平成１６年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$e^{i\theta} = z$ とおくと、$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$
また $\frac{dz}{d\theta} = iz$
よって (与式)=$\int_{|z|=1} \frac{1}{(1+\frac{a}{2}(z+\frac{1}{z}))^3} \cdot \frac{dz}{iz} = -i\int_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+\frac{a}{2}(z^2+1))^3} dz$
ここで $f(z) = \frac{z^2}{(z+\frac{a}{2}(z^2+1))^3}$ とおくと、$f(z)$ の特異点は $z = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$
$0 < a < 1$ より $\mid z \mid= 1$ とその内部にあるのは $z = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$ で３位の極。
よって $Res_{z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}} f(z) = \frac{a^2}{8(1-a^2)}\{\frac{3(a-2)}{a-1} - \frac{2(2a+3)}{\sqrt{1-a^2}}\}$
よって (与式)=$2\pi i(-i)Res_{z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}} f(z) = \frac{a^2\pi}{4(1-a^2)}\{\frac{3(a-2)}{a-1} - \frac{2(2a+3)}{\sqrt{1-a^2}}\}$

1.2　１番の総評

計算間違ってるかも ∵ 基本的な複素積分の問題。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（１）

$\frac{\partial}{\partial t}(1 + tu(x))\log(1 + tu(x)) = u(x)(1 + \log(1 + tu(x))$
$\forall t \in [0, 1]$ で $\infty > m > 1 + tu(x) > inf_{t,x}(1 + tu(x)) = 0$
$M > log(1 + tu(x)) > a' > -\infty$
これより $-\infty < a \leq (1 + tu(x))\log(1 + tu(x)) \leq Mm < \infty$
よって $\int_0^1 (u(x)(1 + \log(1 + tu(x)))dx < \infty$
また $(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))$ は $\forall t \in [0, 1]$ を固定した時、x の関数として可積分
$(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))$ は t について C^1 関数。
以上より微積分の順序交換可能定理から
$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 (1 + tu(x))\log(1 + tu(x))dx$
$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(1 + tu(x))\log(1 + tu(x))dx$
$= 2\int_0^1 u(x)\log(1 + tu(x))dx$
よって $F'(t) = 2\int_0^1 u(x)\log(1 + tu(x))dx - 2t\{\int_0^1 \mid u(x) \mid dx\}^2$
同様にして $F"(t) = 2\int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx - 2\{\int_0^1 \mid u(x) \mid dx\}^2$

2.1.2　（２）

シュワルツの不等式より
$(\int_0^1 \mid u(x) \mid dx)^2 = (\int_0^1 \frac{|u(x)|}{\sqrt{1+tu(x)}}\sqrt{1 + tu(x)}dx)^2 \leq \int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx \int_0^1 (1 + tu(x))dx$
条件より $\int_0^1 (1 + tu(x))dx = 1$ なので
$(\int_0^1 \mid u(x) \mid dx)^2 \leq \int_0^1 \frac{u^2(x)}{1+tu(x)}dx$
これより $F"(t) \geq 0$ が言えた。

また $F'(0)=2\int_0^1 u(x)dx=0$ なので $F'(t)\geq 0$。
よって F(t) は単調増加関数である。

2.2　２番の総評

微積分の順序交換可能定理を使えないとだめなのでなかなか難しい。その説明はだいぶ省いた（書くのがだるかったから)。難易度は５段階で４。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（１）

$\dot{F}(x,y)=\frac{2}{a}x^{\frac{2}{a}-1}\dot{x}(\frac{x^2}{1+a}-y^2)+x^{\frac{2}{a}}(\frac{2x}{1+a}\dot{x}-2y\dot{y})=\frac{2}{a}x^{\frac{2}{a}-1}\cdot axy\cdot(\frac{x^2}{1+a}-y^2)+x^{\frac{2}{a}}(\frac{2ax^2y}{1+a}-2y(x^2-y^2))=0$
よって $x(0)\neq 0$ である解上で F(x,y) は一定

