平成１７年度　情報数理系　数理科学分野２
解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$\iint_D (x\cos y)\exp(-\frac{x^2(1+y^2)}{2})dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{e}$

1.2　１番の総評

１０問の中で１番易しい。難易度は５段階で 1.5。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\frac{dx}{dt} = -a + be^x \geq -a$
$X(0) = 0$ より $x(t) - at$
よって $x(t)$ が存在する範囲内で、$x(t) \geq -at$

2.1.2　（2）

方程式の両辺に $e^{-x(t)}$ をかけると
$e^{-x(t)}\frac{dx}{dt} = -ae^{-x(t)} + b$ $y(t) = e^{-x(t)}$ とおくと、$-\frac{dy}{dt} = -ay(t) + b$
この常微分方程式を初期条件を考慮して解くと $y(t) = \frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}$
これより $e^{-x(t)} = \frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}$ なので $-x(t) = \log(\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at})$
よって $x(t) + at = at - \log(\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{at}) = \log(\frac{e^{at}}{\frac{b}{a} + (1-\frac{b}{a})e^{at}}) = \log(\frac{1}{\frac{b}{a}e^{-at} + (1-\frac{b}{a})})$
これより $\lim_{t\to\infty} x(t) + at = \log(\frac{1}{1-\frac{b}{a}})$
この値が存在するためには $1 - \frac{b}{a} > 0$ よって $a > b$

2.2　２番の総評

(2) はかなり難しい。答案は非常にシンプルであるが‥ 難易度は５段階で 4.5。

3　３番

3.1　解答

3.1.1　（1）

$HF^j = HF \cdot F^{j-1}$
=$(FH - 2F)F^{j-1}$ ((a) より)
=$FHF^{j-1} - 2F^j$
=$F(FH - 2F)F^{j-2} - 2F^j$

=$F^2HF^{j-2}-4F^j$
$=\cdots\cdot$
=$F^jH-2jF^j(\because F^0=I$ より)
よって $HF^jv=F^jHv-2jF^jv$
=$hF^jv-2jF^jv=(h-2j)F^jv$

3.1.2 （2）

$GF^jv=(FG+H)F^{j-1}v$((b) より)
=$FGF^{j-1}+HF^{j-1}$
=$FGF^{j-1}+(h-2j+2)F^{j-1}v$((1) より)
=$F(FG+H)F^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+FHF^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+F(h-2(j-2))F^{j-2}v+(h-2j+2)F^{j-1}v$
=$F^2GF^{j-2}v+(2h-4j+6)F^{j-1}v$
$=\cdots\cdot\cdot$
=$F^jGv+(jh-2j\cdot j+2\sum_{k=1}^{j}k)$
=$0+(jh-2j^2+j(j+1))F^{j-1}v(Gv=0$ より)
=$j(h-j+1)F^{j-1}v$

3.1.3 （3）

$HF^jv=(h-2j)F^jv$ より H は固有値 $(h-2j)$、それに対応する固有ベクトル F^jv を持つ。（それらは互いに異なっている）
H は n 次正方行列なので、固有ベクトルの個数は高々n 個であり、H が $j_0(j_0\in\{1,2,\cdots,n\})$ 個の固有ベクトルを持っている時、$F^{j_0+1}v=0$。
よって適当な j_0 に対して、$F^{j_0}v=0,F^{j_0-1}v\neq 0$

3.1.4 （4）

(2) より $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対して、$GF^{j_0}v=j_0(h-j_0+1)F^{j_0-1}v$
(3) より $GF^{j_0}v=0$ なので、$h-j_0+1=0$。
よって $h=j_0-1$
ここで $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ より $h\in\{0,1,\cdots,n-1\}$

3.2 ３番の総評

あまり取り組みやすいとは言えないだろう。難易度は５段階で 3.5。

4　4番

4番

$m = m(x)(0 \leq x \leq 1)$ は正値連続関数で M は正の定数とする。このとき
$\max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M$
が成り立つことと、任意の連続関数 $f = f(x)(0 \leq x \leq 1)$ に対して
$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
が成り立つことは同値である事を示せ。

4.1　解答

$\max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M \Rightarrow \int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$ について
$\forall x \in [0,1]$ で $m(x) \leq M$
ここで $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で連続関数なので $\forall x \in [0,1]$ で $m(x) \mid f(x) \mid \leq M \mid f(x) \mid$
よって $\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \leq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx \Rightarrow \max_{x\in[0,1]} m(x) \leq M$ について
対偶は $\max_{x\in[0,1]} m(x) > M \Rightarrow \exists f \int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx > M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$
$\max_{x\in[0,1]} m(x) > M$ の時 m は正値連続のため
$\exists x_0, \epsilon > 0 s.t. \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \Rightarrow m(x) > M$ となる。
ここで $\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \geq \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} m(x) \mid f(x) \mid dx > M \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \mid f(x) \mid dx$
ここで $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \epsilon \\ x - x_0 + \epsilon & x_0 - \epsilon \leq x < x_0 \\ x_0 + \epsilon - x & x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon \\ 0 & x_0 + \epsilon < x \leq 1 \end{cases}$
となる f をとると、$\int_0^1 m(x) \mid f(x) \mid dx \geq M \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$

