平成２１年度　システム創成専攻
数理科学分野１　解答

作成者　:　J.H
所属/学年　:　基礎工学部情報科学科数理科学コース４年

1　１番

1.1　解答

1.1.1　（1）

$u=\frac{f_x}{f}, u_x=\frac{f_{xx}f-f_x^2}{f^2}, u_t=\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}, u_{xx}=\frac{(f_{xxx}f+f_{xx}f_x-2f_{xx}f_x)f^2}{f^4}-\frac{(f_{xx}f-f_x^2)2ff_x}{f^4}$
よって $2uu_x+u_{xx}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}$
これより $u_t=2uu_x+u_{xx}\Leftrightarrow\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}$
よって $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_t}{f})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_{xx}}{f})\Leftrightarrow\frac{f_t}{f}=\frac{f_{xx}}{f}+C(t)\Leftrightarrow f_t=f_{xx}+C(t)f$
以上より $(A)\Leftrightarrow(B)$

1.1.2　（2）

$u=(\log(e^{k_1x+l_1t}+e^{k_2x+l_2t}))'('$ は x での偏微分を表すものとする。)
よって $f=e^{k_1x+l_1t}+e^{k_2x+l_2t}=A+B$ とおける。
$f_x=k_1A+k_2B, f_t=l_1A+l_2B, f_{xx}=k_1^2A+k_2^2B, f_{xt}=k_1l_1A+k_2l_2B, f_{xxx}=k_1^3A+k_2^3B$
これより $\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}=\frac{f_{xxx}f-f_{xx}f_x}{f^2}\Leftrightarrow(k_1+k_2)(k_1-k_2)^2AB=(k_1-k_2)(l_1-l_2)AB$
よって $k_1=k_2$ と $(k_1+k_2)(k_1-k_2)=(l_1-l_2)$

1.2　１番の総評

この年は前年までの傾向からいくらか変わってしまったようである。少し難度が上がった。

2　２番

2.1　解答

2.1.1　（1）

$\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ とおくと
$\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}$
よって T は正則である。また
$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}$ なので
$T^{-1}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B & 0\\ 0 & A-B\end{pmatrix}$

2.1.2 （2）

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \sum sgn\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n & \cdot & \cdot & \cdot & 2n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n & \cdot & \cdot & \cdot & i_{2n} \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \cdots a_{ni_{2n}}$$
$$= \sum sgn\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \sum sgn\begin{pmatrix} n+1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2n \\ i_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & i_{2n} \end{pmatrix} a_{n+1i_{n+1}} a_{n+2i_{n+2}} \cdots a_{2ni_{2n}}$$
$$= \det(A)\det(B)$$

2.1.3 （3）

$T^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$ において両辺の行列式を取ると

(左辺)=$| T^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} T |=| T^{-1} || T | \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

(右辺)=$\det(A+B)\det(A-B)$((2) より)

以上より $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$

2.1.4 （4）

$$\det\begin{pmatrix} A-\lambda I & I \\ I & A-\lambda I \end{pmatrix} = \det(A-(\lambda-1)I)\det(A-(\lambda+1)I)((3)\ \text{より})$$
$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & -4-\lambda+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4-\lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & -4-\lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

これより $\lambda = -3, -3+\sqrt{2}, -3-\sqrt{2}, -5, -5+\sqrt{2}, -5-\sqrt{2}$

2.2 ２番の総評

これも新傾向の問題。手も足も出ないというわけではないが … 。難易度は５段階で 3.5。

3 ３番

3.1 解答

3.1.1 （1）

$x_1 > x_2$ のとき $max(x_1, x_2) = x_1$

$x_1 < x_2$ のとき $max(x_1, x_2) = x_2$

よって (与式)=$\int_0^a \{\int_0^{x_2} x_2 dx_1 + \int_{x_2}^a x_1 dx_1\} dx_2 = \frac{2}{3}a^3$

