平成１８年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（１）

$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial \rho})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial \rho})^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \rho^2}$
後の計算は省略

1.1.2　（２）

省略

1.2　１番の総評

またまたチェインルール。頑張って計算しましょう。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（１）

$b_1 = a_1 \ \ t_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$b_2 = a_2 - (t_1, a_2)t_1$ とおくと
$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$b_3 = a_3 - (t_1, a_3)t_1 - (t_2, a_3)t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$b_4 = a_4 - (t_1, a_4)t_1 - (t_2, a_4)t_2 - (t_3, a_4)t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.1.2 （２）

(1) より $a_1 = 2t_1$
$a_2 = t_1 + t_2$
$a_3 = t_1 - t_2 + \sqrt{2}t_3$
$a_4 = t_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_4$
よって $A = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2.2 ２番の総評

QR 分解の問題。難易度は５段階で 2.5 か３。グラムシュミットは絶対にできるようにしましょう。

3 ３番

3.1 解答

3.1.1 （１）

$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\phi_1}{dt}\phi_2 - \phi_1\frac{d\phi_2}{dt}}{\phi_2^2} = \frac{(\frac{g(t)}{2}\phi_1 + \frac{h(t)+f(t)}{2}\phi_2)\phi_2 - (\frac{h(t)-f(t)}{2}\phi_1 - \frac{g(t)}{2}\phi_2)\phi_1}{\phi_2^2}$
=$g(t)\frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{h(t)+f(t)}{2} - \frac{h(t)-f(t)}{2}(\frac{\phi_1}{\phi_2})^2$
=$\frac{f(t)}{2}(1+x^2) + g(t)x + \frac{h(t)}{2}(1-x^2)(\because x(t) = \frac{\phi_1}{\phi_2}$なので$)$

3.1.2 （２）

$\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{1}{2}\phi_1(t)$ なので $\phi_1(t) = C_1e^{-\frac{1}{2}t}(C_1$は定数$)$
この時 $\frac{d\phi_2}{dt} = -\cos t \cdot C_1e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}\phi_2$
これを解いて $\phi_2(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}(\sin t - \cos t) + C_2e^{\frac{1}{2}t}(C_2$は定数$)$
ここで $x(0)\frac{\phi_1(0)}{\phi_2(0)} = \frac{C_1}{\frac{C_1}{2}+C_2} = 1$ より $C_1 = 2C_2$
よって $x(t) = \frac{2}{\cos t - \sin t + e^t}$

3.2 ３番の総評

(1) で $x(t) = \frac{\phi_1}{\phi_2}$ に気づくかどうかだろう。難易度は５段階で 3.5。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（１）

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos c}{6!}x^6 (0 < c < x)$
よって剰余項は $-\frac{\cos c}{6!}x^6 (0 < c < x)$

4.1.2　（２）

(1) において x に 1 を代入して
$\cos 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}) = -\frac{\cos c}{6!}(0 < c < 1)$
また $x = \frac{\pi}{3}$ で展開すると
$\cos 1 - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(1 - \frac{\pi}{3})^2) = \frac{\sin c}{3!}(1 - \frac{\pi}{3})^3 (1 < c < \frac{\pi}{3})$
よって $\frac{\cos c}{6!}(0 < c < 1)$ と $\frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 (1 < c < \frac{\pi}{3})$ との大小比較を行えばよい
$\inf_{0<c<1} \frac{\cos c}{6!} = \frac{\cos 1}{6!},\ \sup_{1<c<\frac{\pi}{3}} \frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{\pi}{3} - 1)^3$
ここで $6! \times \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{\pi}{3} - 1)^3 \fallingdotseq 0.35$
$\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} > 0.35$
以上より $\inf_{0<c<1} \frac{\cos c}{6!} > \sup_{1<c<\frac{\pi}{3}} \frac{\sin c}{3!}(\frac{\pi}{3} - 1)^3$
よって $\frac{\pi}{3}$ で展開する方が剰余項の値が小さいのでよい近似である

4.2　４番の総評

完答は難しいだろう。難易度は５段階で 3.5。

5　５番

5.1　解答

5.1.1　（１）

$E[S_n] = n\mu$
$V[S_n] = \sum_{t=1}^{n} V[X_t] + 2\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j)$
ここで $\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j) = \sigma^2(p + p^2 + \cdots + p^{n-1}) + \sigma^2(p + p^2 + \cdots + p^{n-2}) + \cdots + \sigma^2 p$
$=\sigma^2 \frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} + \sigma^2 \frac{p(p^{n-2}-1)}{p-1} + \cdots \sigma^2 p$
$=\sigma^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p(p^k-1)}{p-1}$
$=\frac{p\sigma^2}{p-1}\{\frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)\}$
これより $V[S_n] = n\sigma^2 + \frac{2p\sigma^2}{p-1}\{\frac{p(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)\}$

5.1.2　（２）

$V[\overline{X_n}] = \frac{1}{n^2}V[S_n] \to 0 (n \to \infty)$
よってチェビシェフの不等式より $\lim_{n\to\infty} P(|\ \overline{X_n} - \mu\ | > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{V[\overline{X_n}]}{\epsilon^2} = 0$

5.2　５番の総評

（１）で計算間違いをするかもしれないが、チェビシェフの不等式を知っていればできる。難易度は５段階で３。

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（1）

$P(X=k) = {}_{r-1+k}C_k p^k q^{r-1} \times q = {}_{r-1+k}C_k p^k q^r$

6.1.2　（2）

$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k q^r = q^r \sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k$
ここで $\frac{1}{q^r} = \{1-(1-q)\}^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -r \\ k \end{pmatrix} \{-(1-q)\}^k$
ここで $\begin{pmatrix} -r \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} = (-1)^k {}_{r-1+k}C_k$
よって $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k q^r = q^r \sum_{k=0}^{\infty} {}_{r-1+k}C_k p^k = q^r \frac{1}{q^r} = 1$

6.1.3　（3）

$rp = \lambda$ より $p = \frac{\lambda}{r}$
よって $\lim_{r\to\infty} P(X=k) = \lim_{r\to\infty} \frac{(r-1+k)!}{k!(r-1)!}(\frac{\lambda}{r})^k(1-\frac{\lambda}{r})^r$
$= \lim_{r\to\infty} \frac{(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{r^k}\frac{\lambda^k}{k!}(1+\frac{1}{-\frac{r}{\lambda}})^r$
$= \lim_{r\to\infty}(1+\frac{k-1}{r})(1+\frac{k-2}{r})\cdots 1\frac{\lambda^k}{k!}\{(1+\frac{1}{-\frac{r}{\lambda}}))^{-\frac{r}{\lambda}}\}^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

6.2　６番の総評

(2) は知っていないとできない。難易度は５段階で 3.5。

7　全体的な総評

選択問題は全て難しくはないが、簡単でもない問題ばかりである。必答問題はどちらも標準的。

8　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房