平成２０年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

O から A の方向に積分路 C_1, 孤 AB を A から B の方向に積分路 C_2,B から O の方向に積分路 C_3 をとる
$\int_{C_1} e^{-z^2}dz$ において $z = xe^{\frac{i\pi}{4}}$ とおくと
$-\int_{C_3} e^{-z^2}dz = \int_{C_1} e^{-ix^2}e^{\frac{i\pi}{4}}dx = e^{\frac{i\pi}{4}}\int_{C_1} e^{-ix^2}dx$
また $\lim_{R\to\infty} \mid \int_{C_2} e^{-z^2}dz \mid\leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-z^2} \mid\mid dz \mid$
$z = Re^{i\theta}$ とおくと、$\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ なので $\mid dz \mid= Rd\theta$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-z^2} \mid Rd\theta = \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \mid e^{-R^2e^{2i\theta}} \mid Rd\theta$
=$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mid e^{-R^2\cos 2\theta}e^{-R^2 i\sin 2\theta} \mid= 0$
ここで $f(z)$ は C とその内部で正則なので $\lim_{R\to\infty}\int_C f(z) = 0$
よって $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2+C_3} f(z) = \lim_{R\to\infty}\{\int_{C_1} e^{-z^2}dz - e^{\frac{i\pi}{4}}\int_{C_1} e^{-ix^2}dx\} = 0$
これより $e^{-\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \int_0^\infty \cos x^2dx - i\int_0^\infty \sin x^2dx$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = \int_0^\infty \cos x^2dx - i$ c
実数部分と虚数部分を比較して $\int_0^\infty \sin x^2dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

1.2　１番の総評

類題をやったことがないと多分できないだろう。難易度は５段階で 3.5。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$$\xi(2,1,0) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2)$$

2.1.2　（2）

$S_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\xi(2,1,0)}{\xi(2,1,0)} = 1$

$$\xi(4,2,0) = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)$$

よって $S_{2,1,0}(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_2^2-x_1^2)(x_3^2-x_1^2)(x_2^2-x_3^2)}{x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)}$

2.1.3 （3）

(左辺)=$x_1^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+x_2^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+x_3^k S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)$
$=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma+k} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma+k} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2+k} & x_3^{\beta+1+k} & x_3^{\gamma+k} \end{vmatrix}$
$=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+k+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+k+1} & x_3^{\gamma} \end{vmatrix}+\frac{1}{\xi(2,1,0)}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma+k} \\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma+k} \\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma+k} \end{vmatrix}$ (計算省略)
$=S_{\alpha+k,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta+k,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta,\gamma+k}(x_1,x_2,x_3)$

2.1.4 （4）

(3) において $k=4,\alpha=\beta=\gamma=0$ とおくと (2) より $S_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)=1$ なので
$x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)$
よって $S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)=-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$ を示せば良い
$S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^5 & 1 \\ x_2^2 & x_2^5 & 1 \\ x_3^2 & x_3^5 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1^4 \\ x_2^2 & x_2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3 & x_3^4 \end{vmatrix}\}$
$S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & x_1 \\ x_2^4 & x_2^2 & x_2 \\ x_3^4 & x_3^2 & x_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1^5 & x_1^2 & 1 \\ x_2^5 & x_2^2 & 1 \\ x_3^5 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}\}=\frac{1}{\xi(2,1,0)}\{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^5 & 1 \\ x_2^2 & x_2^5 & 1 \\ x_3^2 & x_3^5 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1^4 \\ x_2^2 & x_2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3 & x_3^4 \end{vmatrix}\}$
$=S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)$
以上より $x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$

2.2 ２番の総評

計算がややしんどいが十分に取り組める問題。難易度は５段階で３。

3 ３番

3.1 解答

与式より
$\frac{\dot{x}}{x}=-\frac{1}{y(t)x(t)}-(A)$
$\frac{\dot{y}}{y}=-\frac{1}{y(t)x(t)}-(B)$
よって $\frac{\dot{x}}{x}=\frac{\dot{y}}{y}$ なので $\log\mid x\mid=\log C\mid y\mid$ (C は定数)
よって $x=Cy$
$x(0)=a,y(0)=b$ なので $C=\frac{a}{b}$
よって $x=\frac{a}{b}y$。これを (A) に代入すると
$\frac{\dot{x}}{x}=-\frac{1}{\frac{b}{a}x^2}$
$\Leftrightarrow x\dot{x}=-\frac{a}{b}$
よって $\frac{1}{2}x^2=-\frac{a}{b}t+C_1$($C_1$は定数)

