平成１７年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ より $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(r>0$ より$)$
ここで $\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}=\frac{x_2^2+x_3^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{\partial r}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}=\frac{x_1^2+x_3^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{\partial r}{\partial x_3}=\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$
よって $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1})$
$=\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial r})\frac{\partial r}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_1})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$
同様にして $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_2})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x_3})^2+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}$
以上より $(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial g}{\partial r}\frac{2}{r}=g"(r)+\frac{2}{r}g'(r)$

1.1.2　（2）

$i=1$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_1^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r^{m+2}})=\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot m(m+1)r^{-m-2}$
$i=2$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_2^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r^{m+2}})=\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot m(m+1)r^{-m-2}$
$i=3$ の時
$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{x_3^2}{r^{m+2}})=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{r^2\cos^2\theta}{r^{m+2}})=\cos^2\theta\cdot m(m+1)r^{-m-2}$

1.2　１番の総評

またまたチェインルールの問題。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

a の値は $1,-\frac{5}{4}$
$a=1$ の時
固有値 $t=-2$（重解）に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

固有値 $t=1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$a=-\frac{5}{4}$ の時

固有値 $t=-\frac{1}{2}$（重解）に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

固有値 $t=-2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

2.2　２番の総評

かなり簡単な問題。計算間違いしないように。難易度は５段階で 1 か 1.5 くらい。

3　３番

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

$\cos u=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \cos v=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$ より
$\cos^2 u=\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}, \cos^2 v=\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}$
ここで $\sin^2 u=1-\cos^2 u=1-\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}=\frac{x^2(1-y^2)}{1-x^2y^2}=x^2\cos^2 v$
よって $x=\frac{\sin u}{\cos v}(0<x<1)$ より
また $\sin^2 v=1-\cos^2 v=1-\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}=\frac{y^2(1-x^2)}{1-x^2y^2}=y^2\cos^2 u$
よって $y=\frac{\sin v}{\cos u}(0<y<1)$ より

4.1.2　（2）

$x=\frac{\sin u}{\cos v}, y=\frac{\sin v}{\cos u}$ より
$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin v\sin u}{\cos^2 v}\\ \frac{\sin v\sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{vmatrix}=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u}$
よって $I=\iint_\Delta \frac{1}{1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u}}(1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 v\cos^2 u})dudv=\iint_\Delta 1dudv=\frac{\pi^2}{8}$

4.2　４番の総評

(1) はこの解答のようにやることによって大幅に計算量を減らすことができる。難易度は５段階で 3.5 くらい。

5　5番

5番

事象 A,B,C とそれらの余事象 A^c, B^c, C^c に対して、記号
$A_1 = A, A_2 = A^c, B_1 = B, B_2 = B^c, C_1 = C, C_2 = C^c$
を用いて表現するとき、
$P(A_i \cap B_j \cap C_k) > 0 (i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2)$
であると仮定する。任意の事象 W に対して、次の条件付確率測度
$Q(W) = R(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)}$
$R(W) = P(W|A^c) = \frac{P(A^c \cap Q)}{P(A^c)}$
を定義する。次の問いに答えよ。
(1)$Q(B) = R(B)$ が成り立つとき、事象 A,B,C はどのような関係にあるか？
(2) 条件付き確率 $P(C|A, B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)}$ を Q(・) を用いて表せ。また条件付き確率 $P(C|A^c, B) = \frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c \cap B)}$ を Q(・) を用いて表せ。
(3) 次の二つの式：
$\frac{P(C|A,B)}{P(C|A^c,B)} = \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\frac{P(C|A,B^c)}{P(C|A^c,B^c)} = \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
が成り立つとき事象 A、B が独立であるか、または条件付き確率測度 $Q(\cdot)$ に関して事象 B,C が独立であることを証明せよ。

5.1　解答

5.1.1　（1）

$Q(B) = R(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ よって事象 A と B は独立である。

5.1.2　（2）

$Q(B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}$
$Q(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
よって $\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)}}{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}} = \frac{Q(B \cap C)}{Q(B)}$
$R(B \cap C) = \frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c)}$
$R(B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$
よって $\frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c \cap B)} = \frac{\frac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c)}}{\frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}} = \frac{R(B \cap C)}{R(B)}$