3.1.2　（２）

$F(x,y)=-\frac{x^2+y^2}{x}=C$（(1) より）
よって $(x+\frac{C}{2})^2+y^2=\frac{C^2}{4}$ となるので $x(0)\neq 0$ であるすべての解が有界

3.1.3　（３）

$F(x,y)=x(\frac{x^2}{3}-y^2)=C$ より非自明解は非有界

3.2　３番の総評

あまりやったことのない問題で取り組みやすいとは言えない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（１）

$(u_i,u_k)=0(1\leq i<k)$ と仮定する
このとき $(u_i,u_{k+1})=(u_i,a_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(a_{k+1},u_j)}{(u_j,u_j)}u_j)$
=$(u_i,a_{k+1})-\frac{(a_{k+1},u_1)}{(u_1,u_1)}(u_i,u_1)-\frac{(a_{k+1},u_2)}{(u_2,u_2)}(u_i,u_2)-\cdots\cdot-\frac{(a_{k+1},u_i)}{(u_i,u_i)}(u_i,u_i)-\cdots-\frac{(a_{k+1},u_k)}{(u_k,u_k)}(u_i,u_k)$
$=(u_i,a_{k+1})-(a_{k+1},u_i)$(仮定より)
$=0$
また $(u_k,u_{k+1})=(u_k,a_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(a_{k+1},u_j)}{(u_j,u_j)}u_j)$
=$(u_k,a_{k+1})-\frac{(a_{k+1},u_1)}{(u_1,u_1)}(u_i,u_1)-\frac{(a_{k+1},u_2)}{(u_2,u_2)}(u_i,u_2)-\cdots\cdot-\frac{(a_{k+1},u_i)}{(u_i,u_i)}(u_i,u_i)-\cdots-\frac{(a_{k+1},u_k)}{(u_k,u_k)}(u_i,u_k)$

$=(u_k,a_{k+1})-(a_{k+1},u_k)$(仮定より)
$=0$
また $(u_1,u_2)=(a_1,a_2)-\frac{(a_1,a_2)}{(a_1,a_1)}(a_1,a_1)=0$
よって帰納的に $(u_i,u_j)=0(1\leq i,j\leq m-1.i\neq j)$
これより $^tUU=\begin{pmatrix} {}^tu_1u_1 & {}^tu_1u_2 & \cdot\cdot\cdot & {}^tu_1u_n \\ {}^tu_2u_1 & {}^tu_2u_2 & \cdot\cdot\cdot & {}^tu_2u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ {}^tu_nu_1 & {}^tu_nu_2 & \cdot\cdot\cdot & {}^tu_nu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tu_1u_1 & 0 & \cdot\cdot\cdot & 0 \\ 0 & {}^tu_2u_2 & 0\cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot\cdot & {}^tu_nu_n \end{pmatrix}$
以上より t^UU は対角成分が全て正の対角行列である。

4.1.2 （2）

$a_1,\cdots a_n$ が１次独立の時、$a_1\cdots a_n$ を縦ベクトルとする行列 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdot\cdot & a_n \end{pmatrix}$ の行列式は
$|A|\neq 0$ を満たす
このとき $\begin{vmatrix} u_1 & u_2+\frac{(a_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot\cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}\neq 0$
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot\cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}$
$+\begin{vmatrix} u_1 & \frac{(a_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot\cdot & u_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a_n,u_k)}{(u_k,u_k)}u_k \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3+\frac{(a_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1+\frac{(a_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 & \cdot\cdot$
じ列を含む行列の行列式は０なので)
これを繰り返して
$\begin{vmatrix} u_1 & \cdot\cdot\cdot\cdot & u_n \end{vmatrix}\neq 0$ をえる。よって命題１と命題２は同値である。

4.2 ４番の総評

難しくはないが、易しくもない。難易度は５段階で 3.5。

5 ５番

5.1 解答

5.1.1 （1）

$J(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=\frac{1}{2}(x_1-a_1)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_n-a_n)^2-\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots+a_n^2)\geq -\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots+a_n^2)$
よって $J(x)$ は下から有界

