K－１３　曲線とフルネー標構

機構学では“空間曲線や曲面が数ベクトル(x_i)の形で与えられる”ことはまれである。もともと線や面が運動して包絡線(面)として空間曲線や曲面が求まる。動標構の手法の場合は元の線や面自体が動標構表示されているからそれに運動を与えることは、すなわち変換行列を作用することであるから結果は動標構表示になっている。フルネー標構はそれらの曲線や曲面を最も特徴的な特性を捉えた表現になっている。必要あればこれを使って数ベクトル(x_i) の形に変換して表示することも容易である。

以上を図式的に書くと、曲線、曲面の創成は、

ツールとしての線,面⇒曲線,曲面の族⇒包絡線,包絡面で曲線や曲面の創成。

動標構表示をはじめから行うことで以後の表示が動標構表示となる。フルネー標構を理解するために、ここでは参考として(x_i)の形で曲線や曲面が与えられた場合にフレネー標構としての動標構表示を求める逆の問題を取り上げる。

１．　平面曲線のフルネー標構表示

曲線が点(x_i)の形で与えられた場合の曲線のフルネー標構表示を求める。

全てを動標構表示で行うこととしているのであるが、動標構のさまざまな特性を利用するためには、最も特徴的なフルネー標構を使うことが求められる。

平面曲線 S が径数表示で次のように与えられた場合

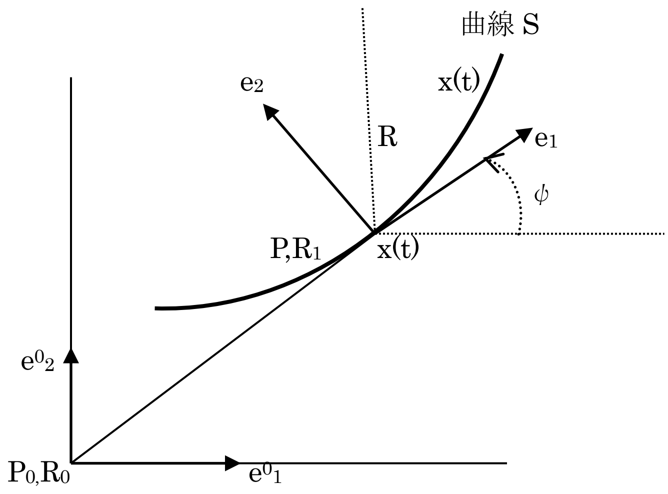


図　1

曲線　$(x) = (x_1, x_2)$,　$x_1 = x_1(t)$,　$x_2 = x_2(t)$

曲線 S は新たに P(t)と表示し、

$P = (1, x_1, x_2)R_0 = P_0 + (x)(e)_0$

$R_0 = (P_0, e^0{}_1, e^0{}_2)^T$,　$(e)_0 = (e_1, e^0{}_2)^T$

点 P_0は動標構 R_0 の原点、フルネー標構は次の手順で得られる、

a) 標構 R_0を点 P に移動し, それを R_1とする。 $R_1 = (P, e^0{}_1, e^0{}_2)$

b) 次に、R_1 に回転ϕを行い、e_1が曲線 S に接するようにする。その条件は

$$\omega_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

である。このときの標構は R とする。このとき e_2は曲線の法線方向を向く。

以上を式で表すと次のようになる。

$R = \bar{U}R_0$,　$dR = \{\bar{\Omega}\}R$,　$\{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1}$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x) \\ (0) & U \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\omega) \\ (0) & [\Omega] \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\omega_1 = dx_1\cos\phi + d\,x_2\sin\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

$$\omega_2 = -dx_1\sin\phi + d\,x_2\cos\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

$$\omega_{12} = d\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.4)$$

R が曲線 P(t)のフルネー標構であるためには、まず e_1が曲線の接線である。平面曲線の場合は、e_2は曲線の法線方向であり、その条件は

$$\omega_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

$$\omega_2 = -dx_1\sin\phi + d\,x_2\cos\phi = 0 \quad \text{または} \quad \tan\phi = \frac{dx_2}{dx_1}$$

結局次の連立方程式の形で表現できる

$$R = \bar{U}R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.5)$$

$$\tan\phi = \frac{dx_2}{dx_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.6)$$

