平成２１年度　システム創成専攻
数理科学分野２　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解説

1.1.1　（1）

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと与式は
$r^4 - r^3(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$
これより $r = \sin 3\theta$（３倍角の公式を使った。）
$r > 0$ の時、$0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi, \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$
$\frac{dr}{d\theta} = 3\cos 3\theta$ より $\frac{dr}{d\theta} = 0$ とおくと、$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$
これを元に増減表を書いて、グラフを書けばよい（省略）

1.1.2　（2）

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のときの面積は $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{12}$
よって求める面積は $3 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

1.2　１番の総評

あまりやったことのない問題なので非常に取り組みにくい。極座標で表された図形の面積の求め方は「難波誠著　「微分積分学」　裳華房」の１２５ページを参照してください。難易度は５段階で４。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\det A(t) = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$ より
$\frac{d}{dt}\det A(t) = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} \dot{a}_{1i_1} \cdots a_{ni_n} + \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} \cdots \dot{a}_{ni_n}$
ここで $D_1 = \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} \dot{a}_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$ とおくと

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \dot{a}_{1i} A_{1i}$$

また $A^{(-1)}(t) = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}$

よって $\dot{A}A^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}$

この (i,i) 成分は $\sum_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}Aij$

$tr(\dot{A}A^{-1})\det A(t) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}Aij)$

$\frac{d}{dt}\det A(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \dot{a}_{ij}A_{ij})$

よって $\frac{d}{dt}\det A(t) = tr(\dot{A}A^{-1})\det A(t)$

3　３番

4　４番

4.1　解答

4.1.1　（1）

1 から 2 の間で高さ 1 の三角形、3 から 4 の間で高さ $\frac{1}{2}$ の三角形、5 から 6 の間で高さ $\frac{1}{4}$ の三角形というようにすると

$\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid dx = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots) = 2$

しかし、$\lim_{x\to\infty} \mid f(x) \mid = 0$ とはならない。

5　５番

5.1　解説

5.1.1　（1）

計算結果のみ示す。

$\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial x}f(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{(y-b)^2z_x^2}{(z-c)^2}f"(\frac{y-b}{z-c}) - (y-b)z_{xx}f'(\frac{y-b}{z-c})$

$\frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial y}f(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{\{z-c-(y-b)z_y\}^2}{(z-c)^2}f"(\frac{y-b}{z-c}) + (b-y)z_{yy}f'(\frac{y-b}{z-c})$

5.1.2　（2）

$\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-a}{z-c}\} = (a-x)z_{xx}$

同様に $\frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{x-a}{z-c}\} = (a-x)z_{yy}$

これより $\frac{1}{z_{xx}}\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-a}{z-c}\} = \frac{1}{z_{yy}}\frac{\partial}{\partial y}\{(z-c)^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{x-a}{z-c}\}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z_{xx}}\{\frac{(y-b)^2z_x^2}{(z-c)^2}f"(\frac{y-b}{z-c}) - (y-b)z_{xx}f'(\frac{y-b}{z-c})\} = \frac{1}{z_{yy}}\{\frac{\{z-c-(y-b)z_y\}^2}{(z-c)^2}f"(\frac{y-b}{z-c}) + (b-y)z_{yy}f'(\frac{y-b}{z-c})\}$

よって $z_{yy}\{(y-b)z_x\}^2 f"(\frac{y-b}{z-c}) = z_{xx}\{z-c-(y-b)z_y\}^2 f"(\frac{y-b}{z-c})$
$f"(\frac{y-b}{z-c}) \neq 0$ の時は $z_{xx}\{z-c-(y-b)z_y\}^2 = z_{yy}\{(y-b)z_x\}^2$
$f"(\frac{y-b}{z-c}) = 0$ の時は (1) より $\frac{\partial}{\partial x}\{(z-c)^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{x-a}{z-c}\} = (b-y)z_{xx}f'(\frac{y-b}{z-c}) = (a-x)z_{xx}$
これより $f'(\frac{y-b}{z-c}) = \frac{x-a}{y-b}$