5.1.2 （2）

(左辺)=2$\{\frac{1}{2}\mid\mid \frac{x+y}{2}\mid\mid^2-(a,\frac{x+y}{2})\}+\frac{1}{4}\mid\mid x-y\mid\mid^2$
=$\frac{1}{4}\{\mid\mid x+y\mid\mid^2+\mid\mid x-y\mid\mid^2\}-(a,x+y)$
=$\frac{1}{4}\{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2+(x_1-y_1)^2+\cdot\cdot+(x_n-y_n)^2-a_1(x_1+y_1)\cdots-a_n(x_n+y_n)\}$
=$\frac{1}{2}\mid\mid x\mid\mid^2-(a,x)+\frac{1}{2}\mid\mid y\mid\mid^2-(a,y)$
=$J(x)+J(y)$

5.1.3 （3）

(1) より $\int_{x\in R^n} J(x) = -\frac{1}{2}a^T a$ より $J(x)$ は最小値を達成する

5.2 ５番の総評

(3) の解答がちょっと微妙だが、(1) と (2) は極めて簡単。難易度は５段階で３か 3.5。

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （1）

測定法 [1]:a,b の推定量はそれぞれ X_1, X_2
測定法 [2]:$E[Y_1] = a+b, E[Y_2] = a-b$ より a,b の推定量は $\frac{Y_1+Y_2}{2}, \frac{Y_1-Y_2}{2}$
測定法 [3]:$E[Z_1] = a, E[Z_2] = a+b$ より a,b の推定量は $Z_1, Z_2 - Z_1$

6.1.2 （2）

$V[X_1] = V[X_2] = 1$
$V[\frac{Y_1+Y_2}{2}] = \frac{1}{2}, V[\frac{Y_1-Y_2}{2}] = \frac{1}{2}$
$V[Z_1] = 1, V[Z_2 - Z_1] = 2$
よって測定２が分散が一番小さくて優れており、測定３が分散が一番大きく優れていない。

6.2 ６番の総評

どれくらい記述すればいいのかが分かりにくいが取り組みやすい問題。難易度は５段階で３。

7 ７番

7.1 解答

7.1.1 （1）

$f_2(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_2(x+h)-F_2(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P\{x \le X_{(2)} \le x+h\}$
$P\{x \le X_{(2)} \le x+h\} = \frac{3!}{1!1!1!}\{F(x)\}^1\{F(x+h)-F(x)\}^1\{1-F(x+h)\}^1$(F は $X_1 \cdots X_{2n-1}$ の分布関数)
よって $f_2(x) = \lim_{h\to 0} 6 \cdot F(x) \cdot \frac{F_(x+h)-F_(x)}{h}\{1-F(x+h)\} = 6F(x)f(x)(1-F(x)) = 6x(1-x)$
このとき $f_2(x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3$
また $E[X_2(x)] = \int_0^1 xf_2(x)dx = \frac{1}{2}$
$E[X_2^2(x)] = \int_0^1 xf_2(x)dx = \frac{3}{10}$
$V[X_2(x)] = \frac{1}{20}$

7.1.2 （2）

$f_n(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{x\le X_{(n)}\le x+h\}$
$P\{x\le X_{(n)}\le x+h\}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\{F(x)\}^{n-1}\{F(x+h)-F(x)\}\{1-F(x+h)\}^{n-1}$
よって $f_n(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\{F(x)\}^{n-1}\frac{F_(x+h)-F_(x)}{h}\{1-F(x+h)\}^{n-1}$
$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}f(x)\{1-F(x)\}^{n-1}\{F(x)\}^{n-1}$
$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\cdot 1\cdot(1-x)^{n-1}x^{n-1}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}(1-x)^{n-1}x^{n-1}$
また $E[X_{(n)}(x)]=\int_0^1 xf_n(x)dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}B(n+1,n)=\frac{1}{2}$
$E[X_{(n)}^2(x)]=\int_0^1 x^2f_n(x)dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}B(n+2,n)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{2n+1}$
$V[X_{(n)}(x)]=\frac{1}{4(2n+1)}$