$dR=\{\bar{\Omega}\}R$ を書き下すと

$$\begin{cases} dP=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2 \\ de_1= \qquad \omega_{12}\,e_2 \\ de_2=-\omega_{12}e_1 \end{cases}$$

d(e)はまとめると

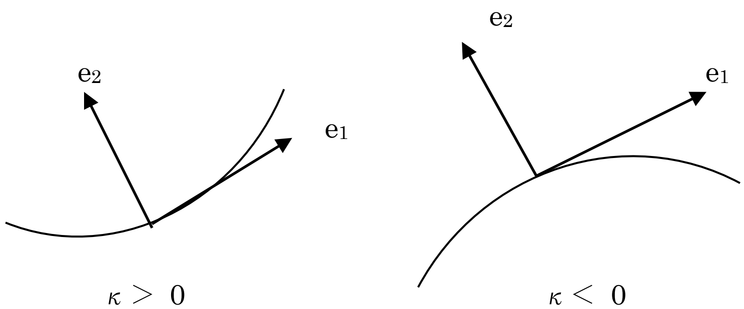
$$d(e)=\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{bmatrix}(e) \overset{\triangle}{\equiv} [\Omega](e)$$

フルネー標構の場合は次の関係がある。

$$\omega_1=ds,\quad \omega_2=0,\quad \omega_{12}=\kappa\, ds,\quad \kappa=\frac{\omega_{12}}{\omega_1}$$

$$\{\bar{\Omega}\}=\begin{pmatrix} 0 & ds & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\, ds \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 \end{pmatrix}$$

ds は線素、κ は曲率、κ には正負があり、その関係は図 2 の通りである。



$\kappa > 0$　　　　$\kappa < 0$

図　2

注： dx_1 , dx_2 は独立ではなく、1 パラメータ t の関数である。

$$dx_1=\frac{dx_1}{dt}dt=a_1\,dt,\quad d\,x_2=\frac{dx_2}{dt}dt=a_2\,dt$$

参考： $\omega_2=0$ について

これは曲線族を表す。積分可能条件を満足することはフロベニュウスの定理から次式が成立する。 $0=d^2R=\{\,d\{\bar{\Omega}\}-\{\bar{\Omega}\}^2\,\}R$ より $d\{\bar{\Omega}\}=\{\bar{\Omega}\}^2$ から、

$d\omega_2=\ \omega_1\wedge\omega_{12}$

先に求めた式を代入すれば確かに成立する。式(1.2)を微分して、

$d\omega_2 = (dx_1 \cos\phi + dx_2 \sin\phi) \wedge d\phi = \omega_1 \wedge \omega_{12}$

「 **注**：この式の展開は次の規則による。

$d(dx_1 \cos\phi) = d^2x_1 \cos\phi - dx_1\, d(\cos\phi) = dx_1 \sin\phi \wedge d\phi$

$d^2x_1 = 0$，および d が 1 形式 dx_1 を越える場合は符号が変わることによる。

m：関数、ω：1 形式の場合は

$d(m\omega) = dm \wedge \omega + md\omega$

$d(\omega m) = d\omega\, m - \omega \wedge dm$ 」

１．１　事例

事例１：平面曲線が円の場合のフルネー標構表示

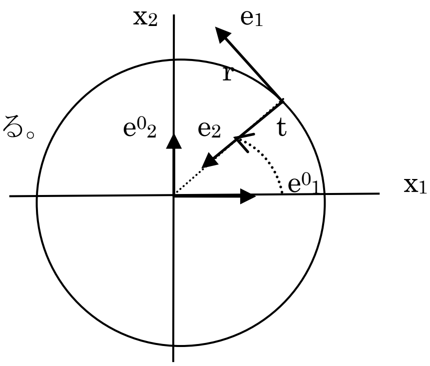


図３

$x_1(t) = r \cos t$,　$x_2(t) = r \sin t$

この曲線 S に対してフルネー標構を求める。

$dx_1 = -r \sin t$,　$dx_2 = r \cos t$

$$\tan\phi = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$\phi = t + \pi / 2$