5.2　５番の総評

計算が非常に複雑な問題。統計ができない人は絶対に選択しなければならない。難易度は５段階で 3.5 か 4。

6　６番

６番

X,Y を互いに独立でともに標準正規分布に従う確率変数とする。(X,Y) の同時分布を２変量標準正規分布という。
(1) 確率変数 U,V を次式で定めるとき、(U,V) の同時分布を求めよ。
$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} (0 \leq \theta < 2\pi)$
(2) ２次の実正則行列 A,B が $AA^T = BB^T$ を満たすとする。ここで A^T は行列 A の転置行列を表す。
$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と定義するとき、(X_1, Y_1) の同時分布は (X_2, y_2) の同時分布と一致することを示せ。

6.1　（1）

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))$
ここで $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ より
$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$
よって $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$
よって $f_{U,V}(u,v) = \mid J \mid f_{X,Y}(\cos\theta u + \sin\theta v, -\sin\theta u + \cos\theta v) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(u^2+v^2))$
これより (U,V) の同時分布は $F(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(p^2+q^2))dpdq$
これも二変量正規分布である。

6.2　（2）

$f_{X_1,Y_1}(x_1,y_1) = f_{X,Y}(x,y) \mid \det(A^{-1}) \mid = \mid \det(A^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))$
ここで $x^2+y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (A^T)^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (AA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$
よって $f_{X_1,Y_1}(x_1,y_1) = \mid \det(A^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (AA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\}$

同様にして $f_{X_2,Y_2}(x_2,y_2) =\mid \det(B^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}(BB^T)^{-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\}$

$=\mid \det(B^{-1}) \mid \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}(AA^T)^{-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\}$(条件より)

ここで $AA^T = BB^T$ より $\det(AA^T) = \det(BB^T)$

これより $\det(A)\det(A^T) = \det(B)\det(B^T)$

$\det(A) = \det(A^T), \det(B) = \det(B^T)$ なので $\det(A) = \det(B)$

よって $\det(A^{-1}) = \det(B^{-1})$

よって (X_1, Y_1) と (X_2, Y_2) は同じ密度関数を持つのでその同時分布も一致する。

6.3　６番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で 3.5。

7　７番

７番

X, Y が平均 $E[X] = E[Y] = 0$、分散 $V[X] = V[Y] = 1$、相関係数 $Corr(X,Y) = \rho$ を持つ２変量正規分布に従うとする。$Z = max(X,Y)$ とする。
(1)$Y = y$ が与えられたときの X の条件付き確率密度関数 $f_{x\cdot y}(x|y)$ を求めよ。
(2)Z の密度関数が
$f_Z(z) = 2\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$
で与えられることを証明せよ。

7.1　解答

7.1.1　（1）

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

よって $f_{x|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2) + \frac{y^2}{2})$

7.1.2　（2）

Z の確率密度関数は $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x,z)dx + \int_{-\infty}^{z} f(z,y)dy = 2\int_{-\infty}^{z} f(x,z)dx$

ここで $\int_{-\infty}^{z} f(x,z)dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{z}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho z)^2)dx$

$t = \frac{x-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}} = t$ とおくと、$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$

よって $\int_{-\infty}^{z} f(x,z)dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z} e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{1-\rho^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

=$\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$

以上より $f_z(z) = 2\phi(z)\Phi(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}z)$

7.2　７番の総評

(2) は結構難しい。難易度は５段階で３か 3.5。

8　８番

８番

$X_1 \cdots X_n (n \geq 2)$ は互いに独立で、それぞれ平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数である。ここで $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ は未知である。さらに
$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, T_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$
とする。
(1)$\frac{T_n}{n}$ は σ^2 の最尤推定量であること、および不偏推定量ではないことを示せ。
(2)$E[\sqrt{Y_m}]$ を求めよ。
(3)$\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}\sqrt{T_n}$ は σ の不偏推定量である事を示せ。