7.2 ７番の総評

順序統計量についての知識がないとやりにくい。難易度は５段階で 3.5。

8 ８番

8.1 解答

8.1.1 （1）

$$\begin{cases} S_1=X_1 \\ S_2=X_1+X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n=X_1+\cdots+X_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1=S_1 \\ X_2=S_2-S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n=S_n-S_{n-1} \end{cases} \qquad (0<S_1<S_2<\cdots<S_n)$$

よって $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_1}{\partial S_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_2}{\partial S_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial S_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial X_n}{\partial S_n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$

よって $f_{S_1\cdots S_n}=|J|f_{X_1\cdots X_n}(s_1,s_2-s_1,\cdots,s_n-s_{n-1})$
$=f_{X_1}(s_1)f_{X_2}(s_2-s_1)\cdots f_{X_n}(s_n-s_{n-1})$($X_1\cdots X_n$は独立なので)
$=\lambda^n e^{-\lambda s_n}$
これより $f_{S_2\cdots S_n}=\int_0^{s_2}f_{S_1\cdots S_n}ds_1=\lambda^n s_2 e^{-\lambda s_n}(0<S_2<\cdots<S_n)$
これを繰り返して $f_{S_n}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}$
これより $f_n(s)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}s^{n-1}e^{-\lambda s}$

8.1.2　（2）

T の密度関数を $p(t)$ とするとき $p(t)=\frac{1}{\lambda^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\frac{1}{\lambda}t}$
よって $g(s,t)=\frac{1}{(\Gamma(n))^2}(st)^{n-1}e^{-\frac{1}{\lambda}t-\lambda s}$

8.1.3　（3）

$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial S}{\partial W} & \frac{\partial S}{\partial U}\\ \frac{\partial T}{\partial W} & \frac{\partial T}{\partial U}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{U} & -\frac{W}{U^2}\\ U & W\end{vmatrix}=\frac{2W}{U}$
これより $h(u,w)=\mid J\mid g(s,t)=\frac{2w}{u}g(\frac{w}{u},uw)=\frac{2}{(\Gamma(n))^2}\frac{w^{2n-1}}{u}e^{-\frac{1}{\lambda}uw-\lambda\frac{w}{u}}$

8.1.4　（4）

$h_1(u)=\int_0^\infty h(u,w)dw=\frac{2}{(\Gamma(n))^2u}\int_0^\infty w^{2n-1}e^{-(\frac{u}{\lambda}+\frac{\lambda}{u})w}dw$
$(\frac{u}{\lambda}+\frac{\lambda}{u})w=t$ とおくと $\frac{dt}{dw}=\frac{u^2+\lambda^2}{\lambda u}$
これより $h_1(u)=\frac{2}{(\Gamma(n))^2}(\frac{\lambda}{u^2+\lambda^2})^{2n}(\frac{u}{u^2+\lambda^2})^{2n-1}\int_0^\infty t^{2n-1}e^{-t}dt$
$=\frac{2\Gamma(2n)}{\{\Gamma(n)\}^2}\frac{\lambda^{2n}u^{2n-1}}{(u^2+\lambda^2)^{2n}}$
$h_2(w|u)=\frac{h(u,w)}{h_1(u)}=\frac{w^{2n-1}(u^2+\lambda^2)^{2n}}{\Gamma(2n)\lambda^{2n}u^{2n}}e^{-\frac{1}{\lambda}uw-\lambda\frac{w}{u}}$

8.2　８番の総評

解答は長いが、一つ一つの問題は難しくはない。難易度は５段階で３か 3.5。

9　９番

9.1　解答

$$\begin{cases}X_1=\sqrt{\frac{m}{R}}Z_1\\ X_2=\sqrt{\frac{m}{R}}Z_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X_p=\sqrt{\frac{m}{R}}Z_p\\ Y=\sqrt{R}\end{cases}\quad \text{とおくと}\quad \begin{cases}Z_1=\frac{Y}{\sqrt{m}}X_1\\ Z_2=\frac{Y}{\sqrt{m}}X_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ Z_p=\frac{Y}{\sqrt{m}}X_p\\ R=Y^2\end{cases}$$