3.1.2 （2）

(与式)=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\int_0^{max(x_2 \cdots x_n)} max(x_2 \cdots x_n) dx_1 + \int_{max(x_2 \cdots x_n)}^a x_1 dx_1\} dx_2 dx_3 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\frac{a^2}{2} + \frac{max^2(x_2 \cdots x_n)}{2}\} dx_2 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \{\int_0^{max(x_3 \cdots x_n)} \frac{a^2}{2} + \frac{max^2(x_3 \cdots x_n)}{2} dx_2 + \int_{max(x_3 \cdots x_n)}^a \frac{a^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\} dx_3 \cdots dx_n$
=$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}max^3(x_3 \cdots x_n) dx_3 \cdots dx_n$
= $\cdots$
=$\int_0^a \{\frac{n-1}{n}a^n + \frac{1}{n}x_n^n\} dx_n$
=$\frac{n-1}{n}a^{n+1} + \frac{a^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}a^{n+1}$

3.2 ３番の総評

取り組みやすいとは言えないが、選択すべき問題。難易度は５段階で３。

4 ４番

4.1 解答

4.1.1 （1）

$g(s) = aB(s)g(s) + b$ より $g(s) = \frac{b}{1-aB(s)}$
よって $g'(s) = \frac{abB'(s)}{(1-aB(s))^2}$
$g"(s) = ab\frac{B"(s)(1-aB(s))+2a(B'(s))^2}{(1-aB(s))^3}$
これより (左辺)=$\frac{\frac{b}{1-aB(s)} ab \frac{B"(s)(1-aB(s))+2a(B'(s))^2}{(1-aB(s))^3}}{\frac{a^2b^2B'(s)^2}{(1-aB(s))^4}} = 2a + \frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2}$
ここで $B'(s) = \frac{g(s)}{G(s)}$(条件より)
$B"(s) = \frac{g'(s)G(s)-g(s)G'(s)}{G^2(s)}, 1-aB(s) = \frac{b}{g(s)}$
よって $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2} = \frac{b}{g(s)}\frac{g'(s)G(s)-g(s)G'(s)}{g^2(s)}$
また $G'(s) = g(s)^2$
よって $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2} = b(\frac{g'(s)G(s)}{g^3(s)} - 1)$
ここで $g'(s) = \frac{abB'(s)}{(1-ab(s))^2} = \frac{ab\frac{g(s)}{G(s)}}{(1-ab(s))^2} = \frac{ab\frac{g(s)}{G(s)}}{\frac{b^2}{g^2(s)}} = \frac{a}{b}\frac{g^3(s)}{G(s)}$
これより $\frac{B"(s)(1-aB(s))}{(B'(s))^2} = b(\frac{a}{b} - 1) = a - b$
以上より (左辺)=$2a + a - b = 3a - b$

4.1.2 （2）

$y = \frac{g}{g'}$ とおくと、$y' = \frac{(g')^2 - gg"}{(g')^2} = 1 - \frac{gg"}{(g')^2}$
これより $(*) \Leftrightarrow a(1-y') = 3a - b \Leftrightarrow y' = -2 + \frac{b}{a}$
よって $y(s) = -2s + \frac{b}{a}s + C_1$($C_1$は定数)
ここで $y(0) = C_1 = \frac{g(0)}{g'(0)} = \frac{b}{ab^2} = \frac{1}{ab}$
これより $y(s) = -2s + \frac{b}{a}s + \frac{1}{ab}$
よって $\frac{g'}{g} = \frac{1}{s(-2+\frac{b}{a})+\frac{1}{ab}}$

$\log g = \frac{1}{-2+\frac{b}{a}} \log\{s(-2+\frac{b}{a}) + \frac{1}{ab}\} + C_1$
$g = C_2\{s(-2+\frac{b}{a}) + \frac{1}{ab}\}^{-2+\frac{b}{a}}$
$g(0) = C_1(\frac{1}{ab})^{-2+\frac{b}{a}} = b \Leftrightarrow C_1 = \frac{b}{(ab)^{-2+\frac{b}{a}}}$
よって $g = b\{-2abs + bs^2 + 1\}^{-2+\frac{b}{a}}$

4.2　4番の総評

(1) はもっとシンプルな答案があるはず。難易度は５段階で４。

5　５番

５番

確率変数 X は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする。さらに確率変数 Y は $X = x(0 < x < 1)$ が与えられたときの条件付き確率分布が二項分布 $B(n,x)$、すなわち試行回数 n（自然数）、成功確率 x のベルヌーイ試行における成功回数の分布であるとする。
(1)$P(Y=k) = \frac{1}{n+1}, k = 0, 1, \cdots, n$ を示せ。
(2)$Y = k$ が与えられた時の X の条件付き分布を求めよ。