8.1　解答

8.1.1　（1）

$X_1 \cdots X_n$ の同時確率密度関数を $f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n)$ とおくと
$f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})$
対数を取って $\log f_{X_1 \cdots X_n}(x_1 \cdots x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
両辺を μ と σ^2 で微分して=0 とおくと
$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$
$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$
これより $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{x}$
$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
よって $\frac{T_n}{n}$ は σ^2 の最尤推定量である
また $\frac{T_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \overline{X_n})^2$
=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\mu - \overline{X_n}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - \overline{X_n})^2$
=$\sigma^2 - 2(\overline{X_n} - \mu)^2 + (\overline{X_n} - \mu)^2$
=$\sigma^2 - (\overline{X_n} - \mu)^2$
これより $E[\frac{T_n}{n}] = \sigma^2 - E[(\overline{X_n} - \mu)^2] = \sigma^2 - V[\overline{X}] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$
よって $\frac{T_n}{n}$ 不偏推定量ではない

8.1.2　（2）

$E[\sqrt{Y_m}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^{\infty}\sqrt{x}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$
=$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^{\infty}x^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx$
$\frac{x}{2} = t$ とおくと $E[\sqrt{Y_m}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}}\int_0^{\infty}(2t)^{\frac{m-1}{2}}e^{-t}2dt$
= $\cdots$

$=\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\Gamma(\frac{m+1}{2})$

8.1.3 （3）

$\frac{T_n}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\overline{X_n})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $(n-1)$ のカイ二乗分布に従う。
よって $E[\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma}]=\int_0^\infty \sqrt{x}\frac{1}{\Gamma(\frac{m-1}{2})2^{\frac{m-1}{2}}}x^{\frac{m-1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
よって $E[\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}\sqrt{T_n}]=\sigma$ が成立するので $\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}\sqrt{T_n}$ は σ の不偏推定量である。

8.2 ８番の総評

11 問の中で 1 番取り組みやすい問題。難易度は 5 段階で 3。

9 ９番

９番

次の自己回帰過程モデルを考える。
$Y_t=c+\phi Y_{t-1}+\epsilon_t t=2,3,\cdots,T$
ただし、$\{\epsilon_t\}$ は互いに独立で共通の正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従い、かつ ϵ_t は $Y_1\cdots y_{t-1}$ と独立である。$\theta=(c,\phi,\sigma^2)$ とおく。
(1)$Y_1=y_1$ という条件の下での $Y_2\cdots Y_T$ の条件付き同時確率密度関数
$f_{Y_T\cdots Y_2|Y_1}(y_T,\cdots y_2|y_1;\theta)$
を求めよ。
(2) データ $\{y_T\cdots y_1\}$ が得られた時、c,ϕ の最尤推定量 $\hat{c},\hat{\phi}$ を求めよ。
(3)σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ を (2) で得られた $\hat{c},\hat{\phi}$ を用いて表せ。

9.1 解答

9.1.1 （1）

$$\begin{cases} Y_1=y_1 \\ Y_2=c+\phi y_1+\epsilon_2=\phi y_1+\eta_2 \\ Y_3=c+\phi Y_2+\epsilon_3=\phi Y_2+\eta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_T=c+\phi Y_{T-1}+\epsilon_T=\phi Y_{T-1}+\eta_T \end{cases}$$

このとき $\eta_2\cdots\eta_T$ は $\{\epsilon\}_k(k=2,\cdots,T)$ が独立なので互いに独立である。

よって $f_{\eta_2\cdots\eta_T|Y_1=y_1}(\eta_2\cdots\eta_T)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{T-1}}\exp(-\frac{\sum_{k=2}^{n}(\eta_k-c)^2}{2\sigma^2})$
ここで

$$\begin{cases}\eta_2=Y_2-\phi y_1\\ \eta_3=Y_3-\phi Y_2\\ \eta_4=Y_4-\phi Y_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \eta_T=Y_T-\phi Y_{T-1}\end{cases}$$

