K－１１　機構学のための要素の表示方法

機構学のための要素としての点、線、面の表示方法は、現状では H-G ベクトル代数での表現が主である。本書では一貫してグラスマンの外積代数を使う。そこでは特に動標構が主役を担う。この動標構の表現は対象に最も適合した表現であり、人の感覚にもよくなじむ。

初めに通常のベクトル(H-G ベクトル代数)表現を提示する。続いて動標構による表現を提示する。その両者を比較して見ることは意義のあることと思う。

１．点、曲線、曲面の表現　：ベクトルによる

１．１　ベクトルによる点、曲線、曲面の表現

参考として、3 次元ユークリッド空間でのベクトルによる表現を示す。

1)　点は

点 P として　$P = (x_1 , x_2 , x_3)$

ベクトルの記号を使って

$\mathbf{x} = (x_1 , x_2 , x_3)(e) = (x)(e)$,　$(e) = (e_1 , e_1 , e_1)^T$

注：通常は(e)は固定であるので表示しない。省略されている。

２）　曲線は

空間曲線は微分幾何学から見て最も便利な表現として t をパラメータとした径数表示により、

$x_1 = x_1 (t)$,　$x_2 = x_2(t)$,　$x_3 = x_3(t)$

ベクトルの記号を使って

$\mathbf{x} = (x_1(t) , x_2(t) , x_3(t))(e) = (x(t))(e)$,　$(e) = (e_1 , e_1 , e_1)^T$

注：通常は(e)は固定であるので表示しない。省略されている。

３）　曲面は

曲面は u, v を実変数パラメータとして

$x_1 = x_1(u , v)$,　$x_2 = x_2(u , v)$,　$x_3 = x_3(u , v)$

ベクトルの記号を使って

$\mathbf{x} = (x_1(u,v) , x_2(u,v) , x_3(u,v))(e) = (x(u,v))(e)$

注：通常は(e)は固定であるので表示しない。省略されている。

１．２　動標構による点、曲線、曲面の表現

１）点の表示

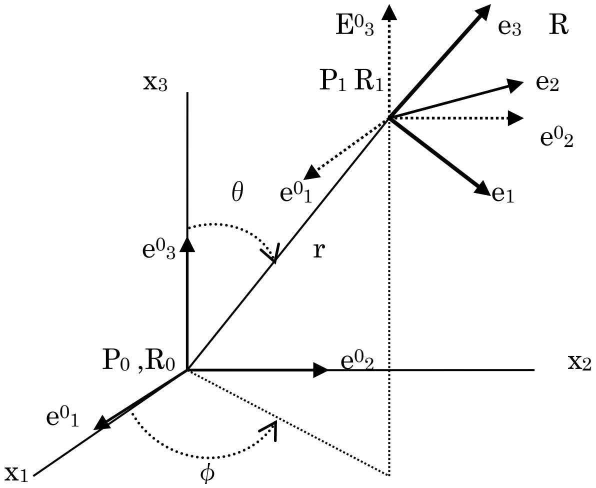

図１

動標構による点の表示には次の(1),(2)式の２通りの方法がある。

(1)　(x)座標での表示

固定したR_0標構での表現

$$P = (1, x_1 , x_2 , x_3)R_0 = (\bar{x})R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1)$$

$$R_0 = (P_0 , e^0{}_1 , e^0{}_1 , e^0{}_1)^T , \quad (\bar{x}) = (1 , x)$$

または、動標構の原点を点Ｐに一致させる表現

$$P_1 = \pi R_1 \quad , \quad \pi = (1 , 0 , 0 , 0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.2)$$

$$R_1 = \bar{U}R_0 , \quad \bar{U}= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x) \\ (0)^T & E \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.3)$$

これは平行移動のみであり回転はない。

注：E は 3×3 単位行列

以下では$(0)^T$ を単に 0 と書くことにする。

(2)　**極座標**の場合(図１）(直交曲線座標の事例)

$$P = \pi R, \quad \pi = (1, 0, 0, 0) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

$$R = \bar{U}R_0, \quad \bar{U} \triangleq \bar{U}_r \bar{U}_\theta \bar{U}_\phi \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

$$\bar{U}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_\phi \end{pmatrix} \quad : e^0{}_3 \text{ 軸回りの回転}$$

$$\bar{U}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_\theta \end{pmatrix} \quad : e^0{}_1 \text{ 軸回りの回転}$$

$$\bar{U}_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (r) \\ 0 & E \end{pmatrix}, \ (r) = (r, 0, 0) \quad : r \text{ 方向への平衡移動}$$