$\omega_1 = -r\, dt = ds$,　$\omega_2 = 0$

$\omega_{12} = d\phi = \kappa\, ds$

$$\kappa = \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = \frac{1}{r}$$

$$(e) \ \tilde{=}\ U = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$dP = -r\, dt\, e_1$

$de_1 = \quad dt\, e_2$

$de_2 = -dt\, e_1$

$$dR = d\begin{pmatrix} P \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -rdt & 0 \\ 0 & 0 & dt \\ 0 & -dt & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$R = \bar{U}R_0, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & r\cos t & r\sin t \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r\cos t & r\sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

１．２　上記事例を直接動標構で求める。

$R = \bar{U}_2\bar{U}_1R_0 = \bar{U}_{21}R_0$

$\quad \bar{U}_{21} \triangleq \bar{U}_2\bar{U}_1$

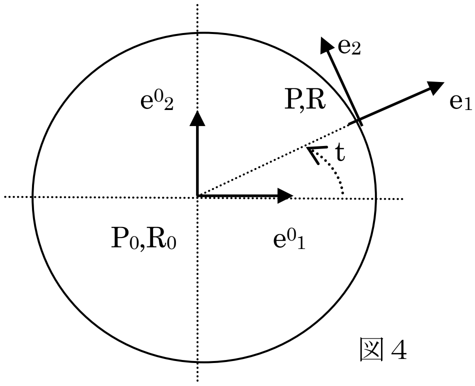


図４

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & r\cos t & r\sin t \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

この状態は e_1 が図のように曲線の法線方向である。先の事例のように e_1 を接線方向にし、標準的なフルネー標構とするためには、$(\pi/2)$の回転を与えればよい。すなわち、次の$\bar{U}_3$を作用すればよい。

$$\bar{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_{31} \triangleq \bar{U}_3\bar{U}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & r\cos t & r\sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x) \\ 0 & U_{31} \end{pmatrix}$$

$\quad (x) = (\, r\cos t \,,\, r\sin t \,)$

このように容易に求まる。注意すべきは e_1 の方向である。この点に注意すればよい。

２．　空間曲線のフルネー標構表示

空間曲線が径数表示 $x_i(t)$　の形で与えられた場合のフルネー標構表示

空間曲線 x を径数表示で、

$x = (\, x_1(t) \,,\, x_2 = x_2(t) \,,\, x_3 = x_3(t) \,)$　;　$x_1 = x_1(t)$,　$x_2 = x_2(t)$,　$x_3 = x_3(t)$

曲線 S 上の点 P は、$P = (\, 1 \,, x_1 . x_2 \,,\, x_3 \,)\, R_0$　として

$R = \bar{U}_{31}R_0$,　$\bar{U}_{31} \triangleq \bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1$

$$
\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x) \\ (0) & U_1 \end{pmatrix}
$$

$$
\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (0) & U_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\bar{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (0) & U_3 \end{pmatrix}
$$

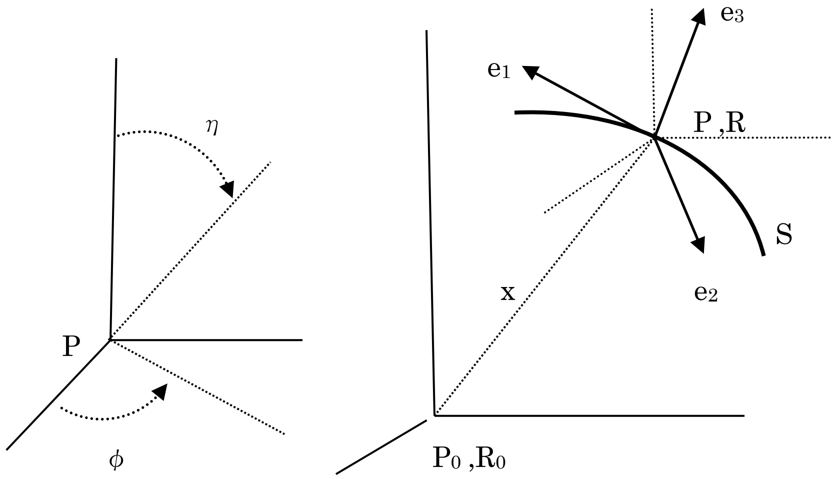


図５

$\bar{U}_{31}$ は積を実行した成分形での展開は計算が煩雑であり後の展開にも不便であるのでほとんど使われることがない。参考として掲げると、

$$
\bar{U}_{31} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & x_1 & .x_2 & x_3 \\ \hline 0 & \cos\eta\cos\phi & \cos\eta\sin\phi & -\sin\eta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\eta\cos\phi & \sin\eta\sin\phi & \cos\eta \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & (x,) \\ (0) & U_{31} \end{pmatrix}
$$

