# 平成１８年度　システム創成専攻
# 数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

# 1　１番

## 1.1　解答

### 1.1.1　（1）

$v(z+1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} e^{2\pi i n}$
$e^{2\pi i n}=1(n \in N)$ なので $v(z+1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} = v(z)$
$v(z+\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau(n^2+2n)} e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n+1)^2} e^{2\pi i n z} e^{-\pi i \tau}$
ここで $t=n+1$ とおくと、
$v(z+\tau)=\sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau t^2} e^{2\pi i (t-1) z} e^{-\pi i \tau} = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau t^2} e^{2\pi i t z} = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} v(z)$

### 1.1.2　（2）

積分路を $C_1:[0,l], C_2:\{\tau t + l\ 0 \leq t \leq l\}, -C_3:\{l\tau + t\ 0 \leq t \leq l\}, -C_4:\{\tau t\ 0 \leq t \leq l\}$ と設定する
$I_1=\int_{C_1} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz$
$I_2=\int_{C_2} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_l^{l\tau+l} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = \tau \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}} dt$
$I_3=\int_{C_3} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_{l\tau+l}^{l\tau} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = -\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+l\tau)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+l\tau)}} dt$
$I_4=\int_{C_4} \frac{v'(z)}{v(z)} dz = \int_{l\tau}^{0} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}} dz = -\tau \int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(\tau z+l)}} dt = -I_2$
ここで $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z - 2\pi i l (z+l\tau)}$ なので
$I_3=-\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}} = -\int_0^l \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i (n+l) e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z} - 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} l e^{\pi i (n+l)^2 \tau + 2\pi i (n+l) z}}{v(z)}$
$=-I_1 + l \int_0^l 2\pi i dz = -I_1 + 2\pi i l^2$
よって（与式）$=\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3+I_4)=l^2$

## 1.2　１番の総評

極めて難しい。(1) はなんとかできるかもしれないが、(2) は見たこともない複素積分である。難易度は 5 段階で 4.5。

# 2　２番

# 3　３番

## 3.1　解答

### 3.1.1　（1）

$Ax=0$ なので $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0$
よって $\mid a_{nn} \mid = \mid a_{n1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n2}\frac{x_2}{x_n} + \cdots + a_{nn-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} \mid$
ここで $\mid x_1 \mid \leq \mid x_2 \mid \leq \cdots \mid x_n \mid$ なので
$\mid \frac{x_1}{x_n} \mid \leq \mid \frac{x_2}{x_n} \mid \leq \cdots \mid \frac{x_{n-1}}{x_n} \mid \leq 1$
これより $\mid a_{nn} \mid \leq \mid a_{n1}\frac{x_1}{x_n} \mid + \mid a_{n2}\frac{x_2}{x_n} \mid + \cdots + \mid a_{nn-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} \mid \leq \mid a_{n1} \mid + \mid a_{n2} \mid + \cdots + \mid a_{nn-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} \mid a_{nj} \mid$

#### 3.1.2 （2）

# 4 ４番

## 4.1 解答

#### 4.1.1 （1）

$f(x)=-xy+x\log x+e^{y-1}$ とする
このとき $f'(x)=-y+\log x+1$
よって $\log x=y-1$、$x=e^{y-1}$ の時最小値をとる
この時 $f(e^{y-1})=-e^{y-1}y+e^{y-1}(y-1)+e^{y-1}=0$
以上より $\forall y f(x)\geq 0 \Leftrightarrow xy\leq x\log x+e^{y-1}$

#### 4.1.2 （2）

$f(x)>0$ で (1) より $x=f(x), y=g(x)$ とおきかえると
$f(x)g(x)\leq f(x)\log f(x)+e^{g(x)-1}$
$x\in(0,a)$ に対して f(x),g(x) は連続なので
$\int_0^a f(x)g(x)dx\leq\int_0^a f(x)\log f(x)dx+\int_0^a e^{g(x)-1}dx\leq\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\int_0^a e^{g(x)}dx<\infty$

#### 4.1.3 （3）

$\int_0^a f(x)\log\frac{1}{x}dx=2\int_0^a f(x)\log\frac{1}{\sqrt{x}}dx\leq 2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+2\int_0^a e^{\log\frac{1}{\sqrt{x}}-1}dx$
=$2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\frac{4}{e}[\sqrt{x}]_0^a$
=$2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx+\frac{4}{e}\sqrt{a}$

## 4.2 ４番の総評

(1) ができれば (2) と (3) はさほど難しくはない。難易度は５段階で 3 か 3.5。

# 5 ５番

# 6 ６番

## 6.1 解答

#### 6.1.1 （1）

$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k f_ic_i$
$m_y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k c_i^2f_i$

### 6.1.2　（２）

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)f_j<\overline{x}<\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)f_j$
これより $|\overline{x}-\overline{y}|\leq\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\delta_j f_j\leq\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{k}\max_{j=1,\cdots,n}(\delta_j)f_j=\frac{1}{2}\max_{j=1,\cdots,n}(\delta_j)$