5.1　解答

5.1.1　（1）

$P(Y=k|X=x) =_n C_k x^k(1-x)^{n-k}$(条件より)
ここで X の確率密度関数を $f(x)$、X,Y の同時確率密度関数を $f(x,y)$ とおくと
$f(x) = 1, f(x,y) =_n C_y x^y (1-x)^{n-y}$
よって $P(Y=k) = \int_0^1 {}_nC_k x^k (1-x)^{n-k} dx$
$=_n C_k \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$
$=_n C_k B(k+1, n-k+1)$
$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$
$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$
$=\frac{1}{n+1}(k = 0, 1, \cdots, n)$

5.1.2　（2）

$f(x|y=k) = \frac{f(x,k)}{P(Y=k)} = \frac{{}_nC_k x^k(1-x)^{n-k}}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)_n C_k x^k (1-x)^{n-k}$

5.2　５番の総評

一番簡単な選択問題。選択すべき。難易度は５段階で 2。

6　６番

６番

3 変量の確率変数ベクトル (X, Y, Z) は平均 $E[X] = E[Y] = E[Z]$ であり，共分散行列 $\sum$ を持つとする．
(1)$\sum$ は非負定符号であることを示せ．
(2)$\sum = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$ のとき，ρ の取りうる範囲を求めよ．
(3)(2) で求めた ρ の範囲の中で最大値を与える (X, Y, Z) の例を挙げよ．
(4)(2) で求めた ρ の範囲の中で最小値を与える (X, Y, Z) の例を挙げよ．

6.1　解答

6.1.1　（１）

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V[X] & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(X,Y) & V[Y] & Cov(Y,Z) \\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & V[Z] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$= a_1^2 V[X] + a_2^2 V[Y] + a_3^2 V[Z] + 2a_1a_2Cov(X,Y) + 2a_2a_3Cov(Y,Z) + 2a_1a_3Cov(X,Z)$
=$V[a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3] \geq 0$
よって σ は非負定符号である。

6.1.2　（２）

$\sum$ が半正定値行列になるための ρ の条件を求める。
$|\sum - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho & \rho \\ \rho & 1-\lambda & \rho \\ \rho & \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解くと $\lambda = 1-\rho, 1+2\rho$
よって $1-\rho, 1+2\rho \geq 0$ なので $-\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

6.1.3　（３）

$X = Y = Z = \frac{1}{2}$(確率 $\frac{1}{2}$ で)、$X = Y = Z = -\frac{1}{2}$(確率 $-\frac{1}{2}$ で)

6.1.4　（４）

$X = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Y = 0, Z = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$(確率 $\frac{1}{3}$ で)
$X = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Z = 0$(確率 $\frac{1}{3}$ で)
$X = 0, Y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, Z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$(確率 $\frac{1}{3}$ で)

6.2　６番の総評

(3) と (4) はあくまで一例であり、他にも解答はある。難易度は５段階で 3 か 3.5。

7　全体的な総評

必答問題が２問とも新傾向ということもあり、多くの受験生が混乱したそうです。選択は５が簡単。

8　参考文献

< 微積分 >
・難波誠著　「微分積分学」　裳華房
・馬場敬之・高杉豊著　「微分積分キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
・杉浦光夫著　「解析入門　」　東京大学出版会
< 線形代数 >
・寺田文行著　「線形代数増訂版」　サイエンス社
・馬場敬之・高杉豊著　「線形代数」　マセマ出版社
< 統計 >
・稲垣宣夫著　「数理統計学」　裳華房
・白旗慎吾著　「統計解析入門」　共立出版株式会社
・馬場敬之・久池井茂著　「確率・統計キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 複素関数 >
・今吉洋一著　「複素関数概説」　サイエンス社
・坂和正敏著　「応用解析学の基礎」　共立出版株式会社
・馬場敬之・高杉豊著　「複素関数キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< 常微分方程式 >
・古屋茂著　「新版　微分方程式入門」　サイエンス社
・馬場敬之・久池井茂著　「微分方程式キャンパス・ゼミ」　マセマ出版社
< ルベーグ積分 >
・伊藤清三著　「ルベーグ積分入門」　裳華房