平成２０年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　：　J.H

所属/学年　：　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$
$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$
よって $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

1.1　１番の総評

チェインルールの問題なので解答は省略。計算頑張ってください。難易度は５段階で３。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$t=2$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$t=-4$ の時、固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ をグラムシュミットの直交化法によって直交化すると

$u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $u_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$

これより $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$

2.1.2　（2）

$x'={}^tPx$ とおくと $Px'=x$
この時 $F(x)={}^tx'\,{}^tPAPx'=\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=2x'^2+2y'^2-4z'^2$
ここで ${}^tx'x'={}^txP\,{}^tPx={}^txx=1$ なので
$F(x)=2x'^2+2y'^2-4z'^2\leq 2(x'^2+y'^2+z'^2)=2$
この時 $x'^2+y'^2=1, z'=0$

よって $x' = {}^tPx = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ \frac{-1}{\sqrt{30}}x + \frac{2}{\sqrt{30}}y + \frac{5}{\sqrt{30}}z \\ \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$
よって $x - 2y + z = 0$ かつ $(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y)^2 + (\frac{-1}{\sqrt{30}}x + \frac{2}{\sqrt{30}}y + \frac{5}{\sqrt{30}}z)^2 = 1$
これをまとめると $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$
以上より $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ かつ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の時に最大値 2 を取る
また $-4(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq F(x)$ なので $-4 \leq F(x)$ なので F(x) の最小値は-4
このとき $-4(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2x'^2 + 2y'^2 - 4z'^2$ より $x' = 0, y' = 0, z' = \pm 1$
よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

2.2　２番の総評

2 番の最大値の所はなかなかやりにくいかもしれない。難易度は５段階で３。

3　３番

3.1　解答

$f(x) = e^x + 2\cos x \int_0^x \cos(s) f(s) ds + 2\sin x \int_0^x \sin(s) f(s) ds - (A)$
よって $f'(x) = e^x - 2\sin x \int_0^x \cos(s) f(s) ds + 2\cos x \int_0^x \sin(s) f(s) ds + 2f(x)$
$f"(x) = e^x - 2\cos x \int_0^x \cos(s) f(s) ds - 2\sin x \int_0^x \sin(s) f(s) ds + 2f'(x)$
これより $2\cos x \int_0^x \cos(s) f(s) ds + 2\sin x \int_0^x \sin(s) f(s) ds = e^x + 2f'(x) - f"(x)$ なのでこれを (A) に代入して
$f"(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$
この 2 階線形常微分方程式を解くと $f(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x (C_1, C_2 \text{は定数})$
$f(0) = C_1 = 1, f'(0) = C_1 + C_2 = 3$ なので $C_1 = 1, C_2 = 2$
よって $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x+1)^2$

3.2　３番の総評

$f(x)$ を微分する際に $f'(x) = e^x + 2f(x)$ としないように。難易度は５段階で３。

4　４番

5　５番

5.1　解答

5.1.1　（1）

$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n P(X \leq k)$
また (右辺)=$\{P(X \leq n) - P(X < 1)\} + \{P(X \leq n) - P(X < 2)\} + \cdots + \{P(X \leq n) - P(X < n)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{P(X \leq n) - P(X < k)\}$
$=\sum_{k=1}^{n} P(k \leq X \leq n)$
$=\sum_{k=1}^{n} P(X \leq k)$
よって与式が成立する

5.1.2 （２）

$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(X = j)$
$=\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} P(X = j)$(正項級数なので項を入れ替えた)
$=\sum_{j=1}^{\infty} jP(X = j)$
$=E[X]$

5.1.3 （３）

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \frac{(k-1)(k+4)}{(k+1)(k+2)} = \frac{6}{(k+1)(k+2)}$
よって (2) より $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = 6\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 3$

5.2 ５番の総評

難しくはないが、細かいところでいくらか減点されそうな感じ。難易度は５段階で３。

6 ６番

6.1 解答

6.1.1 （１）

$E[X] = n, V[X] = 2n$

6.1.2 （２）

$E[\hat{v}_\alpha] = aE[S], E[\frac{S}{v}] = n(\because \frac{S}{v} \sim \chi_n^2)$
よって $E[\hat{v}_\alpha] = anv$
$\hat{v}_\alpha$ が v の不偏推定量になるので $anv = v$。よって $a = \frac{1}{n}$

6.1.3 （３）

$E[(\hat{v}_\alpha - v)^2] = E[\hat{v}_\alpha^2] - 2vE[\hat{v}_\alpha] + v^2$
$E[\hat{v}_\alpha^2] = a^2v^2(n^2 + 2n), E[\hat{v}_\alpha] = anv$ より
$E[(\hat{v}_\alpha - v)^2] = v^2(2na^2 + a^2n^2 - 2an + 1) = (n^2 + 2n)\{a - \frac{1}{n+2}\}^2 + \frac{2n}{n^2+2n}$
よって $a = \frac{1}{n+2}$ で最小となる

6.2　６番の総評

取り組みやすい問題。難易度は５段階で 2.5。

全体的な総評

４番以外はすべて標準的な問題。ただ、２と５は思わぬところで失点してしまうかも。

7　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房