### 6.1.3　（３）

本問では $c_j\geq 0$ を仮定する
この時 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)^2 f_j<m_x<\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)^2 f_j$
ここで $c_j^2-(c_j-\frac{1}{2}\delta_j)^2=c_j\delta_j-\frac{1}{4}\delta_j^2$
$(c_j+\frac{1}{2}\delta_j)^2-c_j^2=c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2$
$c_j\geq 0$ なので $c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2>c_j\delta_j-\frac{1}{4}\delta_j^2$
よって $|m_x-m_y|\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j\delta_j+\frac{1}{4}\delta_j^2)f_j\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(c_j\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j+\frac{1}{4}\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j^2)f_j$
$=\overline{y}\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j+\frac{(\max_{j=1,\cdots,n}\delta_j)^2}{4}$

## 6.2　６番の総評

(3) の解答では勝手に $c_j\geq 0$ を仮定したがこれでよかったのだろうか‥ 難易度は５段階で４。

# 7　７番

## 7.1　解答

### 7.1.1　（１）

$P(Y=1|X=x)=\frac{f_{X,Y}(x,1)}{p_X(x)}=x$
よって $P(Y=1)=\int_0^1 f_{X,Y}(x,1)dx=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

### 7.1.2　（２）

$E[X|Y=0]=\int_0^1 xf_{X|Y}(x|0)dx=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$
$E[X|Y=1]=\int_0^1 xf_{X|Y}(x|1)dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}$

## 7.2　７番の総評

１０問の中で１番簡単な問題。選択すべき。難易度は５段階で３。

# 8　８番

## 8.1　解答

### 8.1.1　（１）

$m(s)-1=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{su}-1)f(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du$
$=\int_0^{\infty}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du-\int_{-\infty}^{0}\{\int_0^u se^{sx}dx\}f(u)du$
$=s\int_0^{\infty}\{\int_x^{\infty} e^{sx}f(u)du\}dx-s\int_{-\infty}^{0}\{\int_{-\infty}^{x} e^{sx}f(u)du\}dx$
$=s\int_0^{\infty} e^{sx}dx\int_x^{\infty} f(u)du-s\int_{-\infty}^{0} e^{sx}dx\int_{-\infty}^{x} f(u)du$
$=-s\int_{-\infty}^{0} F(u)e^{su}du+s\int_0^{\infty} F(u)e^{su}du$

### 8.1.2　（２）

条件より $\forall\epsilon>0,\exists x_0\ s.t.\ \forall x\geq x_0\ \Rightarrow\frac{M(x)}{x}<\epsilon$
よって $-\frac{\log\overline{F}(x)}{x}<\epsilon$
これより $\log\overline{F}(x)>-x\epsilon$ なので $\overline{F}(x)>e^{-x\epsilon}$ が $x\geq x_0$ で言えた
$\overline{F}(x)$ は単調減少なので $\overline{F}(x)>e^{-\epsilon(x-x_0)}=c_\epsilon e^{-\epsilon x}$
よって題意が示せた

### 8.1.3　（３）

(3) より $\overline{F}(x)>e^{-\epsilon(x-x_0)}=c_\epsilon e^{-\epsilon x}$ なので
$\int_0^{\infty}\overline{F}(u)e^{su}du>\int_0^{\infty}c_\epsilon e^{(s-\epsilon)u}du=\infty$
よって (1) より $m(s)=1-s\int_{-\infty}^{0}F(u)e^{su}du+s\int_0^{\infty}F(u)e^{su}du$ より $\forall s$ で $m(s)=\infty$

### 8.1.4　（４）

$f(x)=\frac{dF}{dx}=\alpha x^{-\alpha-1}$
よって $m(s)=\alpha\int_1^{\infty}e^{sx}x^{-\alpha-1}$
ここで $s>0,\alpha>0$ より $\lim_{x\to\infty}e^{sx}x^{-\alpha-1}=\infty$ なので $\forall s>0$ で $m(s)=\infty$

## 8.2　８番の総評

(1) と (2) を認めれば (3) と (4) は難しくない。完答は難しいだろう。難易度は５段階で 3.5 か 4。

# 9　９番

## 9.1　解答

### 9.1.1　（１）

$M(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}e^{tx}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$
よって $X_1+X_2$ の積率母関数は $E[e^{t(X_1+X_2)}]=e^{-\lambda_1}e^{\lambda_1 e^t}e^{-\lambda_2}e^{\lambda_2 e^t}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^t}$
これより $X_1+X_2$ は $P_0(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う。

### 9.1.2 （2）

$P_o(\lambda)$ の平均と分散は $\lambda$ なので $V[\overline{Y}_n] = \frac{\lambda}{n}, E[\overline{Y}_n] = \lambda$
よって $\overline{Y_n} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $(X_1 \cdots X_n \sim P_o(\lambda))$ とすると中心極限定理より
$\lim_{n\to\infty} P(-u < \frac{\overline{Y_n}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} < u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
これより $\lim_{n\to\infty} P(\overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\lambda}{n}} < \lambda < \overline{Y_n} + u\sqrt{\frac{\lambda}{n}}) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

### 9.1.3 （3）

$P(\overline{Y_n} = 0) = P(Y_n = 0) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^0}{0!} \to 0 (n \to \infty)$

