平成１６年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ とおくと
$f_{xx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$，$f_{yy} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$，$f_{xy} = f_{yx} = \frac{xy}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{xy}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r}$
これより $H = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2}g" + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' & \frac{xy}{x^2+y^2}g" - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' \\ \frac{xy}{x^2+y^2}g" - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' & \frac{y^2}{x^2+y^2}g" + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}g' \end{pmatrix}$

1.1.2　（2）

$\frac{\partial g}{\partial r} = -2re^{-r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = e^{-r^2}(4r^2-2)$
これより $\mid H - tE \mid = \begin{vmatrix} (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} - t & 4xye^{-x^2-y^2} \\ 4xye^{-x^2-y^2} & (4y^2-2)e^{-x^2-y^2} - t \end{vmatrix} = t^2 - (4r^2-4)e^{-r^2}t + 4(1-2r^2)e^{-2r^2} = 0$
これを解くと $\lambda_1 = -2e^{-r^2}, \lambda_2 = e^{-r^2}(4r^2-2)$

1.2　１番の総評

チェインルール頑張ってください。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$c \times x = \begin{pmatrix} c_2x_3 - c_3x_2 \\ c_3x_1 - c_1x_3 \\ c_1x_2 - c_2x_1 \end{pmatrix}$ $A \times x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$
よって $c \times x = A \times X$ とおくと $A = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$$A^2 = \begin{pmatrix} -c_3^2 - c_2^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_3^2 - c_1^2 & c_3c_2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & c_3(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & -c_2(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \\ -c_3(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & 0 & c_1(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \\ c_2(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & -c_1(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & 0 \end{pmatrix} = -(c_1^2+c_2^2+c_3^2)A$$

2.1.3 （３）

(2) より n が偶数の時は
$A^n = -(c_1^2+c_2^2+c_3^2)A^{n-2}$
$= (c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2A^{n-4}$
= ⋯
=$(-1)^{\frac{n}{2}-1}(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^{\frac{n}{2}-1}A^2$
=$(-1)^{\frac{n}{2}-1}(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^{\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix}-c_3^2-c_2^2 & c_1c_2 & c_1c_3\\ c_1c_2 & -c_3^2-c_1^2 & c_3c_2\\ c_1c_3 & c_2c_3 & -c_1^2-c_2^2\end{pmatrix}$
n が奇数の時は
$A^n = -(c_1^2+c_2^2+c_3^2)A^{n-2}$
=$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^{\frac{n-1}{2}}A$
=$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}0 & -c_3 & c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{pmatrix}$

2.2 ２番の総評

(3) は思いつき次第で計算が非常に楽になる。難易度は５段階で 2.5 か３。

3 ３番

3.1 予備知識

A を n 次の実対称行列とする時、次の二つの命題は同値
(1)0 でない全てのベクトルに対して ${}^txAx > 0$
(2)A の全ての固有値が $\lambda_i > 0$

3.2 解答

3.2.1 （１）

x を０でないベクトルとする時
${}^txBx = {}^tx\,{}^tAAx = (Ax)^tAx- \| Ax \|^2 \geq 0$
よって B は正定値行列なので定理より B の固有値は全て非負である。

3.2.2 （２）

$\| Ax \| = \sqrt{{}^t(Ax)(Ax)} = \sqrt{{}^tx\,{}^tAAx}$
ここで P を B を対角化する直交行列とし、$x = Py$ とおくと
$\| Ax \| = \sqrt{{}^ty\,{}^tP\,{}^tAAPy} = \sqrt{{}^ty\,{}^tPBPy}$

$= \sqrt{{}^t y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} y}$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$とする$)$
$= \sqrt{\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$
ここで ${}^t yy = {}^t xP\, {}^t Px = {}^t xx = 1$
よって $\|Ax\| \leq \sqrt{\lambda_1(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$
以上より $\sup_{x \in R^n ||x||=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda}$
同様に $\inf_{x \in R^n ||x||=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\mu}$

3.3 ３番の総評

正定値行列に関する知識がないとできない。難易度は５段階で４。

4 ４番

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （１）

$E[X] = V[X] = \lambda$

5.1.2 （２）

$l_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\lambda) = \sum_{i=1}^n \log e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \sum_{i=1}^n (-\lambda + x_i \log \lambda - \log(x_i!))$
これより $S_n = l'_n(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda}$
よって $E[S_n] = -n + \frac{1}{\lambda} n\lambda = 0$
$V[X] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n V[X_i] (X_1 \cdots X_n$は無作為標本なので$)$
$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot n\lambda = \frac{n}{\lambda}$

5.1.3 （３）

$S_n = 0$ とおくと $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ となり、λ について増減表を書くと $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ で極大となることが分かる。
よってこれが λ の最尤推定量であり、$E[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$
$V[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n}$
ここで λ に関する X のフィッシャー情報量を $I(\lambda)$ とおくと
$I(\lambda) = E[(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(X, \lambda))^2] = E[(-1 + \frac{X_i}{\lambda})^2] = \frac{1}{\lambda}$
よって $X_1 \cdots x_n$ の λ に対するフィッシャー情報量は $\frac{n}{\lambda}$
ここで $V[\lambda] = \frac{\lambda}{n}$ より λ の分散はクラメルラオの下限を達成しているので λ は有効推定量である。

5.2 ５番の総評

推定量の性質に関する知識があれば十分取り組める。難易度は５段階で３。

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （１）

$F_1(x) = F(x, \infty) = (1 - e^{-x}), F_2(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y}, f_1(x) = e^{-x}, f_2(y) = e^{-y}$

6.1.2 （２）

$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4\alpha e^{-2x-2y} - 2\alpha e^{-x-2y} - 2\alpha e^{-2x-y} + (\alpha + 1)e^{-x-y}$

6.1.3 （３）

$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = 4\alpha e^{-x-2y} - 2\alpha e^{-2y} - 2\alpha e^{-x-y} + (\alpha + 1)e^{-y}$

6.1.4 （４）

$E[X] = 1, V[X] = 1, E[Y] = 1, V[Y] = 1, E[XY] = \frac{\alpha}{4} + 1$
$Cov(X, Y) = \frac{\alpha}{4}, \rho_{X,Y} = \frac{\alpha}{4}$

6.2 ６番の総評

非常に取り組みやすい統計の問題。難易度は５段階で２。

7 全体的な総評

選択問題は５と６をやるのがいいと思われる。３と４は難しいので統計ができないと極めて苦しい。

8 参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >

・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房