平成１５年度　情報数理系　数理科学分野２ 解答

作成者　：　J.H

所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

１番

$a>0$ の時、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+1)}dx$ の値を複素積分を用いて求めよ。

1.1　解答

$f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}$ とおくと、f(z) の上半平面における特異点は $z=i$ で１位の極である。
$C_1=[-R,-r], C_2=\{\mid z\mid=r\}, C_3=[r,R], C_4=\{\mid z\mid=R\}(r<R)$ とおいて積分路を $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ とおく。
この時 $\int_C f(z)dz=2\pi iRes_{z=i}f(z)=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{e^{iaz}}{z(z+i)}=-\pi ie^{-a}$
ここで $\deg\{z(z^2+1)\}\geq\deg\{1\}+1$ よりジョルダンの補題から $\lim_{R\to\infty}\mid\int_{C_4}f(z)dz\mid=0$
また $\int_{C_1+C_3}f(z)dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}dz+\int_r^R\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}dz$
$t=-z$ とおくと、$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}dz=\int_R^r\frac{e^{-iat}}{-t(t^2+1)}(-dt)=-\int_r^R\frac{e^{-iat}}{t(t^2+1)}dt$
$\int_{C_1+C_3}f(z)dz=\int_r^R\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}dz-\int_r^R\frac{e^{-iaz}}{z(z^2+1)}dz=\int_r^R\frac{2i\sin az}{z(z^2+1)}dz$
また $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+1)}=\frac{e^{iaz}}{z}-\frac{z}{z^2+1}e^{iaz}=\frac{1}{z}(1+iaz+\frac{(iaz)^2}{2!}+\cdots)-\frac{z}{z^2+1}e^{iaz}$
$=\frac{1}{z}+(ia+\frac{(ia)^2z}{2!}+\cdots)-\frac{z}{z^2+1}e^{iaz}=\frac{1}{z}+p(z)$ とおく。
$\int_{C_2}\frac{1}{z}dz=\int_\pi^0\frac{1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=-\pi i$
$p(z)$ は C_2 において正則なので $\mid p(z)\mid\leq M$ とできる。
よって $\mid\int_{C_2}p(z)dz\mid\leq M\pi r\to 0(r\to 0)$
以上より $\lim_{r\to 0}\int_{C_2}f(z)dz=-\pi i$
よって $\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_C f(z)dz=\lim_{R\to\infty,r\to 0}(\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz+\int_{C_3}f(z)dz+\int_{C_4}f(z)dz)$
$=\int_0^\infty\frac{2i\sin az}{z(z^2+1)}dz-\pi i+0=-\pi ie^{-a}$
よって $\int_0^\infty\frac{2i\sin az}{z(z^2+1)}dz=\pi i(1-e^{-a})$ なので $\int_0^\infty\frac{\sin az}{z(z^2+1)}dz=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a})$
$\frac{\sin az}{z(z^2+1)}$ は偶関数なので $\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin ax}{x(x^2+1)}dx=\pi(1-e^{-a})$

1.2　１番の総評

実軸上に極がある複素積分で、あまり取り組みやすいとは言えない。類題をやったことがあれば何とかなるだろうが。難易度は５段階で 3.5。

2　２番

２番

(1)$\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$ に対して
$\cos\theta=\exp(-\frac{1}{2}\theta^2+a(\theta)\theta^2)$
を満たすように $a(\theta)$ を定めるとき、$\lim_{\theta\to 0}a(\theta)=0$ を示せ。
(2)$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^n d\theta=\sqrt{2\pi}$
を示せ。ただし、$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を用いても良い。

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\cos\theta = \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 + a(\theta)\theta^2)$ より
$\log\cos\theta = -\frac{1}{2}\theta^2 + a(\theta)\theta^2$
よって $a(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\log\cos\theta}{\theta^2}$
ここで $\lim_{\theta\to 0}\theta^2 = 0, \lim_{\theta\to 0}\log\cos\theta = 0$ なのでロピタルの定理より
$\lim_{\theta\to 0}\frac{\log\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\tan\theta}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-1}{2\cos^2\theta} = -\frac{1}{2}$