4.2　4番の総評

微積分の問題にしてはあまり難しくはない。難易度は5段階で 2.5。

5　5番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ さえ知っていれば出来る。頑張れ。

5.1.2　（2）

5.1.3 （３）

(右辺)=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(f'(x))^2-2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u^2(x)\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(f'(x))^2-2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)(-u'(x)-1)\}dx$
左辺と比較することにより $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=0$ を示す。
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=[(f(x))^2u(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=(f(\frac{\pi}{2}))^2u(\frac{\pi}{2})-\lim_{x\to 0}(f(x))^2u(x)$
=$-\lim_{x\to 0}(f(x))^2u(x)(u(\frac{\pi}{2})=0$ なので)
=$-\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^2}{\sin x}(\lim_{x\to 0}\cos x=1$ なので)
=$-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(f(x))^2}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$
ここで（２）より $\mid f(x)\mid^2=o(x)(x\to 0)$ なので $\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^2}{x}=0$
また $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
以上より $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2f(x)f'(x)u(x)+f^2(x)u'(x))dx=0$
よって与式が示せた。

5.2 5番の総評

6 ６番

６番

a を $\mid a\mid<1$ を満たす定数とする。２次元確率ベクトル (X,Y) は密度関数
$f(x,y)=C\exp(-x^2+2axy-y^2)(-\infty<x,y<\infty)$
を持つとする。ここで C は定数とする。次の問に答えよ。
(1) 定数 C を求めよ。
(2)X と Y の平均と分散を求めよ。
(3)X と Y の相関係数を求めよ。

6.1 解答

6.1.1 （１）

$\iint_{R^2}C\exp(-x^2+2axy-y^2)dxdy=1$
$u=px,v=qx+ry$ とおいて
$-(u^2+v^2)=-x^2+2axy-y^2$ を満たすように p,q,r を定めると $p=\sqrt{1-a^2},q=-a,r=1$ となる。
この時 $u=\sqrt{1-a^2}x,v=-ax+y$ となるので $x=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}u,y=v+\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}u$
ヤコビアン $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$
この時 $\iint_{R^2}C\exp(-x^2+2axy-y^2)dxdy=C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-(u^2+v^2))\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}dudv=\frac{\pi C}{\sqrt{1-a^2}}$
よって $\frac{\pi C}{\sqrt{1-a^2}}=1$ より $C=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi}$

6.1.2　（２）

$E[X] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} x \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = 0$
$E[Y] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} y \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = 0$
$E[X^2] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} x^2 \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$E[Y^2] = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi} \iint_{R^2} y^2 \exp(-x^2 + 2axy - y^2) dxdy = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2(1-a^2)}$
$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{2(1-a^2)}$

6.1.3　（３）

$E[XY] = \frac{a}{2(1-a^2)}$
よって $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{a}{2(1-a^2)}$ これより $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = a$

6.2　６番の総評

統計ができる人は十分に取り組める問題。難易度は５段階で 2.5。

7　７番

７番

$X_1 \cdots X_n$ を独立に同じ分布 F(x) に従う n 個の確率変数とし、F(x) は密度関数 f(x) をもつとする。連続する確率変数の組 (X_i, X_{i+1})（ただし i=1,2, ⋯ ,n-1）の中で $X_i < X_{i+1}$ を満たす組の個数を T とする。次の問いに答えよ。
(1)T の平均を求めよ。
(2)T の分散を求めよ。

7.1　解答

7.1.1　（１）

$Y_i = X_{i+1} - X_i$ とおいて、確率変数 U を次のように定める。
$U(Y_i) = \begin{cases} 1 & Y_i > 0 \\ 0 & Y_i \leq 0 \end{cases}$
また $P(Y_i > 0) = P(Y_i \leq 0) = \frac{1}{2}$
この時 $T = \sum_{i=1}^{n-1} U(Y_i)$ となり、$E[T] = \frac{n-1}{2}$

7.1.2　（２）

$T^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} U(Y_i))^2$
=$\sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}^2 + 2\sum_{i>j} U(Y_i)U(Y_j)$
ここで $\sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \{U(Y_i)\}$(U は１か０しか取らないので)