初期条件より $\frac{a^2}{2}=C_1$
よって $x^2=-\frac{2a}{b}t+a^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2}\geq t$
同様にして $y^2=-\frac{2b}{a}t+b^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2}\geq t$
よって $\lim_{t\to\frac{ab}{2}}x(t)=\lim_{t\to\frac{ab}{2}}y(t)=0$ となる

3.2　３番の総評

あまり難しくはない。難易度は５段階で３か 3.5。

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

f は $[0,a]$ で実数値連続関数なので積分の平均値の定理より
$\int_0^a f(x)dx=f(\alpha)a \ \ (0<\alpha<a)$
よって $\alpha\in(0,a)$ に対して $f(\alpha)=m_\alpha(f)$ が成立する

5　５番

6　６番

6.1　解答

6.1.1　（1）

$p_1=\frac{1}{2}\times q_1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times q_1+\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow q_1=2p_1-\frac{1}{2}$
$p_2=\frac{1}{2}\times q_2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times q_2+\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow q_2=2p_2-\frac{1}{2}$

6.1.2　（2）

また A_1,A_2,B_1,B_2 でイエスと解答する事象をそれぞれ A_1,A_2,B_1,B_2 とおく。
この時 $p(A_1A_2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+p(A_1B_2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+p(B_1A_2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+p(B_1B_2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=p_{12}$
$\Leftrightarrow\frac{1}{4}p(A_1A_2)=p_{12}-\frac{1}{4}p(A_1B_2)-\frac{1}{4}p(B_1A_2)-\frac{1}{4}p(B_1B_2)$
$=p_{12}-\frac{1}{4}p(A_1)p(B_2)-\frac{1}{4}p(B_1)p(A_2)-\frac{1}{4}p(B_1)p(B_2)$ (A_1と B_2, B_1と A_2, B_1と B_2はそれぞれ互いに独立なので)
$=p_{12}-\frac{1}{4}(2p_1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times(2p_2-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
よって $p(A_1A_2)=4p_{12}-p_1-p_2+\frac{1}{4}$

6.2　６番の総評

難しくはないが取り組みやすくもない。難易度は５段階で３か 3.5。

7　７番

7.1　解答

7.1.1　（１）

$Y_i = (X_i - X_{i-1})(X_{i+1} - X_i)(i = 2, 3, \cdots, n-1)$ とおいて確率変数 $U(Y_i)$ を
$U(Y_i) = \begin{cases} 1 & y_i < 0 \\ 0 & Y_i \geq 0 \end{cases}$
と定義する。この時 $T_1 = \sum_{i=2}^{n-1} U(Y_i)$
ここで $Y_i < 0 \Leftrightarrow X_{i-1} < X_{i+1} < X_i, X_{i+1} < X_{i-1} < X_i, X_i < X_{i-1} < X_{i+1}, X_i < X_{i+1} < X_{i-1}$
よって $P(Y_i < 0) = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$
よって $E[T_1] = \frac{2}{3}(n-1-2+1) = \frac{2(n-2)}{3}$

7.1.2　（２）

X_k と X_{k+1} が転換点である
$\Leftrightarrow X_{k-1} < X_k > X_{k+1} < X_{k+2}, X_{k-1} > X_k < X_{k+1} > X_{k+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{k+1} < X_{k+2} < X_{k-1} < X_k \\ X_{k+1} < X_{k-1} < X_{k+2} < X_k \\ X_{k-1} < X_{k+1} < X_{k+2} < X_k \\ X_{k-1} < X_{k+1} < X_k < X_{k+2} \\ X_{k+1} < X_{k-1} < X_k < X_{k+2} \\ X_{k+2} < X_k < X_{k+1} < X_{k-1} \\ X_k < X_{k+2} < X_{k+1} < X_{k-1} \\ X_k < X_{k-1} < X_{k+2} < X_{k+1} \\ X_{k+2} < X_k < X_{k-1} < X_{k+1} \\ X_k < X_{k+2} < X_{k-1} < X_{k+1} \end{cases}$$