2.1.2　（2）（不完全答案）

$\theta = \frac{t}{\sqrt{n}}$ とおくと、$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
また $\theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$ のとき $t : -\frac{\pi}{2}\sqrt{n} \to \frac{\pi}{2}\sqrt{n}$
このとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^n d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})t^2}dt$
ここで（1）より $\lim_{n\to\infty} a(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 0$ なので
$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$(この部分に問題がある。勝手に極限と積分とを入れ替えている)
=$\sqrt{2\pi}$

2.2　２番の総評

そんなに難しくはないが、（2）がちょっと不完全なままで終わってしまった‥ これでも８割くらいの点数はあると思うが‥ 難易度は５段階で３。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

3.1.2　（2）

3.2　３番の総評

4　４番

４番

$w(x)$ を [0,1] 上の正値連続関数とし、自然数 n に対して V_n を n 次以下の x の実数係数多項式全体のなすベクトル空間とする。V_n 上の内積を
$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)w(x)dx f,g\in V_n$
で定める。
(1)V_n の正規直交基底 $P_0,P_1,\cdots p_n$ で、各 $P_k(k=0,1,\cdots,n)$ の次数が k であるものが存在することを示せ。
(2) 各 k に対し、$(P_k,\frac{dP_k}{dx})=0$ となることを示せ。

4.1　解答

4.1.1　（1）

$c_m x^m + c_n x^n = x^m(c_m + c_n x^{n-m}) = 0$ が $\forall x\in R$ で成り立つのは $c_m=c_n=0$ の時のみ
よって x^mと x^n は一次独立である。
これより $Q_k = c_{k0}+c_{k1}x+c_{k2}x^2+\cdots+c_{kk}x^k(c_{kk}\neq 0)$ とおくと $(Q_0,\cdots Q_k)$ は一次独立である。
ここでグラムシュミットの正規直交化法により
$P_k=\frac{Q_k-\sum_{i=0}^{k-1}(Q_k,P_i)P_i}{||Q_k-\sum_{i=0}^{k-1}(Q_k,P_i)P_i||}$
とおくと、V_n の正規直交基底 $P_0,\cdots P_n$ で各 $P_k(k=0,1,\cdots,n)$ の次数が k であるものが存在する。

4.1.2　（2）

$(P_k,\frac{dP_k}{dx})=(P_k,\sum_{i=0}^{k-1}b_iP_i)=\sum_{i=0}^{k-1}b_i(P_k,P_i)=0$

4.2　４番の総評

解答は短いがあまり易しい問題とは言えない。難易度は５段階で 3.5。

5　5番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$ とおく。$x\in V_i$ の時 $x_1=x_2=\cdots=x_i=y_a, x_{i+1}=x_{i+2}=\cdots=x_{n+1}=y_b$ とおくと、

$$z_j=\begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1}a_ky_a+\sum_{k=i}^{n}a_ky_b & (i\le j) \\ \sum_{k=1}^{i}a_ky_a+\sum_{k=i+1}^{n}a_ky_b & (i>j) \end{cases}$$

5.1.2　（2）

v_{n+1} として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $Av_{n+1}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_i \\ \sum_{i=1}^{n}a_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n}a_i \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$

よって v_{n+1} に対応する固有ベクトルは $\lambda_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i$

ここで $v_i\in V_i$ として

$$v_i=\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ b_i \\ \cdot \\ b_i \end{pmatrix}$$

とおく。この時 $Av_i=\lambda_iv_i$ より

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1}a_k+b_i\sum_{k=i}^{n}a_k=\lambda_i \text{ー（}A\text{）} \\ \sum_{k=1}^{i}a_k+b_i\sum_{k=i+1}^{n}a_k=b_i\lambda_i \text{ー（}B\text{）} \end{cases}$$

このとき（B）ー（A）より $a_i-b_ia_i=\lambda_i(b_i-1)\Leftrightarrow a_i(1-b_i)=(b_i-1)\lambda_i$

よって $\lambda_i=-a_i(i=1,2,\cdots,n)$

これを（A）に代入して $\sum_{k=1}^{i-1}a_k+b_i\sum_{k=i}^{n}a_k=-a_i$

これより $b_i=-\frac{\sum_{k=1}^{i}a_k}{\sum_{k=i}^{n}a_k}(i=1,2,\cdots,n)$

以上より求める固有値と固有ベクトルは

$\lambda_i = -a_i$ に対して $v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ -\frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{n} a_k} \\ \cdot \\ -\frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{n} a_k} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n)$