$\sum_{i>j} U(Y_i)U(Y_j) = \sum_{i=j+1} U(Y_i)U(Y_j) + \sum_{i>j+1} U(Y_i)U(Y_j)$
ここで $E[\sum_{i=j+1} U(Y_i)U(Y_j)] = P(Y_i > 0, Y_{i-1} > 0)(n-2) = P(X_{i-1} < X_i < X_{i+1})(n-2) = \frac{1}{6}(n-2)$
$E[\sum_{i>j+1} U(Y_i)U(Y_j)] = \{1+2+\cdots+(n-3)\}E[Y_iY_j] = \frac{(n-3)(n-2)}{2}E[Y_i]E[Y_j]$($Y_i$と Y_jは $i > j+1$ の時独立なので)
$=\frac{(n-2)(n-3)}{8}$
以上より $E[T^2] = \frac{n-1}{2} + 2\{\frac{n-2}{6} + \frac{(n-2)(n-3)}{8}\} = \frac{3n^2-5n+4}{12}$
これより $V[T] = \frac{n+1}{12}$

7.2　7 番の総評

解答はあまり長くはないが、超難問。難易度は５段階で５。

8　８番

８番

正の値を取る確率変数 T が任意の正の数 t,h に対して次式を満たすとする。
$P(0 < T < t+h | T > t) = P(0 < T < h)$
ここで T は $t > 0$ で連続な密度関数 $f(t)$ を持ち
$\lim_{h\to+0} f(h)$
が存在すると仮定する。この時、密度関数 $f(t)$ を求めよ。

8.1　解答

（与式）$\Leftrightarrow \frac{P(t<T<t+h)}{P(T>t)} = P(0<T<h) \Leftrightarrow P(t<T<t+h) = P(0<T<h)P(T>t)$
両辺 h で割ると
$\frac{P(t<T<t+h)}{h} = \frac{P(0<T<h)}{h}P(T>t)$
ここで $\lim_{h\to+0} f(h) = a$ とおく。この時
$\lim_{h\to+0} \frac{P(t<T<t+h)}{h} = aP(T>t)$
これより $f(t) = a\int_t^\infty f(t)dt = a(1 - \int_0^t f(s)ds)$
よって $f'(t) = -af(t)$
この微分方程式を解いて $f(t) = Ce^{-at}$(C は定数)
$\int_0^\infty f(t)dt = 1$ より $C = a$
よって $f(t) = ae^{-at}$

8.2　８番の総評

解答は短いがあまり取り組みやすいとは言えない。難易度は５段階で３か 3.5 くらい。

9　9番

9番

確率変数 X に対して積率母関数 $M(t)=E[e^{tX}]$ が原点の周りで定義されるとする。X のキュムラント母関数 $\psi(t)=\log M(t)$ の原点におけるテーラー展開を
$\psi(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m t^m}{m!}$
と置き、κ を X の m 次キュムラントという。
$X_1 \cdots X_p$ を互いに独立で原点の周りで積率母関数が定義される確率変数とする。$\psi_j(t)$ を X_j のキュムラント母関数、$\kappa_m^{(j)}$ を X_j の m 次キュムラントとする。$a_j(j=1,\cdots,p)$ を実定数とするとき、次の問に答えよ。
(1)$\sum_{j=1}^{p} a_jX_j$ のキュムラント母関数を a_j と$\psi_j(y)$ を用いて表せ。
(2)$\sum_{j=1}^{p} a_jX_j$ の m 次キュムラントを $\kappa_m(a_1\cdots a_p)$ とするとき、$\kappa_m(a_1\cdots a_p)$ を求めよ
(3)$\sum_{j=1}^{p} a_j^2=1$ の時、４次キュムラントに関する次の不等式を証明せよ。
$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}\le\kappa_4(a_1\cdots a_p)\le\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$

9.1　解答

9.1.1　（1）

$E[e^{t(\sum_{j=1}^{p} a_jX_j)}]=e[e^{t(a_1X_1+a_2X_2+\cdots a_pX_p)}]$
=$E[e^{ta_1X_1}]\cdots E[e^{ta_pX_p}](X_1\cdots X_p$ は独立なので)
よって $\log E[e^{t(\sum_{j=1}^{p} a_jX_j)}]=\log E[e^{ta_1X_1}]+\log E[e^{ta_2X_2}]+\cdots+\log E[e^{ta_pX_p}]$
=$\psi(a_1t)+\psi(a_2t)+\cdots\psi(a_pt)$
=$\sum_{j=1}^{p}\psi_j(a_jt)$