よって Z を X_k と X_{k+1} が転換点の時に１をとる確率変数とすると $Z \sim B(1, \frac{10}{4!})$
よって $T_2 \sim B(n-3, \frac{10}{4!})$ より $E[T_2] = \frac{5(n-3)}{12}$

7.2　７番の総評

類題が平成１７年に出ているので取り組めなくはない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

8　８番

8.1　解答

8.1.1　（１）

$P(R \leq 1) = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = P(-\sqrt{1-Y^2} \leq X \leq \sqrt{1-Y^2}) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx)dy = \frac{\pi}{4}$

8.1.2 （2）

$|\log R| = -\log R$
$S^2 = -\frac{2X^2}{X^2+Y^2}\log(X^2+Y^2)$
$T^2 = -\frac{2Y^2}{X^2+Y^2}\log(X^2+Y^2)$
よって $S^2+T^2 = -2\log(X^2+Y^2)$
これより $X^2+Y^2 = e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}$ なので $R = e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}$
ゆえに $X = \frac{S}{2}\frac{R}{\sqrt{|\log R|}} = S\frac{e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}}{\sqrt{S^2+T^2}}, Y = T\frac{e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}}{\sqrt{S^2+T^2}}$

8.1.3 （3）

(左辺)=$\frac{P(S\leq s_0, T\leq t_0, R\leq 1)}{P(R\leq 1)}$
ここで $R\leq 1$ の時 $0\leq e^{-\frac{S^2+T^2}{4}}\leq 1$ なので $-\infty\leq S\leq\infty, -\infty\leq T\leq\infty$
また $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}$
よって $F_{S,T}(s,t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}\cdot\frac{1}{4}$
よって (与式)=$\frac{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{s_0}\int_{-\infty}^{t_0}\frac{1}{2}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}dsdt}{\frac{\pi}{4}}$
=$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{s_0}\int_{-\infty}^{t_0}e^{-\frac{S^2+T^2}{2}}dsdt$
=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s_0}e^{-\frac{s^2}{2}}ds\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

8.2 8番の総評

なかなか取り組みにくい。難易度は５段階で４。

9 9番

9.1 解答

9.1.1 （1）

$E[X] = \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_0^\infty x\phi(x-\mu)dx = \frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt$
ここで $\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = \mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt + \int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt$
$\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt > \mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt > \int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt(\mu < -1)$ が成立し、
$\lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt = \lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty t\phi(t)dt = 0$ なのではさみうちの原理より
$\lim_{\mu\to-\infty}\mu\int_{-\mu}^\infty\phi(t)dt = 0$
以上より $\lim_{\mu\to-\infty}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = 0$
また $\lim_{\mu\to-\infty}(1-\Phi(-\mu)) = 1-1 = 0$
よってロピタルの定理より $\lim_{\mu\to-\infty}\frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^\infty(\mu+t)\phi(t)dt = \lim_{\mu\to-\infty}\frac{-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt}{\phi(-\mu)}$
$\lim_{\mu\to-\infty}\phi(-\mu) = \lim_{\mu\to-\infty}-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt = 0$ よりロピタルの定理から
$\lim_{\mu\to-\infty}\frac{-\int_\infty^{-\mu}\phi(t)dt}{\phi(-\mu)} = \lim_{\mu\to-\infty}\frac{\phi(-\mu)}{-\phi'(-\mu)} = 0$

9.1.2　（２）

(1) より $E[X] = \mu + \frac{\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)}$
また $E[X^2] = \mu^2 + \frac{2\mu}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^{\infty} t\phi(t)dt + \frac{1}{1-\Phi(-\mu)}\int_{-\mu}^{\infty} t^2\phi(t)dt$
ここで $\int_{-\mu}^{\infty} t\phi(t)dt = \phi(\mu)$
$\int_{-\mu}^{\infty} t^2\phi(t)dt = 1 - \Phi(-\mu)$
これより $E[X^2] = \mu^2 + \frac{2\mu\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)} + 1$
よって $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - (\frac{\phi(\mu)}{1-\Phi(-\mu)})^2 < 1$

9.2　９番の総評

(1) でロピタルの定理を使うのがなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい

10　１０番

全体的な総評

１，２，３，６，７，９から選択するのが良いと思われる。

11　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房