$\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$に対して $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$

5.2 ５番の総評

(1) は難しくないが、（２）は相当難しい。勘が必要である。難易度は５段階で 4.5。

6 ６番

６番

区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う独立な確率変数列 $U_1, U_2 \cdots U_n$ に対し、それらの積を用いて次のように確率変数列 $\{V_n\}$ を作る。
$V_n = \Pi_{i=1}^{n} U_i (i = 1, 2, 3, \cdots)$
便宜上、$V_0 = 1$ としておく。このとき、正定数 a に対して $V_n > e^{-a}$ を満たす最大の n を N と表す。N はどのような分布に従うか。理由をつけて述べよ。

6.1 解答

$P(N = n) = P(\{V_n > e^{-a}\} \cap \{V_{n+1} < e^{-a}\}) = P(V_n > e^{-a}) - P(V_{n+1} > e^{-a})$
$= P(U_1 U_2 \cdots U_n > e^{-a}) - P(U_1 U_2 \cdots U_n U_{n+1} > e^{-a})$
=$P(\sum_{i=1}^{n} - \log U_i < a) - P(\sum_{i=1}^{n+1} - \log U_i < a)$
これより $Y_n = \sum_{i=1}^{n} - \log U_i$ の分布を求める。
$X_i = - \log U_i (i = 1, 2, \cdots n)$ とおくとき
$f_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_{U_1 U_2 \cdots U_n}(u_1, u_2, \cdots u_n) \mid J \mid$

ここで $J = \begin{vmatrix} -e^{-X_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -e^{-X_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & -e^{-X_3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -e^{-X_n} \end{vmatrix} = (-1)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i}$

以上より $f_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n) = e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i} (0 < x_i < \infty)$

また $Y_j=\sum_{i=1}^{j} X_i (j=1,2,\cdots n)$ より $X_j=Y_j-Y_{j-1}$
このとき $f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)=\mid J\mid f_{X_1X_2\cdots X_n}$

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & -1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1$$

$f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)=e^{-y_n}(0<y_1<y_2<\cdots<y_n<\infty)$
よって $f_{Y_2\cdots Y_n}(y_2\cdots y_n)=\int_0^{y_2} f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)dy_1=y_2e^{-y_n}(0<y_2<\cdots<y_n<\infty)$
$f_{Y_3\cdots Y_n}(y_2\cdots y_n)=\int_0^{y_3} f_{Y_1\cdots Y_n}(y_1\cdots y_n)dy_1=\frac{y_3^2}{2!}e^{-y_n}(0<y_3<\cdots<y_n<\infty)$
これを繰り返すことによって $f_{Y_n}(y_n)=\frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}$
以上より求めたい確率は
$\int_0^a f_{Y_n}(y_n)dy_n-\int_0^a f_{Y_{n+1}}(y_{n+1})dy_{n+1}=\int_0^a \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}dy_n-\int_0^a \frac{y_{n+1}^n}{(n)!}e^{-y_{n+1}}dy_{n+1}$
$=\int_0^a \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y_n}dy_n-\{[-\frac{z^n}{n!}e^{-z}]_0^a+\int_0^a \frac{n}{n!}z^{n-1}e^{-z}dz\}$
$=\frac{a^n}{n!}e^{-a}$
以上より N は母数 a のポアソン分布に従う。

6.2　６番の総評

かなり骨があり、難しい問題。難易度は５段階で 4.5。

7　７番

７番

確率変数 X_1,X_2,X_3 はそれぞれ平均０、分散 σ^2 を持ち、２変数間の相関係数がいずれも $\rho(\rho>0)$ であるとする。確率変数 $Y=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3$ を考える。ただし、a_1,a_2,a_3 は実数で、$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ を満たしながら動くとする。
(1)Y の分散を $a_1,a_2,a_3,\sigma^2,\rho$ で表せ。
(2)Y の分散が最大となるような a_1,a_2,a_3 の値を求めよ。
(3)Y の分散が最小となるのは $a_1+a_2+a_3=0$ のときであることを示せ。

7.1　解答

7.1.1　（1）

$V[Y]=V[a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3]=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\sigma^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)\rho\sigma^2$
$=\sigma^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)\rho\sigma^2$

