

院試予想問題

作成者 : J.H

所属/学年 : 基礎工学部情報科学科数理科学コース 4 年

1 微積分

1.1 問

——レムニスケート——

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (a > 0)$ の概形を示し、この図形で囲まれた部分の面積を求めよ。

平成 21 年度から専門 2 の 1 番は複素積分の問題から極座標変換をしてその面積を求める問題に変更された。これが一年限りなのか、それとも今後も続くのかは定かではないが、類題をやっておくのは極めて有効と思われる。

1.2 問

——サイクロイド——

$x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t) (a > 0)$ の 1 つの弧と x 軸との間の面積を求め、その弧の長さを求めよ。

弧の長さを求める公式を確認せよ。

1.3 問

——等式の証明——

$\int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ を示せ。

なかなか示しにくい式。

2 線形代数

2.1 問

——ハミルトンケーリーの定理——

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき $A^5 - 4A^4$ を計算せよ。

高校で習ったハミルトンケーリーの定理とはまた違う。この手の問題が出ても全くおかしくはない。

2.2 問

——正定値行列——

次の二つの命題が同値である事を証明せよ。

(1) 0 でない全てのベクトルに対して $x^T Ax > 0$

(2) A の全ての固有値が $\lambda_i > 0$ である。

正定値についての問題は平成 16 年専門 1 の 3 に出題例があるが、その時はこの二つの命題が同値である事は証明なしで使った。今度それを証明せよという問題がでてもおかしくはない。

3 複素積分

3.1 問

—— コーシー・リーマンの方程式 ——

領域 D で正則な関数 $f(z)$ は次のいずれかの条件を満たせば D で正則である事を証明せよ。

- (1) $f'(z) = 0$
- (2) $\operatorname{Re} f(z) = \text{定数}$
- (3) $|f(z)| = \text{定数}$

複素関数に関する問題は今まで留数定理を使った複素積分の問題と、ローラン展開の問題しか出題されていない。今年あたりコーシーリーマン方程式が出てきてもおかしくはない。

3.2 問

—— 複素積分 ——

$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (0 < s < 1)$ を証明せよ。

教科書 154 ページの図 6.6 のように積分路を設定しなくてはならないが、このネタが複素積分のネタとしては最後といってもおかしくはないくらい、複素積分は出尽くしている。このネタはしっかりやりましょう。

4 常微分方程式

5 統計