9.1.2　（2）

$\sum_{j=1}^{p}\psi_j(a_jt)$ の原点におけるテイラー展開は
$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(1)}(a_1t)^m}{m!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(2)}(a_2t)^m}{m!}+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(p)}(a_pt)^m}{m!}$
=$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_m^{(1)}a_1^m+\kappa_m^{(2)}a_2^m+\cdots+\kappa_m^{(p)}a_p^m}{m!}t^m$
よって $\kappa_m(a_1\cdots a_p)=\sum_{j=1}^{p}\kappa_m^{(j)}a_j^m$

9.1.3　（3）

$\kappa_4(a_1,\cdots a_p)\le\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$ の証明
・$\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=\kappa_4^{(m)}>0$ の時
$\sum_{i=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\le\kappa_4^{(m)}\sum_{i=1}^{p}a_j^4\le\kappa_4^{(m)}$
・$\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=0$ の時
$\sum_{i=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\le 0\sum_{i=1}^{p}a_j^4=0$
以上より $\kappa_4(a_1,\cdots a_p)\le\max\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}$ が言えた。
$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}\le\kappa_4(a_1,\cdots a_p)$ の証明
・$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=0$ の時
$\sum_{j=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}\ge\sum_{j=1}^{p}a_j^4\cdot 0$ =0

・$\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}=\kappa_4^{(l)}<0$ の時
$\kappa_4^{(l)}\leq\sum_{j=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(l)}\sum_{j=1}^{p}a_j^4\kappa_4^{(j)}$
以上より $\min\{0,\kappa_4^{(1)},\cdots,\kappa_4^{(p)}\}\leq\kappa_4(a_1,\cdots a_p)$ が言えた。

9.2 9番の総評

キュムラントについて知らなくてもできる。難易度は５段階で３。

10 １０番

１０番

確率変数 X,Y について、X が与えられた時の Y の条件付き分布が平均 βX、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。ただし、β,σ^2 は定数で、$\mid\beta\mid<1$ とする。次の問に答えよ。
(1)$E[X]=E[Y](=\mu$ と表す）が成り立つ時、μ を求めよ。
(2)(1) の条件に加えて $E[X^2]=E[Y^2](=\nu$ と表す）が成り立つ時、ν を β,σ^2 を用いて表せ。
(3) (1) と (2) の条件に加えて $E[X^4]=E[Y^4]=(\kappa$ と表す）が成り立つ時、κ を β,σ^2 を用いて表せ。

10.1 解答

10.1.1 （1）

X と Y の密度関数をそれぞれ $f_X(x),f_Y(y)$、同時密度関数を $f(x,y)$ とおく。条件より
$E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy=\beta x$
よって $\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy=\beta xf_X(x)$ より
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\beta xf_X(x)$
これより $E[Y]=\beta E[X]$ なので $\mu=\beta\mu$
$\mid\beta\mid<1$ より$\mu=0$

10.1.2 （2）

$f_{Y|X}(y|x)$ の積率母関数を $M(t)$ とおくと、$f_{Y|X}(y|x)$ は平均 βX 分散 σ^2 の正規分布に従うので
$M(t)=\exp(\beta xt+\frac{\sigma^2}{2}t^2)$
$M'(t)=(\beta x+\sigma^2t)\exp(\beta xt+\frac{\sigma^2}{2}t^2)$
$M^{(2)}(t)=\{\sigma^2+(\beta x+\sigma^2t)^2\}\exp(\beta xt+\frac{\sigma^2}{2}t^2)$
よって $M^{(2)}(0)=\sigma^2+\beta^2x^2$
これより $E[Y^2|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy=\sigma^2+\beta^2x^2$
$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_{X,Y}(x,y)dy=\sigma^2+\beta^2x^2$
$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma^2+\beta^2x^2)f_X(x)dx$
これより $\nu=\sigma^2+\beta^2\nu$ なので $\nu=\frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$

10.1.3 （３）

$M^{(4)}(0) = 3\sigma^4 + 6\beta^2x^2\sigma^2 + \beta^4x^4$
よって $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^4 f_{X,Y}(x,y)dxdy = 3\sigma^4\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx + 6\beta^2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx + \beta^4x^4\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)dx$
$\Leftrightarrow \kappa(1-\beta^4) = \frac{3(1+\beta^2)}{1-\beta^2}\sigma^4$
これより $\kappa = \frac{3\sigma^4}{(1-\beta^2)^2}$

10.2 １０番の総評

（３）は計算がかなり大変でやりにくいだろう。難易度は５段階で 3.5 くらい。

11 全体的な総評

まず、１番は絶対にやるべき。そして４も取り組みやすい。統計ができる人は６，９，１０に手を出すと良い。８番もできなくはない。統計ができない人は２，３辺りで部分点を取れるように頑張ってください。

12 参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房