平成１９年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　：　J.H
所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

$f(z)=\frac{e^{-i\xi z}}{e^{z}+e^{-z}}$ とおく。
$e^{z}+e^{-z}=0$ とおくと、$f(z)$ の上半平面における極は $z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)(n=0,1,2,\cdots)$
これらはすべて１位の極である。
よって $C_1=[-R,R], C_2=\{\mid z\mid=R, Imz\geq 0\}$ とおいて、$C=C_1+C_2$ とおくと
$\lim_{R\to\infty}\int_{C}f(z)dz=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)}f(z)$
ここで $Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)}=\frac{e^{-i\xi\frac{i\pi}{2}(1+2n)}}{e^{\frac{i\pi}{2}(1+2n)}-e^{-\frac{i\pi}{2}(1+2n)}}$
$=\begin{cases}\frac{e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi}}{2i} & \text{n が偶数の時}\\ \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi}}{-2i} & \text{n が奇数の時}\end{cases}$
よって $2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}Res_{z=\frac{i\pi}{2}(1+2n)}f(z)=\pi\frac{e^{\frac{\pi}{2}\xi}-e^{\frac{3\pi}{2}\xi}}{1-e^{2\pi\xi}}$($\xi<0$ の時)
ここで $\lim_{R\to\infty}\mid\int_{C_2}f(z)dz\mid\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\mid f(z)\mid\mid dz\mid$
$z=Re^{i\theta}(0\leq\theta\leq\pi)$ とおくと
$\int_{C_2}\mid f(z)\mid\mid dz\mid=\int_0^{\pi}\frac{|e^{-i\xi Re^{i\theta}}|}{|e^{Re^{i\theta}}|+|e^{-Re^{i\theta}}|}\mid i\mid\mid R\mid\mid e^{i\theta}\mid d\theta=R\int_0^{\pi}\frac{|e^{-i\xi Re^{i\theta}}|}{|e^{Re^{i\theta}}|+|e^{-Re^{i\theta}}|}d\theta$
$=R\int_0^{\pi}\frac{e^{\xi R\sin\theta}}{e^{R\cos\theta}+e^{-R\cos\theta}}d\theta$
$e^{R\cos\theta}+e^{-R\cos\theta}\leq 2$(相加相乗平均の関係より)
よって $\int_{C_2}\mid f(z)\mid\mid dz\mid\leq\frac{R}{2}\int_0^{\pi}e^{\xi R\sin\theta}d\theta$
また $\mid\int_0^{\pi}e^{\xi R\sin\theta}d\theta\mid\leq\pi\cdot\max_{0\leq\theta\leq\pi}e^{\xi R\sin\theta}$ で $\lim_{R\to\infty}\max_{0\leq\theta\leq\pi}e^{\xi R\sin\theta}=0$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$
以上より $\lim_{R\to\infty}\int_{C}f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\pi\frac{e^{\frac{\pi}{2}\xi}-e^{\frac{3\pi}{2}\xi}}{1-e^{2\pi\xi}}$

1.2　１番の総評

型にはまっていない複素積分。だが、十分取り組める。難易度は５段階で３。$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)=0$ はきちんと証明しなくてはいけないそうです。（by 鈴木研究室の先輩より）

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

１列について余因子展開すると

$$\det B_n=x\det B_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1&0&\cdot&\cdot&0\\x&-1&0\cdot&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&x&-1\end{vmatrix}=x\det B_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_n=x\det B_{n-1}+a_n$$

2.1.2 （２）

１行目の $-\frac{a_n}{x}$ 倍を n 行目に足し合わせると
$0\ \ a_{n-1}+\frac{a_n}{x}\ \ a_{n-2}\cdots\cdots a_3\ \ a_2\ \ x+a_1$
２行目の $-\frac{a_{n-1}+\frac{a_n}{x}}{x}$ 倍を n 行目に足し合わせると
$0\ \ 0\ \ a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2}\ \ a_{n-3}\cdots\cdots a_3\ \ a_2\ \ x+a_1$
これを繰り返すと n 行目は
$0\ \ 0\ \ \cdots\cdots x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}$
よって $x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}=0$ すなわち、$x^n+\sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}=0$ が成立する時、$rankB_n=n-1$

