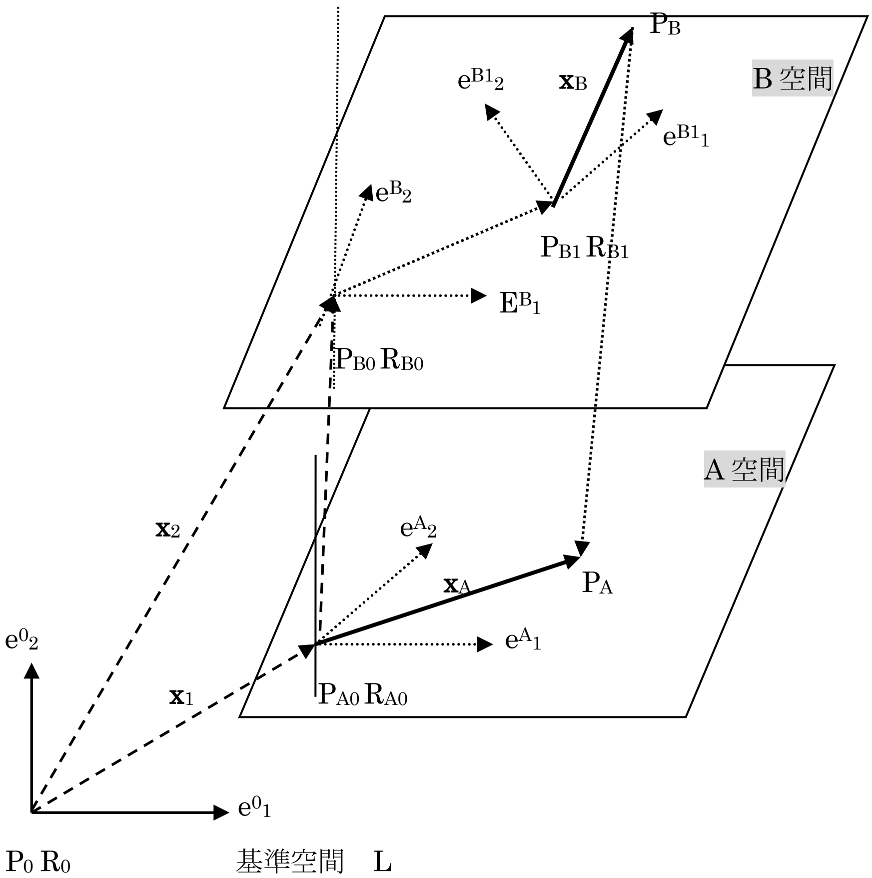
K－１２　動標構の相対運動

さまざまな複雑な運動も、適切な複数の運動空間に分けて見ると、各空間では非常に単純な運動であることが普通である。その単純な運動が重なったときに結果として複雑な運動に見える。この運動空間を別けて見る方法は動標構を使って数式で容易に表現できる。

１．　動標構、基準標構の移動と相対運動

基準空間 L に対して相対運動をしている空間 A と空間 B がある。B 空間の点 P_B ,R_Bの運動を A 空間に投影した場合のその点を P_A ,R_Aとする。この P_A ,R_A点の運動を空間 A で解析したい場合が様々な場面で遭遇する。

このような事例は機構学のさまざまな面で直面する。最も有効な活用事例は工作機械の複合運動による包絡線(面)の作成による曲線(面)の創成がある。それらの創成されたカム、歯車などの創成面の接触運動の解析に有効である。



A 空間は静止または運動状態にあり、それに対して B 空間は A 空間とは独自の運動をしている。この B 空間上の物体（ツール）の動きを A 空間上に投影してその運動を見る場合すなわち A 空間上（ワーク）に対する運動を見る場合にはこの標構変換を使うと容易に得られる。それぞれの標構の変換行列を整理することで目的は達成される。