2） 曲線の表示

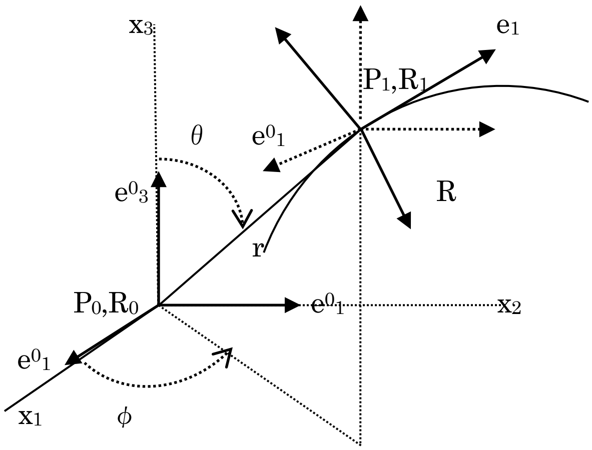

図２

曲線上の点を P_1 とする。その P_1 点での標構を R_1 に設定する。この R_1 標構は R_0 の平行移動 $\bar{U}_1$ として得たものである。

$$R_1 = \bar{U}_1 R_0, \quad \bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & (x) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$(x) = (x_1, x_2, x_3)$， E は 3×3 の単位行列

これに $\bar{U}_3\bar{U}_2$ の変換を行い e_1 が曲線の接線に一致するようにする。その結果の標構を R とする。

$$R = \bar{U}_3\bar{U}_2R_1 = \bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1R_0 \overset{\triangle}{\equiv} \bar{U}_{31}R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.6)$$

$$\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

$$dR = \{\bar{\Omega}\}_{31}R\,, \quad \{\bar{\Omega}\}_{31} = d\bar{U}_{31}\bar{U}_{31}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\omega)_{31} \\ 0 & [\Omega]_{31} \end{pmatrix}$$

$$(\omega)_{31} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\,, \quad [\Omega]_{31} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

この時点では曲線と標構とに特徴的な関係はない。次に特徴的な関係を求める。

(1)　e_1 が曲線の**接線である条件**から、

$$\omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.7)$$

となるように ϕ, θ を決める。このとき $\omega_1 = ds$ となる。

(2) **フルネー標構**を得るには更に次の変換を行う。e_1 軸回りに標構を α 回転する。すなわち、曲線の接線周りに回転する。(フルネー標構の詳細はファイル K-13 参照)

$R_\alpha = \bar{U}_\alpha R = \bar{U}_\alpha\bar{U}_{31}R_0 \overset{\triangle}{\equiv} \bar{U}_{\alpha 1}R_0$,（ $\bar{U}_{\alpha 1}$ は $\bar{U}_\alpha\bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1$ を略記したもの）

$$\bar{U}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\}_{\alpha 1} = d\bar{U}_{\alpha 1}\bar{U}_{\alpha 1}^{-1} = \bar{U}_\alpha\{\bar{\Omega}\}_{31}\bar{U}_\alpha^{-1} + d\bar{U}_\alpha\bar{U}_\alpha^{-1}$$

であるから、フルネー標構であるためには、

$$\omega^\alpha{}_{13} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.8)$$

とするように α をとることである。この条件は e_2 軸が接触面上にあるように決めたものである。

以上を整理して、

$$\{\bar{\Omega}\}_{a1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{\alpha}{}_{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha}{}_{12} & 0 \\ 0 & \omega^{\alpha}{}_{21} & 0 & \omega^{\alpha}{}_{23} \\ 0 & 0 & \omega^{\alpha}{}_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\, ds & 0 \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 & \tau\, ds \\ 0 & 0 & -\tau\, ds & 0 \end{pmatrix} \cdot\cdot(1.9)$$