2.1.3 （３）

$\mid A_n-xE\mid=(-1)^n\det B_n$
ここで定理より
「A_n が対角化できる」$\Leftrightarrow$「$n-rank(A_n-\lambda_i E)=m_i$(ただし A_n の固有方程式は $\varphi(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$)」ー（A）
また計算により $\det B_n=x^n+\sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}$
よって A_n の固有方程式は $(-1)^n\{x^n+\sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}\}$ なので
「$x^n+\sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}=0$ が重根を持たない」
$\Leftrightarrow$「$m_i=1, rankB_n=n-1$」
ここで $rankB_n=rank(A_n-\lambda_i E)=n-1$ なので
$n-rank(A_n-\lambda_i E)=n-(n-1)=1=m_i$
が成立し、（A）を満たすので A_n は対角化できる。

2.2 ２番の総評

(3) はなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5。

3 ３番

3.1 解答

$u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}\leq 0\Leftrightarrow u_{j+1}-u_j\leq u_j-u_{j-1}$ー $(*)$
(1)$u_{n+1}-u_n\geq 0$ の時
$u_{n+1}\geq u_n\geq\cdots\geq u_1\geq u_0$ なので $\min_{1\leq j\leq n}u_j=u_1\geq u_0=\min\{u_0,u_{n+1}\}$
(2)$u_1-u_0\leq 0$ の時
$u_{n+1}\leq u_n\leq\cdots\leq u_1\leq u_0$ となるので $\min_{1\leq j\leq n}u_j=u_n\geq u_{n+1}=\min\{u_0,u_{n+1}\}$
(3)$u_{n+1}-u_n<0$ かつ $u_1-u_0>0$ の時
(*) より
$$\begin{cases} u_{j+1}-u_j\leq 0 & j=i+1\cdots n \\ u_{j+1}-u_j\geq 0 & j=1,\cdots i \end{cases}$$
となる i が存在する。ゆえに

$u_{n+1} \le u_n \le \cdots \le u_{i+1}$ かつ $u_{i+1} \ge u_i \ge \cdots \ge u_0$ となるので
$\min_{1 \le j \le n} u_j \ge \min\{u_0, u_{n+1}\}$ が成立する

3.2　３番の総評

１２問の中で１番易しい。難易度は５段階で 2.5 か３。

4　４番

5　５番

6　６番

7　７番

7.1　解答

7.1.1　（１）

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+v^2)}} \exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2(\sigma^2+v^2)})$ なので平均 μ 分散 $\sigma^2 + v^2$ の正規分布

7.1.2　（２）

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2 v^2}{\sigma^2+v^2}}} \exp(-\frac{(x-\frac{\mu v^2+y\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{2\frac{\sigma^2 v^2}{\sigma^2+v^2}})$ なので平均 $\frac{\mu v^2+y\sigma^2}{\sigma^2+v^2}$ 分散 $\frac{\sigma^2 v^2}{\sigma^2+v^2}$ の正規分布

7.2　７番の総評

計算が非常にしんどいが統計ができる人は選択すべき。難易度は５段階で３。

8　８番

9　９番

10　１０番

10.1　解答

10.1.1　（１）

$f_{Y,Z}(y,z) = 2! \lim_{h \to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta} = 2f(y)f(z) = 2$

10.1.2 （2）

$E[Y]=\frac{1}{3}, E[Z]=\frac{2}{3}, E[Y^2]=\frac{1}{6}, E[Z^2]=\frac{1}{2}, V[Y]=V[Z]=\frac{1}{18}$
$E[YZ]=\int_0^1\{\int_0^z 2yzdy\}dz=\frac{1}{4}, Cov(Y,Z)=E[YZ]-E[Y]E[Z]=\frac{1}{36}$
よって $\rho=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}$

10.2 １０番の総評

類題をやったことがあれば簡単。難易度は５段階で３か 3.5。

11 １１番

11.1 解答

11.1.1 （1）

(右辺)=$\frac{pr(x_i,u_1)}{pr(u_1)}pr(u_1)+\frac{pr(x_i,u_2)}{pr(u_2)}pr(u_2)=pr(x_i)$ =(左辺)
U で条件付けた時、X,Y,Z,W は独立なので X,Y も独立。
よって (右辺)=$pr(x_i,y_j|u_1)pr(u_1)+pr(x_i,y_j|u_2)pr(u_2)=pr(x_i,y_j,u_1)+pr(x_i,y_j,u_1)=pr(x_i,y_j)$ =(左辺)