### 9.1.4 （4）

$\overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}} < \lambda < \overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}$ を $\overline{Y_n}$ について解きなおすと
$\frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda-\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2} < \overline{Y_n} < \frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda+\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}$
$a = \frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda-\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}, b = \frac{\frac{u^2}{n}+2\lambda+\sqrt{\frac{u^4}{n^2}+\frac{4\lambda u^2}{n}}}{2}$ とおくと
$\lim_{\lambda\to+0} P(\overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}} < \lambda < \overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}) = \lim_{\lambda\to+0}\{P(\overline{Y_n} = [a]+1) + P(\overline{Y_n} = [a]+2) + \cdots + P(\overline{Y_n} = [b])\}$
(3) より $\lim_{\lambda\to+0} P(\overline{Y_n} = 0) = 1$ なので $\lim_{\lambda\to+0} P(\overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}} < \lambda < \overline{Y_n} - u\sqrt{\frac{\overline{Y_n}}{n}}) = 0$

## 9.2 ９番の総評

(1) は簡単だが、(4) は難しい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

# 10 １０番

## 10.1 解答

### 10.1.1 （1）

(a) より $\frac{pr(y_j,z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)} = \frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)} \cdot \frac{pr(z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
$\Leftrightarrow pr(y_j,z_k,x_i,u_l) = pr(y_j,x_i,u_l)\frac{pr(z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
ここで (与式の左辺)=$\frac{pr(y_j,z_k,x_i,u_l)}{pr(x_i,z_k,u_l)} = \frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
(与式の右辺)=$\frac{pr(y_j,x_i,u_l)}{pr(x_i,u_l)}$
以上より $pr(y_j|x_i,z_k,u_l) = pr(y_j|x_i,u_l)$

### 10.1.2 （2）

$A = pr(y_1|x_1,u_1), B = pr(x_1|u_1,z_1)$ とおく
この時 $0 \le A, B \le 1$ なので $AB \le A \le 1 - B + AB$ を使うと
$\frac{pr(x_1,y_1,u_1)}{pr(x_1,u_1)} \cdot \frac{pr(x_1,z_1,u_1)}{pr(z_1,u_1)} \le pr(y_1|x_1,u_1) \le 1 - pr(x_1|u_1,z_1) + pr(y_1|x_1,u_1)pr(x_1|u_1,z_1)$
$= 1 - \frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(u_1)pr(z_1)} + pr(y_1|x_1,u_1)\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(u_1)pr(z_1)}$
両辺に $pr(u_1)$ をかけて

$\frac{pr(x_1,y_1,u_1)}{pr(x_1,u_1)}\cdot\frac{pr(x_1,z_1,u_1)}{pr(z_1)} \leq pr(u_1)pr(y_1|x_1,u_1) \leq pr(u_1) - \frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)} + pr(y_1|x_1,u_1)\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)}$
よって $pr(y_1|x_1,u_1)\cdot pr(x_1,u_1|z_1) \leq pr(u_1)pr(y_1|x_1,u_1) \leq pr(u_1) - pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|u_1,x_1)pr(x_1,u_1|z_1)$ ー（A）
同様に $A = pr(y_1|x_1,u_2), B = pr(x_1|u_2,z_1)$ とおいて
$pr(y_1|x_1,u_2)\cdot pr(x_1,u_2|z_1) \leq pr(u_2)pr(y_1|x_1,u_2) \leq pr(u_2) - pr(x_1,u_2|z_1) + pr(y_1|u_2,x_1)pr(x_1,u_2|z_1)$ ー（B）
(A) の左辺と (B) の左辺を足し合わせると
$pr(y_1|x_1,u_1)\cdot pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|x_1,u_2)\cdot pr(x_1,u_2|z_1)$
$= pr(y_1|x_1,u_1,z_1)\cdot pr(x_1,u_1|z_1) + pr(y_1|x_1,u_2,z_1)\cdot pr(x_1,u_2|z_1)$（(1) を使った）
=$\frac{pr(x_1,y_1,u_1,z_1)}{pr(x_1,u_1,z_1)}\frac{pr(x_1,u_1,z_1)}{pr(z_1)} + \frac{pr(x_1,y_1,u_2,z_1)}{pr(x_1,u_2,z_1)}\frac{pr(x_1,u_2,z_1)}{pr(z_1)}$ =$pr(y_1,x_1,u_1|z_1) + pr(y_1,x_1,u_2|z_1) = pr(y_1,x_1|z_1)$
A) の右辺と (B) の右辺を足し合わせると
$1 - pr(x_1|z_1) + pr(x_1,y_1|z_1)$ =$1 - pr(x_1,y_1|z_1) - pr(x_1,y_2|z_1) + pr(x_1,y_1|z_1)$ =$1 - pr(x_1,y_2|z_1)$
よって与式の k=1 の時が示せた、k=2 の時も同様

### 10.2　１０番の総評

A,B の置き方はちょっと思いつかないだろう。難易度は５段階で４か 4.5。

## 全体的な総評

７番以外はどれも取り組みにくい。なかなか難しい年だと思う。

## 11　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >

・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房