5.1.3 （3）

$\frac{P(C|A,B)}{P(C|A^c,B)}=\frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}}{\frac{P(A^c\cap B\cap C)}{P(A^c\cap B)}}=\frac{\frac{P(A\cap C)}{P(A)}}{\frac{P(A^c\cap C)}{P(A^c)}}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}}{\frac{R(B\cap C)}{R(B)}}=\frac{Q(C)}{R(C)}$ （(2) より）
$\Leftrightarrow \frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}=\frac{R(B\cap C)}{R(B)}\frac{Q(C)}{R(C)}$ ー（A）
同様にして $\frac{P(C|A,B^c)}{P(C|A^c,B^c)}=\frac{P(C|A)}{P(C|A^c)}$
$\Leftrightarrow \frac{\frac{Q(B^c\cap C)}{Q(B^c)}}{\frac{R(B^c\cap C)}{R(B^c)}}=\frac{Q(C)}{R(C)}$ （(2) より）
$\Leftrightarrow \frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)}{R(C)}\frac{R(C)-R(B\cap C)}{1-R(B)}$ ー（B）
（A）より $R(B\cap C)=\frac{Q(B\cap C)R(C)R(B)}{Q(B)Q(C)}$
これを（B）に代入して $\frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)}{R(C)}\frac{R(C)-\frac{Q(B\cap C)R(C)R(B)}{Q(B)Q(C)}}{1-R(B)}$
$\Leftrightarrow \frac{Q(C)-Q(B\cap C)}{1-Q(B)}=\frac{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)R(B)}{Q(B)}}{1-R(B)}$
$\Leftrightarrow R(B)\{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}=Q(B)Q(C)-Q(B\cap C)\}$
$\Leftrightarrow (R(B)-Q(B))\{Q(C)-\frac{Q(B\cap C)}{Q(B)}\}$
これより $R(B)=Q(B),Q(B)Q(C)=Q(B\cap C)$ が成立するので事象 A、B が独立であるか、または条件付き確率測度 $Q(\cdot)$ に関して事象 B,C が独立である

5.2 ５番の総評

(1) と (2) はできるだろうが、(3) は結構取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

6 ６番

６番

(1) ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の確率密度関数は次のように定義される。
$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}x>0$
ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の平均と分散を求めよ。
(2)U を一様分布に従う確率変数とする。$U=\alpha$ を与えた下で X,Y は互いに独立な確率変数で、それぞれガンマ分布 $G_A(\alpha,1),G_A(1-\alpha,1)$ に従うとする。区間 [0,1] 上の点 $Q(0,0),P(U,0),A(1,0)$ に対して、OP を底辺とし高さ X の長方形 $OPQR$ と、PA を底辺とし高さ Y の長方形 $PABC$ を考え、それらの面積を S_1,S_2 とする。この時 S_1,S_2 の平均、分散、共分散、相関係数を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （1）

$E[X]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^\alpha e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha$
$E[X^2]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}=(\alpha+1)\alpha$
よって $V[X]=(\alpha+1)\alpha-\alpha^2=\alpha$

6.1.2　（２）

$f_{X,Y|U}(x,y,u) = \frac{f_{X,Y,U}(x,y,u)}{f_U(u)}$ で、$U = u$ を与えた時に X,Y は互いに独立に、$G_A(\alpha,1)$、$G_A(1-\alpha,1)$ に従うので
$f_{X,Y,U}(x,y,u) = \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y} \quad (f_U(u) = 1$ なので)
ここで $E[S_1] = \int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty \frac{ux}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du = \frac{1}{3}$
$E[S_1^2] = \int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty \frac{u^2x^2}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du = \frac{9}{20}$
$E[S_2] = \int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty \frac{(1-u)y}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du = \frac{1}{3}$
$E[S_2^2] = \int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty \frac{(1-u)^2y^2}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du = \frac{9}{20}$
よって $V[S_1] = E[S_1^2] - E[S_1]^2 = \frac{61}{180}$,$V[S_2] = E[S_2^2] - E[S_2]^2 = \frac{61}{180}$
$E[S_1S_2] = \int_0^1\{\int_0^\infty\{\int_0^\infty \frac{(1-u)y\cdot ux}{\Gamma(u)\Gamma(1-u)}x^{u-1}y^{-u}e^{-x-y}dx\}dy\}du = \frac{1}{30}$
よって $Cov(S_1,S_2) = -\frac{7}{90}$
これより $\rho_{S_1,S_2} = \frac{Cov(S_1,S_2)}{\sqrt{V[S_1]}\sqrt{V[S_2]}} = \frac{-14}{61}$

6.2　６番の総評

統計の問題にしてはあまり取り組みやすくない。難易度は５段階で３。

7　全体的な総評

必答の２問はあまり難しくはないが、選択問題はどれもやりにくく、完答は難しいだろう。（難問ではないが）

8　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >

・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房