11.1.2 （2）

(1) より $pr(x_i,y_j)-pr(x_i)pr(y_j)$
$=\{pr(x_i|u_1)pr(y_j|u_1)pr(u_1)+pr(x_i|u_2)pr(y_j|u_2)pr(u_2)\}-\{pr(x_i|u_1)pr(u_1)+pr(x_i|u_2)pr(u_2)\}\{pr(y_i|u_1)pr(u_1)+pr(y_i|u_2)pr(u_2)\}$
=$\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}pr(u_1)pr(u_2)\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}$
これより $\{pr(x_i,y_j)-pr(x_i)pr(y_j)\}\{pr(z_k,w_l)-pr(z_k)pr(w_l)\}$
=$pr(u_1)^2pr(u_2)^2\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}\{pr(z_k|u_1)-pr(z_k|u_2)\}\{pr(w_l|u_1)-pr(w_l|u_2)\}$
$\{pr(x_i,z_k)-pr(x_i)pr(z_k)\}\{pr(y_j,w_l)-pr(y_j)pr(w_l)\}$
=$pr(u_1)^2pr(u_2)^2\{pr(x_i|u_1)-pr(x_i|u_2)\}\{pr(z_k|u_1)-pr(z_k|u_2)\}\{pr(y_j|u_1)-pr(y_j|u_2)\}\{pr(w_l|u_1)-pr(w_l|u_2)\}$
よって (右辺)$=0$

11.2 １１番の総評

計算は大変だがあまり難しくはない。難易度は５段階で３。

12 １２番

12.1 解答

12.1.1 （1）

$\mu_n=\sum_{k=2}^n(-1)^{k-1}\cdot kP(X_i=(-1)^{k-1}k)$
=$C\sum_{k=2}^n(-1)^{k-1}\frac{\log k}{k^2}$

12.1.2　（２）

$\mu_{2n+2}-\mu_{2n}=(-1)^{2n}\frac{\log(2n+1)}{(2n+1)^2}+(-1)^{2n+1}\frac{\log(2n+2)}{(2n+2)^2}$
$=\frac{\log(2n+1)}{(2n+1)^2}-\frac{\log(2n+2)}{(2n+2)^2}$
$=\log\frac{x^{\frac{1}{x^2}}}{(x+1)^{\frac{1}{(x+1)^2}}}$$(x=2n+1$ とおいた)
$\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$ を言うには $x>3$ で $f(x)=x^{\frac{1}{x^2}}>(x+1)^{\frac{1}{(x+1)^2}}$ を示せば良い。
$f(x)$ を微分することにより $x>3$ で $f'(x)<0$ が言えるので $\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$
$\mu_{2n+3}-\mu_{2n+2}=\frac{\log(2n+3)}{(2n+3)^2}>0$
$\mu_{2n+1}-\mu_{2n+3}$ は $\mu_{2n+2}-\mu_{2n}>0$ と同様の議論をすればよい。
ここで $\mu_{2n}<\mu_{2n+2}<\mu_{2n+3}<\mu_{2n+1}$ において n を $n+1$ で置き換えて
$\mu_{2n+2}<\mu_{2n+4}<\mu_{2n+5}<\mu_{2n+3}$
よって $\mu_{2n}<\mu_{2n+2}<\mu_{2n+4}<\mu_{2n+5}<\mu_{2n+3}<\mu_{2n+1}$
この議論を繰り返すことによって $\mu_2<\mu_4<\mu_6<\cdots\mu_{2n}<\mu_{2n+1}<\mu_{2n-1}<\mu_{2n-3}<\cdots<\mu_3$ が言える
よって $\{u_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少かつ $\mu_{2n+1}>\mu_2$
また $\{u_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加かつ $\mu_{2n}<\mu_3$
これより $\lim_{n\to\infty}u_{2n+1},\lim_{n\to\infty}u_{2n}$ が存在し、$\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}-u_{2n}=0$ なので $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

12.1.3　（３）

チェビシェフの不等式より $P(\mid\frac{S_n}{n}-\mu\mid>\epsilon)\leq\frac{1}{\epsilon}E[\frac{S_n}{n}-\mu]=\frac{\mu_n-\mu}{\epsilon}$
よって $\lim_{n\to\infty}P(\mid\frac{S_n}{n}-\mu\mid>\epsilon)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu}{\epsilon}=\frac{\mu-\mu}{\epsilon}=0$

12.2　１２番の総評

完答は難しい。難易度は５段階で 3.5 か４。

13　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社

・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房