また $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\eta_2}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial\eta_2}{\partial Y_T}\\ \frac{\partial\eta_3}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial\eta_3}{\partial Y_T}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial\eta_T}{\partial Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial\eta_T}{\partial Y_T}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & & \cdot & 0\\ -\phi & 1 & 0 & \cdot & 0\\ 0 & -\phi & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & -\phi & 1\end{vmatrix}=1$
これより $f_{Y_2\cdots Y_T|Y_1=y_1}(y_2\cdots y_T)=\mid J\mid f_{\eta_2\cdots\eta_T|Y_1=y_1}(y_2-\phi y_1,\cdots,y_T-\phi y_{T-1})$
$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T-1}{2}}}\exp(-\frac{\sum_{k=2}^{T}(y_k-\phi y_{k-1}-c)^2}{2\sigma^2})$

9.1.2 （２）

$f_{Y_2\cdots Y_T|Y_1=y_1}=\frac{f_{Y_1\cdots Y_T}(y_1\cdots y_T)}{f_{Y_1}(y_1)}$
これより $\log L(\theta)=\log f_{Y_2\cdots Y_T|Y_1=y_1}(y_1\cdots y_T)+\log f_{Y_1}(y_1)$
よって $\frac{\partial}{\partial c}\log L(\theta)=0\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{T}(y_k-\phi y_{k-1}-c)=0$ ー（A）
$\frac{\partial}{\partial\phi}\log L(\theta)=0\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{T}y_{k-1}(y_k-\phi y_{k-1}-c)=0$ ー（B）
(A) と (B) を解いて $\hat{\phi}=\frac{(\sum_{k=2}^{T}y_k)(\sum_{k=2}^{T}y_{k-1})-(T-1)(\sum_{k=2}^{T}y_ky_{k-1})}{(\sum_{k=2}^{T}y_{k-1})^2-(T-1)(\sum_{k=2}^{T}y_{k-1}^2)}$
$\hat{c}=\frac{\sum_{k=2}^{T}y_k-\hat{\phi}\sum_{k=2}^{T}y_{k-1}}{T-1}$(上の $\hat{\phi}$ を代入する)

9.1.3 （３）

$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\theta)=-\frac{(T-1)}{2\sigma^2}+\sum_{k=2}^{T}\frac{(y_k-y_{k-1}\phi-c)^2}{2(\sigma^2)^2}=0$
これより $\hat{\sigma^2}=\sum_{k=2}^{T}\frac{(y_k-y_{k-1}\hat{\phi}-\hat{c})^2}{T-1}$

9.2 ９番の総評

どのように変数変換するかがなかなか難しい。難易度は５段階で 3.5 くらい。

10 １０番

１０番

$\{X_k; k = 1, 2, \cdots, n\}$ を互いに独立な確率変数の列で平均と分散を $E[X_k] = \mu, Var(X_k) = k$ とする。$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく。T_n を未知母数 μ の推定量であるとする。
(1)T_n を μ の不偏推定量であるとする。$Var[T_n] \to 0 (n \to \infty)$ のとき、T_n は μ の一致推定量である事を示せ。
(2)$\overline{X_n}$ は μ の一致推定量とはならない場合があることを具体例を用いて示せ。
(3)w_k を定数とし $\hat{\mu} = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k$ とおく。$\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量である時、その分散 $Var[\hat{\mu}]$ が最小となるように w_k を定めよ。
(4) (3) で定めた w_k を持つ $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量であることを示せ。