7.1.2 （２）

$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ という条件の下で、$a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3$を最大にすればよい。
$f(a_1,a_2,a_3)=a_1^2+a_2^2+a_3^2-1$
$g(a_1,a_2,a_3)=a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3$
$F(a_1,a_2,a_3,\lambda)=g+\lambda f$
とおいてラグランジュの未定乗数法を使うと
$(a_2+a_3)+2\lambda a_1=0$
$(a_1+a_3)+2\lambda a_2=0$
$(a_2+a_1)+2\lambda a_3=0$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$
これより $\lambda=-1$,$a_1+a_2+a_3=0, a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ の時 $V[Y]=\sigma^2+2\rho\sigma^2$
$a_1+a_2+a_3=0$ の時、$(a_1+a_2+a_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)=0$
よって $a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=-\frac{1}{2}$
この時 $V[Y]=\sigma^2-\rho\sigma^2$
よって $a_1=a_2=a_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ の時 $V[Y]$ が最大

7.1.3 （３）

(2) より)Y の分散が最小となるのは $a_1+a_2+a_3=0$ のときである。

7.2 ７番の総評

１０問の中で１番易しい問題。ラグランジュの未定乗数法もいい加減使い慣れたでしょう。難易度は５段階で 1.5。

8 ８番

８番

確率変数 X,Y の同時密度関数は
$f(x,y)=ce^{x-3y}-<x\leq y<\infty$
であるとする。
(1) 定数 c の値を求めよ
(2)X,Y の周辺密度関数 $f_1(x), f_2(x)$ を求めよ。
(3)X=x を与えたときの Y の条件付き密度関数 $f_2(y|x)$ を求めよ。
(4)X,Y の平均、分散はそれぞれいくらか。X と Y の相関係数はいくらか。

8.1 解答

8.1.1 （１）

$\int_0^\infty\int_0^y f(x,y)dxdy=1$ より
$c\int_0^\infty\{\int_0^y e^{x-3y}dx\}dy=1$

これを解いて c=6

8.1.2 （２）

$f_1(x) = \int_x^{\infty} 6e^{x-3y}dy = 2e^{-2x}$
$f_2(y) = \int_0^y 6e^{x-3y}dx = 6e^{-3y}(e^y - 1)$

8.1.3 （３）

$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = 3e^{3x-3y}$

8.1.4 （４）

$E[X] = \frac{1}{2}, E[Y] = \frac{5}{6}$
$V[X] = \frac{1}{4}, V[Y] = \frac{13}{36}$
$Cov(X,Y) = \frac{1}{4}$
$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

8.2 ８番の総評

１０問の中では２番目に取り組みやすい問題。難易度は５段階で２。

9 ９番

９番

$X_1 \cdots X_n$ を分散が有限な母集団から取られた無作為標本とし，$\hat{\theta}$ をその標本分散とする．さらに，$X_1 \cdots X_n$ から X_i を除いた n-1 個の標本での標本分散を $\hat{\theta_{(i)}}$ とおく．
$\hat{\theta_{(\cdot)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{\theta_{(i)}}, \tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)}$
とおくとき，$\tilde{\theta}$ は標本不偏分散に等しいことを示せ．

9.1 解答

$X_1 \cdots X_n$ から X_i を除いた n-1 個の標本の標本平均を $X_n^{(i)}$ とするとき，
$X_n^{(i)} = \frac{1}{n-1}\{\sum_{l=1}^n X_l - X_i\} = \frac{1}{n-1}(n\overline{X_n} - X_i)$($\overline{X_n}$ は $X_1 \cdots X_n$ の標本平均)
このとき $\hat{\theta}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - X_n^{(i)})^2 - \frac{1}{n-1}(X_i - X_n^{(i)})^2$
=$\frac{1}{n-1}\{\sum_{k=1}^n X_k^2 - 2X_n^{(i)}\sum_{k=1}^n X_k + n(X_n^{(i)})^2\} - \frac{1}{n-1}(X_i^2 - 2X_iX_n^{(i)} + (X_n^{(i)})^2)$
=$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n-1}X_i^2 + \frac{2X_n^{(i)}}{n-1}(X_i - n\overline{X_n}) + (X_n^{(i)})^2$
よって $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{\theta_{(i)}}$
=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n-1}X_i^2 + \frac{2X_n^{(i)}(X_i - n\overline{X_n})}{n-1} + (X_n^{(i)})^2\}$
=$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})X_n^{(i)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_n^{(i)})^2$

