac{\epsilon e^a}{e^a-1}-\frac{\epsilon e^{aN_0}}{e^{a[x]}(e^a-1)}+\frac{A}{e^{a[x]}}+\frac{B}{e^{a[x]}}\}=\frac{\epsilon e^a}{e^a-1}$
これが任意の ϵ について成立するので、$\lim_{x\to\infty}\mid y(x)\mid=0$ が成立する。
以上より $\int_0^\infty\mid f(x)\mid dx<\infty$ が成り立つ時、$\lim_{x\to\infty}y(x)=0$ が成立する。

3.2 ３番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

4 ４番

4.1 解答

4.1.1 （1）

真数条件より
$x>0,y>0,1-x-y>0$ が成立するので $x>0,y>0,x+y<1$
また $\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1-y}{x(1-x-y)} & \frac{1}{1-x-y}\\ \frac{1}{1-x-y} & \frac{1-x}{y(1-x-y)}\end{vmatrix}=\frac{1}{xy(1-x-y)}$
よって $I(\alpha,\beta)=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(1+\frac{1}{x}(1-x-y)+\frac{y}{x})^{-\alpha-2}(1+\frac{1-x-y}{y}+\frac{x}{y})^{-\beta-2}(\frac{1-x-y}{x}\frac{1-x-y}{y}+\frac{1-x-y}{y}+\frac{1-x-y}{x})\frac{1}{xy(1-x-y)}dxdy$
$=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}(\frac{(1-x-y)^2}{xy}+(1-x-y)\frac{x+y}{xy})\frac{1}{xy(1-x-y)}dxdy$
$=\int_{x>0,y>0,x+y<1}(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}\frac{1}{x^2y^2}dxdy$

$=\int_{x>0,y>0,x+y<1} x^\alpha y^\beta dxdy = \int_0^1 \{\int_0^{1-x} y^\beta dy\} x^\alpha dx$
$=\frac{1}{\beta+1}\int_0^1 [y^{\beta+1}]_0^1 x^\alpha dx$
$=\frac{1}{\beta+1}\int_0^1 (1-x)^{\beta+1} x^\alpha dx$
$=\frac{1}{\beta+1}B(\alpha+1,\beta+2)$
$=\frac{1}{\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)}$
$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)}$
よって $\alpha+1,\beta+1>0$ なので $\alpha>-1,\beta>-1$

4.1.2 （2）

$I(1,1)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{24}$

4.2 （3）

微積分の問題だが、統計の知識（ベータ関数やガンマ関数）が要求される。難易度は５段階で 3.5。

5 ５番

５番

確率変数Xが二項分布 $B_N(n,p)$ に従うものとする。$X_n = \frac{X}{n}$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、$n \geq 3$ 、$0<p<1$ とする。
(1)$E(X_n-p)^3$ を n と p だけで簡潔に表せ。
(2)$0<p<1$ に対して $E[(X_n-p)^3]$ の取りうる範囲を求めよ。

5.1 解答

5.1.1 （1）

X の積率母関数は $M(\theta)=\sum_{x=0}^n e^{\theta x}\ {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$
$=\sum_{x=0}^n {}_nC_x (pe^\theta)^x(1-p)^{n-x}$
$=(pe^\theta+(1-p))^n$
よって $M'(\theta)=n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
$M"(\theta)=n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
$M^{(3)}(\theta)=n(n-1)(n-2)(pe^\theta+(1-p))^{n-3}p^3e^{3\theta}+2n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(n-1)(pe^\theta+(1-p))^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(pe^\theta+(1-p))^{n-1}pe^\theta$
よって $E[X]=M'(0)=np$
$E[X^2]=M"(0)=n(n-1)p^2+np$
$E[X^3]=M^{(3)}(0)=n(n-1)(n-2)p^3+2n(n-1)p^2+n(n-1)p^2+np$
以上より $E[(X_n-p)^3]=E[\frac{X^3}{n^3}-3\frac{X^2}{n^2}p+3\frac{X}{n}p^2-p^3]$
$=\frac{1}{n^2}(2p^3-3p^2+p)$

5.1.2 （2）

$f(p)=\frac{1}{n^2}(2p^3-3p^2+p)$ とおくと、
$f'(p)=\frac{1}{n^2}(6p^2-6p+1)$
$f'(p)=0$ とおくと $p=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$
よって f(p) の増減表は次のようになる。

λ	0	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	1
$\psi'(\lambda)$		+	0	-	0	+	
$\psi(\lambda)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{18n^2}$	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{18n^2}$	$\nearrow$	0

表 1:

よって $\frac{-\sqrt{3}}{18n^2}\le E[(X_n-p)^3]\le\frac{\sqrt{3}}{18n^2}$

5.2 ５番の総評

計算がやや複雑だが統計ができる人は十分取り組める問題。難易度は５段階で 2.5 くらい。

6 ６番

6 番

確率変数 X と Y は、それぞれ共に平均０、分散 σ^2 を持ち、X と Y の相関係数 $Corr(X,Y)=\rho$ を $0<\rho<1$ と仮定する。X,Y に次のように２×２行列を作用させて、新しい確率変数 U,V を
$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
と定義する。
(1)$corr(U,V)$ を θ,ρ を用いて表せ。また固定された ρ に対して、θ を動かしたときの $Corr(U,V)$ の最大値と最小値を求めよ。
(2)θ を $0\le\theta\le\pi$ の範囲で動かしたときに、$Corr(U,V)=0$ を与える θ を全て求めよ。
(3)θ が（２）で求めた１つの値のとき、その θ に対応する（U,V）が２次元正規分布に従うと仮定する。このとき、(X,Y) の同時密度関数 f(x,y) を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （1）

