平成１９年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（１）、（２）、（３）

(1) $\nabla f = 0$　(2) $\nabla \varphi = 0$　(3) $\nabla F = 0$

1.2　１番の総評

例年通りチェインルールの問題。(3) で少し迷うかも。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（１）

$t = 3$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = -3$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をグラムシュミットの直交化法によって直交化すると

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

これより $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.1.2　（２）

$x' =^t Tx$ なので $x = Tx'$
よって ${}^txAx = -3 \Leftrightarrow^t x' \, {}^tTATx' = -3$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -3$
$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$

2.1.3 （３）

二葉双曲面である。図は省略。

2.2 ２番の総評

(1) は $t=3$ から得られる二つの固有ベクトルは直交していないのでグラムシュミットを使う必要がある。これさえ気をつければ後は簡単。難易度は５段階で 2.5。

3 ３番

3.1 解答

3.1.1 （１）

$\frac{d}{dt}J(t) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1' & x_2 & x_3' \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1" & x_2" & x_3" \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}$

$=0+0+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ -a(t)x_1"(t)-b(t)x_1'(t)-c(t)x_1(t) & -a(t)x_2"(t)-b(t)x_2'(t)-c(t)x_2(t) & -a(t)x_3"(t)-b(t)x_3'(t)-c(t)x_3(t) \end{vmatrix}$

$=-a(t)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1" & x_2" & x_3" \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{vmatrix} = -a(t)J(t)$

3.1.2 （２）

(1) より $J(t) = Ce^{-\int_0^t a(s)ds}$

$J(0) = C \neq 0$ で a(t) は有界なので $\forall t \in RJ(t) \neq 0$

よって $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1" & x_2" & x_3" \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみなので３つのベクトルは１次独立。

3.2 ３番の総評

(1) はガチで計算するとかなりしんどい。難易度は５段階で 3.5。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（１）

(1)$t=\alpha+\beta, \alpha-\beta$ なので $\alpha+\beta<0, \alpha-\beta<0$
(2)π
(3)$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

4.2　４番の総評

基本的な微積分と線形代数の問題。選択すべき。難易度は５段階で２。

5　５番

5.1　解答

5.1.1　（１）、（２）

$C=\frac{\lambda}{2}, M_Z(t)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}$

5.1.2　（３）

$X-Y$ の積率母関数は $E[e^{t(X-Y)}]=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx\int_0^\infty e^{-ty}\lambda e^{-\lambda y}dy=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}$
よって $X-Y$ と Z の積率母関数は一致するので同一の分布に従う。

5.2　５番の総評

標準的な統計の問題。難易度は５段階で 2.5。

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（１）

$\mid x_{(1)}-\alpha\mid+\mid x_{(n)}-\alpha\mid$ を最小にする α は $x_{(1)}<\alpha<x_{(n)}$ を満たす
$\mid x_{(2)}-\alpha\mid+\mid x_{(n-1)}-\alpha\mid$ を最小にする α は $x_{(2)}<\alpha<x_{(n-1)}$ を満たす
この議論を繰り返すと、n が奇数の時、$\alpha=x_{(\frac{n+1}{2})}$
n が偶数の時、$\alpha=\frac{x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n+1}{2})}}{2}$

6.1.2　（２）

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} j = \frac{n+1}{2n}$
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid x_i - x_j \mid = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \mid x_{(i)} - x_{(j)} \mid = \frac{1}{3}(n^2-1)$
これより $G = \frac{\frac{1}{3}(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{3n}$

6.2　６番の総評

(1) は取り組みにくい。難易度は５段階で 3.5。

7　全体的な総評

選択問題は４と５がやりやすい。２番はグラムシュミットを使うのを忘れた人が多かったのではないだろうか？十分に高得点も狙えるが、思わぬところで失点してしまいそうな内容だろう。

8　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房