10.1 解答

10.1.1 （1）

チェビシェフの不等式より
$P\{(T_n - \mu)^2 \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon} E[(T_n - \mu)^2]$
が成立する。ここで
$E[(T_n - \mu)^2] = E[(T_n - E[T_n] + E[T_n] - \mu)^2]$
$= E[(T_n - E[T_n])^2] + 2E[T_n - E[T_n]]E[E[T_n] - \mu] + (E[T_n] - \mu)^2$
$= V[T_n] + (E[T_n] - \mu)^2$
ここで T_n は μ の不偏推定量なので $E[T_n] = \mu$
また条件より $\lim_{n\to\infty} V[T_n] = 0$
これより $\lim_{n\to\infty} E[(T_n - \mu)^2] = 0$
以上よりチェビシェフの不等式から $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - \mu)^2 \geq \epsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon} E[(T_n - \mu)^2] = 0$
が成立するので $\lim_{n\to\infty} P(\mid T_n - \mu \mid < \epsilon) = 1$ となる。
以上より T_nはμ の一致推定量である。

10.1.2 （2）

$X_k \sim N(\mu, k)$ とする。この時正規分布の再生性より $\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}))$
この時 $\lim_{n\to\infty} P(\mid T_n - \mu \mid < \epsilon) = 1$ は成立しないので $\overline{X_n}$ は μ の不偏推定量ではない。

10.1.3 （3）

$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k$ より
$E[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} w_k E[X_k] = \mu \sum_{k=1}^{n} w_k = \mu$
よって $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$
また $Var[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 k (X_1 \cdots X_n$は独立なので$)$
よって $f(w_1, \cdots, w_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 k$、$g(w_1, \cdots, w_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k - 1$ とおいて、$g = 0$ の下で f を最小にする問題を考えればよい。
ラグランジュの未定乗数法を使うと、

$\frac{\frac{\partial f}{\partial a_1}}{\frac{\partial g}{\partial w_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_2}}{\frac{\partial g}{\partial w_2}} = \cdots = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_n}}{\frac{\partial g}{\partial w_n}}$
これより $\frac{2w_1}{1} = \frac{4w_2}{1} = \cdots = \frac{2nw_n}{1}$
この時 $f = 0$ なので $w_1 + \frac{1}{2}w_1 + \cdots + \frac{1}{n}w_1 = 1$
よって $w_1 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$
以上より $w_k = \frac{1}{k} \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$

10.1.4　（4）

$V[\hat{\mu}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (\frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}})^2 = \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$
よって $\lim_{n \to \infty} V[\hat{\mu}] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}} = 0$
よって $\hat{\mu}$ は μ の不偏推定量で $\lim_{n \to \infty} V[\hat{\mu}] = 0$ が成立するので $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量である。

10.2　１０番の総評

(2) は一致推定量である例を探す方が難しいような気がする。一致推定量についての理解がないと非常にやりにくい。難易度は５段階で 3.5 か 4。

11　１１番

１１番

確率変数 $X_i (i = 1, 2, \cdots)$ は０か１の値を取り、正の定数 π_0, π_1 に対して
$P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) = \pi_0 \quad P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) = \pi_1$
とする。さらに自然数 $j = 2, 3, \cdots$ に対して以下を仮定する。
$P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 0, X_i = 1) = \pi_0, P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 1, X_i = 1) = \pi_1$
(1)$p_i = p(X_i = 1)$ とおくとき、p_{i+1} を p_i, π_0, π_1 で表せ。
(2) 任意の自然数 i に対して $p_i = q$(定数) とする。このとき $E[X_i X_{i+k}]$ は i に関係しないことを示し、$e_k = E[X_i X_{i+k}]$ とおくとき、e_0, e_1 を求めよ。また e_k を e_{k-1}, π_0, π_1, q を用いて表せ。
(3)(2) の条件の下で共分散に対して
$\lim_{k \to \infty} Cov(X_i, X_{i+k}) = 0$
が成立することを示せ。

11.1　解答

11.1.1　（1）

$p_{i+1} = P(X_{i+1} = 1) = P(X_{i+1} = 1, X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1, X_i = 1)$
$= P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) P(X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) P(X_i = 1)$
=$\pi_o (1 - p_i) + p_i \pi_1$