よって $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial Z_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_1}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_1}{\partial Y}\\ \frac{\partial Z_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_2}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_2}{\partial Y}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial Z_p}{\partial X_1} & \frac{\partial Z_p}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial Z_p}{\partial X_p} & \frac{\partial Z_p}{\partial Y}\\ \frac{\partial R}{\partial X_1} & \frac{\partial R}{\partial X_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial R}{\partial X_p} & \frac{\partial R}{\partial Y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{Y}{\sqrt{m}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{X_1}{\sqrt{m}}\\ 0 & \frac{Y}{\sqrt{m}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{X_2}{\sqrt{m}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{Y}{\sqrt{m}} & \frac{X_p}{\sqrt{m}}\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2Y\end{vmatrix}=\frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p}$

よって $f_{X_1,X_2,\cdots X_p,Y} = \frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} f_{Z_1,\cdots Z_p,R}(z_1 \cdots z_p, r) = \frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} f_{Z_1,\cdots Z_p,R}(\frac{yx_1}{\sqrt{m}}, \cdots, \frac{yx_p}{\sqrt{m}}, y^2)$
$=\frac{2Y^{p+1}}{(\sqrt{m})^p} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p} e^{-\frac{y^2}{2m}(x_1^2+\cdots x_p^2)} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} y^{m-2} e^{-\frac{y^2}{2}}$
よって $f_{X_1,X_2,\cdots X_p}(x_1, x_2, \cdots x_p) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2,\cdots X_p,Y} dy$
$\frac{y^2}{2m}(x_1^2 + \cdots x_p^2) = t$ とおくと $\frac{dt}{dy} = y(\frac{m+x_1^2+\cdots x_p^2}{m})$
このとき $f_{X_1,X_2,\cdots X_p}(x_1, x_2, \cdots x_p) = \frac{2}{(\sqrt{2\pi m})^p \Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{-t} \{\sqrt{\frac{2mt}{m+x_1^2+\cdots x_p^2}}\}^{p+m-1} \sqrt{\frac{m+x_1^2+\cdots x_p^2}{2mt}} \frac{m}{m+x_1^2+\cdots x_p^2} dt$
$=\frac{m^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+p}{2})}{(m+x_1^2+\cdots x_p^2)^{\frac{m+p}{2}}}$

9.2　９番の総評

計算が難しく、取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

10　１０番

10.1　解答

10.1.1　（１）

正規分布の再生性より $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{2\sigma^2}{n})$
H_0 の下で $\overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$
H_1 の下で $\overline{X_n} - \overline{Y_n} \sim N(\delta, \frac{2\sigma^2}{n})$
ここで H_0 の下で $p(\overline{X_n} - \overline{Y_n} > p) = \alpha$
H_1 の下で $p(\overline{X_n} - \overline{Y_n} < p) = \beta$ とおいて正規化すると
$p(\frac{\overline{X_n} - \overline{Y_n}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} > \frac{p}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}) = \alpha$
$p(\frac{\overline{X_n} - \overline{Y_n} - \delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} < \frac{p-\delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}) = \beta$
$\frac{p}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} = z_\alpha, \frac{p-\delta}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} = z_{1-\beta} = -z_\beta$
これを解いて $n = \frac{2\sigma^2(z_\alpha + z_\beta)^2}{\delta^2}$(切り上げが必要)

10.1.2　（２）

(1) より δ の値を大きくしていくと、n の値は小さくなっていく。
よって n を $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ の時と同じ値にすればよい。

10.1.3　（３）

検出力は $1 - \beta = 0.80$ より $\beta = 0.20$
よって (1) と (2) より $n \geq \frac{2\times0.09}{0.01}(1.645 + 0.842)^2 = 111.3$
よって 112 回以上の実験が必要

10.2　１０番の総評

検出力についての知識がないとできない。難易度は５段階で 3.5 くらい。

全体的な総評

まず、１番は必答。次に５，６，８が解きやすい。難易度５の問題は見受けられないが、2.5 以下の問題もなく、標準よりやや難しめの問題が目立つ。

11　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房