ここで $\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})X_n^{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - n\overline{X_n})(n\overline{X_n} - X_i)$
$=-\frac{n^3\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i$
また $\sum_{i=1}^n (X_n^{(i)})^2 = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n (n\overline{X_n} - X_i)^2$
$=\frac{n^3\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$
以上より $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n(n-1)}\{-\frac{n^3\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i\} + \frac{1}{n}\{\frac{n^3\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{2n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\}$
$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n^2\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} + \frac{2n\overline{X_n}^2}{(n-1)^2} - \frac{1}{n(n-1)^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$
よって $(n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n^2\overline{X_n}^2}{n-1} + \frac{2n\overline{X_n}^2}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2$
また $\hat{\theta}$ は標本分散なので $n\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$
よって $\tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2 - \sum_{k=1}^n X_k^2 + \frac{n^2-2n}{n-1}\overline{X_n}^2 + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2$
$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2$
また標本不偏分散は $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2$
以上より $\tilde{\theta}$ は標本不偏分散に等しい。

9.2　９番の総評

計算が非常に複雑。取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5。

10　１０番

１０番

$w_t, t \in Z$ は互いに独立で、それぞれ平均０分散１の正規分布に従うとする。$X_t = w_t + w_{t-1}, Y_t = w_t - w_{t-1}$ と定義するとき次の問に答えよ。ただし、Z は整数全体の集合とする。
(1) 各 $h \in Z$ に対して $E[X_{t+h}X_t]$ と E$[Y_{t+h}X_t]$ を求め、これらが h のみに依存し、t には依存しないことを示せ。
(2)$r(h) = E[X_{t+h}X_t], s(h) = E[Y_{t+h}X_t]$ と表すとき
$E[\{Y_{t+h} - X_t\}^2]$
を最小にする a を $r()$ と $s()$ を用いて表せ。

10.1　解答

10.1.1　（１）

$E[X_{t+h}X_t] = E[(w_{t+h} + w_{t+h-1})(w_t + w_{t-1})] = E[w_{t+h}w_t] + E[w_{t+h}w_{t-1}] + E[w_{t+h-1}w_t] + E[w_{t+h-1}w_{t-1}]$
$E[w_iw_j] = E[w_i]E[w_j] = 0$($w_i$と w_jは独立で平均は０なので)
よって $h=0$ の時 $E[X_tX_t] = E[w_t^2] + E[w_{t-1}^2] = 2$
$h=1$ の時 $E[X_{t+1}X_t] = E[w_t^2] = 1$
$h=-1$ の時 $E[X_{t-1}X_t] = E[w_{t-1}^2] = 1$
その他の時は０
$E[Y_{t+h}X_t] = E[(w_{t+h} - w_{t+h-1})(w_t + w_{t-1})] = E[w_{t+h}w_t] + E[w_{t+h}w_{t-1}] - E[w_{t+h-1}w_t] - E[w_{t+h-1}w_{t-1}]$
$h=0$ の時 $E[Y_tX_t] = 0$
$h=1$ の時 $E[Y_{t+1}X_t] = -1$

$h=-1$ の時 $E[Y_{t-1}X_t]=1$
以上より $E[X_{t+h}X_t], E[Y_{t+h}X_t]$ は h のみに依存し、t には依存しない。

10.1.2　（２）

$E[\{Y_{t+h}-aX_t\}^2]=E[Y_{t+h}^2]-2aE[Y_{t+h}X_t]+E[a^2X_t^2]$
=$2a^2-2aE[Y_{t+h}X_t]+E[Y_{t+h}^2]$
=$2(a-\frac{E[Y_{t+h}X_t]}{2})^2-\frac{E[Y_{t+h}X_t]^2}{2}+E[Y_{t+h}^2]$
よって $a=\frac{E[Y_{t+h}X_t]}{2}=\frac{s(h)}{2}$ の時 $E[\{Y_{t+h}-aX_t\}^2]$ は最小になる。

10.2　１０番の総評

結構簡単。難易度は５段階で２。

11　参考文献

$<$ 微積分 $>$
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
$<$ 線形代数 $>$
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
$<$ 統計 $>$
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
$<$ 複素関数 $>$
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
$<$ 常微分方程式 $>$
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
$<$ ルベーグ積分 $>$
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房