11.1.2 （２）

$E[X_iX_{i+k}] = P(X_i = 1, X_{i+k} = 1) = P(X_{i+k} = 1|X_i = 1)P(X_i = 1)$
よって $\forall i, j \in N$ に対して $P(X_{i+k} = 1|X_i = 1) = P(X_{j+k} = 1|X_j = 1)$ が $\forall k \in N$ で成立することをいえば良い
$k = 1$ の時は自明
$k = n$ の時に成立することを仮定
$k = n + 1$ の時、$P(X_{i+n+1} = 1|X_i = 1) = P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 1|X_i = 1) + P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 0|X_i = 1)$
ここで $P_A^{(i)} = P(X_{i+n+1} = 1, X_{i+n} = 1|X_i = 1)$ とおくと、
$P_A^{(i)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1,X_{i+n}=1,X_i=1)}{P(X_i=1)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1,X_{i+n}=1)}{P(X_{i+n}=1)} \cdot \frac{P(X_{i+n}=1,X_i=1)}{P(X_i=1)}$
$\because$）条件より $\frac{P(X_i=1,X_{i+n}=1,X_{i+n+1}=1)}{P(X_i=1,X_{i+n}=1)} = \frac{P(X_{i+n}=1,X_{i+n+1}=1)}{P(X_{i+n}=1)} = \pi_1$ だから
よって $P_A^{(i)} = \frac{P(X_{i+n+1}=1,X_{i+n}=1)}{P(X_{i+n}=1)} \cdot \frac{P(X_{i+n}=1,X_i=1)}{P(X_i=1)}$
$= P(X_{i+n+1} = 1|X_{i+n} = 1) \cdot P(X_{i+n} = 1|X_i = 1)$
$= P(X_{i+n+1} = 1|X_{i+n} = 1) \cdot P(X_{j+n} = 1|X_j = 1) = p_A^{(j)}$(帰納法の仮定より)
同様にして $P_B^{(i)} = p_B^{(j)}$
以上より $E[X_iX_{i+k}]$ は i によらない。
また $e_0 = E[X_iX_i] = q$
$e_1 = E[X_iX_{i+1}] = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1) = q\pi_1$
$e_k = P(X_{i+k} = 1, X_i = 1) = P(X_{i+k} = 1, X_{i+k-1} = 0, X_i = 1) + P(X_{i+k} = 1, X_{i+k-1} = 1, X_i = 1)$
=$P(X_{i+k} = 1|X_{i+k-1} = 0, X_i = 1)P(X_{i+k-1} = 0, X_i = 1) + P(X_{i+k} = 1|X_{i+k-1} = 1, X_i = 1)P(X_{i+k-1} = 1, X_i = 1)$
=$\pi_0(q - e_{k-1}) + \pi_1 e_{k-1}$

11.1.3 （３）

(2) より $e_k = (\pi_1 - \pi_0)e_{k-1} + \pi_0 q - (A)$
また与えられた条件より $q = q\pi_1 + (1 - q)\pi_0$
ここで (A) の特性方程式を考えると $\lambda = (\pi_1 - \pi_0)\lambda + \pi_0 q$
これより $\lambda = \frac{\pi_0 q}{1-\pi_1+\pi_0} = \frac{\pi_0 q}{\frac{1-q}{q}\pi_0+\pi_0} = q^2$
よって $e_k - q^2 = (\pi_1 - \pi_0)(e_{k-1} - q^2), e^0 = q$
これより $e_k = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} + q^2$
よって $Cov(X_i, X_{i+k}) = E[X_iX_{i+k}] - E[X_i]E[X_{i+k}] = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} + q^2 - q^2 = q(\pi_1 - \pi_0)^{k-1} \to 0 (k \to \infty)$

11.2 １１番の総評

(1) は簡単だが、(2) と (3) はかなり取り組みにくい。難易度は５段階で４。

12 全体的な総評

まず、７番と８番が取り組みやすい。その次に５、６、９に何とか手を出せるだろう。２，３，４は結構難しいので統計ができない人は非常に苦しい内容だっただろう。

13　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房