$\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{23} = -\omega_{32}$

ただし、$\omega_{12} = 0$，$\omega_{23} = 0$，の場合は全ての点が変曲点で、直線となる。

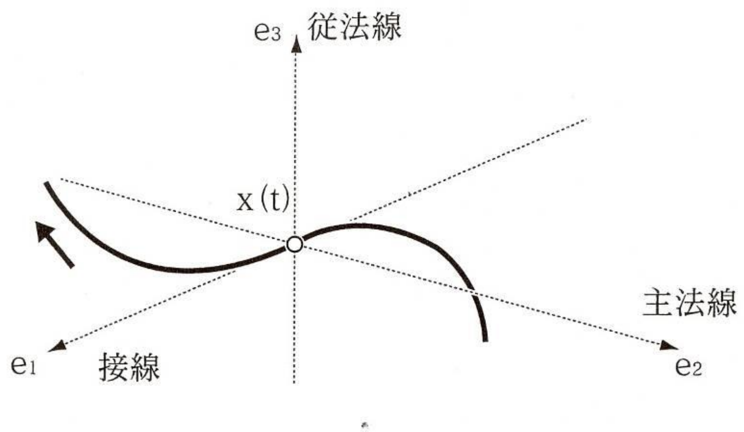

図３

３）曲面の表示

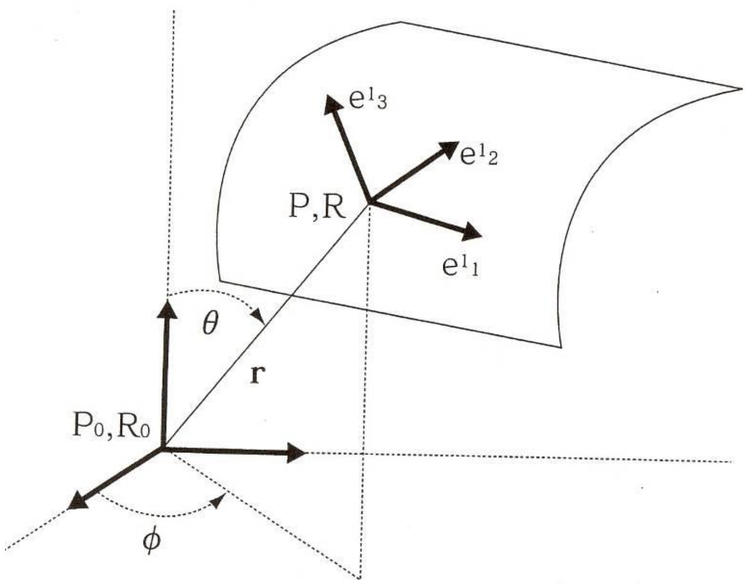

図４

曲線の場合の⑵と類似の方法で曲面の接平面上に $e^1{}_1$, $e^1{}_2$ を法線方向に $e^1{}_3$ を右手系をなすように設定する。この標構を R_1 とする。

$R_1 = \bar{U}_1 R_0$

$\bar{U}_1$ は(1.6)式の $\bar{U}_{31}$ と同形である。

$$dR_1 = \{\bar{\Omega}\}_1 R_1 , \quad \{\bar{\Omega}\}_1 = d\bar{U}_1 \bar{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\omega)_1 \\ 0 & [\Omega]_1 \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\}_1 = \left(\begin{array}{c:ccc} 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{array}\right)$$

$\omega_{13} = -\omega_{31}$, $\omega_{21} = -\omega_{12}$, , $\omega_{32} = -\omega_{23}$

$e^1{}_3$ の**法線方向である条件**は

$$\omega_3 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdot(1.10)$$

これを**曲面の１次の標構**という。この時点では単に $e^1{}_3$ が接平面の法線方向を向いているに過ぎない。$e^1{}_1$,$e^1{}_2$ の方向は曲面の曲率の最大最小の方向を向いていない。（曲面の一次の標構の詳細は K-14 参照）

これを曲面の曲率の最大最小の方向に向けるには、さらにこれに変換 $\bar{U}_\alpha$ を行って R を作る。

$$R = \bar{U}_\alpha R_1 = \bar{U}_\alpha \bar{U}_1 R_0 \stackrel{\triangle}{\equiv} \bar{U}_{\alpha 1} R_0, \qquad (\ \bar{U}_{\alpha 1} = \bar{U}_\alpha \bar{U}_1\ )$$

$$\bar{U}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\}_{\alpha 1} = d\bar{U}_{\alpha 1}\bar{U}_{\alpha 1}^{-1} = \bar{U}_\alpha \{\bar{\Omega}\}_1 \bar{U}_\alpha^{-1} + d\bar{U}_\alpha \bar{U}_\alpha^{-1}$$

$$= \left(\begin{array}{c:ccc} 0 & \omega^\alpha{}_1 & \omega^\alpha{}_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \omega^\alpha{}_{12} & \omega^\alpha{}_{13} \\ 0 & \omega^\alpha{}_{21} & 0 & \omega^\alpha{}_{23} \\ 0 & \omega^\alpha{}_{31} & \omega^\alpha{}_{32} & 0 \end{array}\right)$$

$\{\bar{\Omega}\}_{\alpha 1}$ の形は変わらないが、$e^1{}_1$, $e^1{}_2$ の方向を曲面の曲率の最大、最小の方向に合わせることが出来る。そのときの α は

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c}$$

$$\omega^{\alpha}{}_{13} = a\omega^{\alpha}{}_{1} + b\omega^{\alpha}{}_{2}$$

$$\omega^{\alpha}{}_{23} = b\omega^{\alpha}{}_{1} + c\omega^{\alpha}{}_{2}$$

の関係からもとまる。詳細はファイル K-14 による。