運動の組み合わせは多数考えられるがその 1 例として次の場合を考える。

図示の都合上平面的に図示してあるが 3 次元として考える。

P_0 , R_0 ：基準空間 L の基準点と基準標構(静止しているとして)

P_{A0} R_{A0}：A 空間の基準点と基準標構、R_0に対して相対運動あり

P_{B0} R_{B0}：B 空間の基準点と基準標構、R_0に対して相対運動あり

P_{B1} R_{B1}：B 空間 で運動する点と標構である

P_B ：R_{B1}標構での点

P_A ：P_Bを A 空間に射影した点

R_{A0},R_{B0}は相対運動をすることになるがその変換行列はR_0を介して表現される。これらの関係はR_0を消去することでR_{A0}とR_{B0}の直接の変換行列で表現できる。それぞれの基準標構の関係,および各空間での標構の定義と関係は次のとおりである。

$R_{A0} = \bar{U}_{A0}R_0$, $R_{B0} = \bar{U}_{B0}R_0$, $R_{B1} = \bar{U}_{B1}R_{B0}$

$P_A = (\bar{x})_A R_{A0}$, $P_B = (\bar{x})_B R_{B1}$

これらから次の関係が得られる。

$R_0 = \bar{U}_{A0}^{-1}R_{A0}$, $R_0 = \bar{U}_{B0}^{-1}R_{B0}$

これを使って、

$$R_{B0} = \bar{U}_{B0}R_0 = \bar{U}_{B0}\bar{U}_{A0}^{-1}R_{A0} \triangleq \bar{U}_{BA}R_{A0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

または

$$R_{A0} = \bar{U}_{A0}R_0 = \bar{U}_{A0}\bar{U}_{B0}^{-1}R_{B0} \triangleq \bar{U}_{AB}R_{B0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$P_B = (\bar{x})_B R_{B1} = (\bar{x})_B\bar{U}_{B1}R_{B0} = (\bar{x})_B\bar{U}_{B1}\bar{U}_{B0}R_0 = (\bar{x})_B\bar{U}_{B1}\bar{U}_{B0}\bar{U}_{A0}^{-1}R_{A0}$

もし B 空間の点 P_B を A 空間で見たとすれば、$P_B = P_A$ であるから

$(\bar{x})_A = (\bar{x})_B\bar{U}_{B1}\bar{U}_{B0}\bar{U}_{A0}^{-1}$

となる。A空間では複雑に見える運動もB空間では単純な運動の組み合わせで表現できる。このように容易に他の標構での表現が出来ることが特長である。カム加工、歯車の歯形加工においてツールの運動が直接数学的に表現でき、その結果の包絡線(面)のフルネー標構表示ができ、曲面の様々な解析が容易になる。事例については機構学編のカム、歯車の項にある。

一般化して、特殊相対論に適用するには相対運動のみを考えるのであるから基準空間Lと空間Aとこれらを４次元化ミンコフスキー時空として一致させて、かつ $\mathbf{x}_1$ を零と置いて考えればよい。変換行列はローレンツ変換行列Λを適用することになる。

備考：基本的な考え方。空間の点の識別は２通りの方法が考えられる。

１）座標系(x)によるもの。

２）動標構Rすなわち「点と標構」によるもの。

座標系の方法は、数値の順序付けられた組み合わせとして「点」を特定する。動標構の方法は空間の全ての点に標構を考え、各点は変換行列で関係付けられている。それぞれの点にはその標構で特徴付けられた空間が付随していると考える。または存在する粒子に関してのみその点と標構を考えてもよい。解析の数学的表現としては座標(x)を主とするよりは、動標構Rを主とする方がこの考えになじむ。実際の処理の方法は容易である。

このように動標構で見ることは人の感覚とも合っている。人が移動するときに対象を見る場合は自身に固定された標構で見ている。自動車を操縦する場合は自動車に固定された標構で対象を認識している。空間の特定の位置に固定した点を常に原点としてそれを基準にして対象を認識してはいない。