$U=X\cos\theta+Y\sin\theta,\ V=-X\sin\theta+Y\cos\theta$
よって $E[U]=0,E[V]=0\ \ (E[X]=E[Y]=0$ なので$)$
また $Cov(X,Y)=Corr(X,Y)\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}=\rho\sigma^2$ー $(A)\ \ (V[X]=V[Y]=\sigma^2$なので$)$
よって $V[U]=\cos^2\theta V[X]+\sin^2\theta V[Y]+2\sin\theta\cos\theta Cov(X,Y)$
=$\sigma^2+2\rho\sigma^2\sin\theta\cos\theta$

$V[V] = \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 \sin\theta\cos\theta$
$Cov(U,V) = E[UV] - E[U]E[V]$
=$E[UV]$
=$E[XY](\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
=$\rho\sigma^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ (A より)
よって $Corr(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{V[U]}\sqrt{V[V]}}$
=$\frac{\rho\cos 2\theta}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 2\theta}}$
ここで $\cos 2\theta = t(-1 \leq t \leq 1)$ とおいて」
$Corr(U,V) = \frac{\rho t}{\sqrt{1-\rho^2(1-t^2)}} = f(t)$ とおく
このとき $f'(t) = \frac{\rho(1-\rho^2)}{(1-\rho^2+\rho^2t^2)\sqrt{1-\rho^2+\rho^2t^2}} > 0$
よって f(t) は単調増加関数である。以上より
$f(t)$ の最小値は t=-1 の時 f(-1)=$-\rho$
最大値は t=1 の時 f(1)=ρ

6.1.2 （２）

$Corr(U,V) = 0$ より $\cos 2\theta = 0$
$0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

6.1.3 （３）

$Corr(U,V) = 0$ で (U,V) が二次元正規分布に従うので (U,V) は独立。
$V[U] = \sigma^2(1 + 2\rho\sin\theta\cos\theta),\ V[V] = \sigma^2(1 - 2\rho\sin\theta\cos\theta)$
よって $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $V[U] = \sigma^2(1+\rho)\ V[V] = \sigma^2(1-\rho)$
この時 $f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2(1+\rho)} - \frac{v^2}{2\sigma^2(1-\rho)})$
ここで $U = \cos\theta X + \sin\theta Y$
$V = -\sin\theta X + \cos\theta Y$ なので
$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$
よって $f_{XY}(x,y) = \mid J \mid f_{UV}(\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y)$
$\theta = \frac{\pi}{4}$ なので
$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\frac{1}{2}(x+y)^2(1-\rho)+\frac{1}{2}(-x+y)^2(1+\rho)}{1-\rho^2})$
=$\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{1-\rho^2})$

6.2 ６番の総評

あまり易しくはない。難易度は５段階で 3.5 くらい。

7　７番

７番

X は正値だけをとる確率変数とする。$Y = \log_e X$ とするとき、Y が平均 0、分散 1 の正規分布に従うとする。
(1)X の確率密度関数を求めよ。
(2)X の１次、２次、３次のモーメント（積率）を求めよ。
(3)X の分布の歪度を求め、Y の歪度と比較せよ。

7.1　解答

7.1.1　（1）

X の分布関数を F(x) とおき、確率密度関数を f(x) とおく。この時、
$P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(\log_e X \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$
よって $f(x) = \frac{dF(e^x)}{dx} = e^x f(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
$e^x = t$ とおくと、
$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log t)^2}{2} - \log t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{(\log t)^2}{2}}$

7.1.2　（2）

$E[X^r] = E[e^{rY}]$
平均 μ、分散 σ^2 の正規分布の積率母関数は $e^{\mu r + \frac{\sigma^2}{2} r^2}$
Y は $N(0,1)$ に従うので $E[X^r] = E[e^{rY}] = e^{\frac{1}{2}r^2}$
よって $E[X] = e^0 = 1$
$E[X^2] = e^2$
$E[X^3] = e^{\frac{9}{2}}$

7.1.3　（3）

$M_2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 = e^2 - 1$
$M_3 = E[X^3] - 3E[X]E[X^2] + 3E[X]^2 E[X] - E[X]^3$
=$e^{\frac{9}{2}} - 3e^2 + 3 - 1 = e^{\frac{9}{2}} - 3e^2 + 2$
よって歪度は $\frac{M_3}{(M_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{\frac{9}{2}} - 3e^2 + 2}{2\sqrt{(e^2-1)^3}}$

7.2　７番の総評

この手の問題は過去にも出題例があるので、統計ができる人は十分に取り組めるだろう。難易度は５段階で 2.5 くらい。

8　全体的な総評

必答の２問は去年に続き標準的な微積分と線形代数の問題。（１の (2) は少し難しいが。）選択は、統計ができる人は５と７をやれば良いだろう。３，４はあまり易しくないのでこの年も統計ができない人にとっては苦しい年だっただろう。

9　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房