$$
dR = \{\bar{\Omega}\}_{31}R\,,\quad \{\bar{\Omega}\}_{31} \triangleq d\bar{U}_{31}\bar{U}_{31}{}^{-1}
$$

$$
\{\bar{\Omega}\}_{31} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \hline 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & (\omega) \\ (0) & [\Omega]_{31} \end{pmatrix}
$$

ここでは　$\omega_{ij}=-\omega_{ji}$ である。

$\omega_1 = dx_1 \cos\eta \cos\phi + dx_2 \cos\eta \sin\phi - dx_3 \sin\eta$,

$\omega_2 = - dx_1 \sin\phi + d.x_2 \cos\phi$

$\omega_3 = dx_1 \sin\eta \cos\phi + dx_2 \sin\eta \sin\phi + dx_3 \cos\eta$

$\omega_{12} = \cos\eta \ d\phi$,　$\omega_{21} = -\omega_{12}$,　$\omega_{13} = d\eta$

$\omega_{31} = -\omega_{13}$ 、　$\omega_{23} = \sin\eta \, d\phi$,　$\omega_{32} = -\omega_{23}$

$e^0{}_1$ を曲線 S の接線方向に合わせる条件は、$\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$

$\omega_2 = -dx_1 \sin\phi + dx_2 \cos\phi = 0$

$\omega_3 = dx_1 \sin\eta \cos\phi + dx_2 \sin\eta \sin\phi + dx_3 \cos\eta = 0$

整理して,

$$\tan\phi = \frac{d\,x_2}{d\,x_1}, \quad \tan\eta = \frac{dx_3}{d\,x_1 \cos\phi + d\,x_2 \sin\phi}$$

$\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ が積分可能条件を満足することは明らかであるから、これらから ϕ, η は求まる。

$$dR = \begin{pmatrix} dP \\ de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \{\bar{\Omega}\}_{31} R$$

この時点ではまだフルネー標構ではない。フルネーの標構にするにはさらに e_1 軸回りに α の回転を行ないその結果の $\tilde{\omega}_{13}$ を $\tilde{\omega}_{13} = 0$ とすることで得られる。

$\tilde{R} = \bar{U}_{41} R_0$ 　、$\bar{U}_{41} \stackrel{\triangle}{\equiv} \bar{U}_4 \bar{U}_{31} = \bar{U}_4 \bar{U}_3 \bar{U}_2 \bar{U}_1$

$$\bar{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (0) & U_4 \end{pmatrix}$$

$$d\tilde{R} = \{\bar{\Omega}\}_{41} \tilde{R} , \quad \{\bar{\Omega}\}_{41} = d\bar{U}_{41} \bar{U}_{41}{}^{-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

(2.1)は**フルネーセレーの公式**である。次のようにすると容易に求まる

$$d\bar{U}_{41}\bar{U}_{41}{}^{-1} = d(\bar{U}_4\bar{U}_{31})\,(\bar{U}_4\bar{U}_{31})^{-1} = d\bar{U}_4\bar{U}_4{}^{-1} + \bar{U}_4(d\bar{U}_{31}\bar{U}_{31}{}^{-1})\bar{U}_4{}^{-1}$$

$$= \{\bar{\Omega}\}_4 + \bar{U}_4 \{\bar{\Omega}\}_{31} \bar{U}_4{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\Omega]_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\omega)U_4{}^T \\ 0 & U_4[\Omega]_{31}U_4{}^T \end{pmatrix}$$

$$[\Omega]_{41} = [\Omega]_4 + U_4[\Omega]_{31}U_4{}^T$$

これは、随伴ベクトルに変換して求めるとさらに容易にもとまる(G-13 参照)。

$(\Omega)_{41} = (\Omega)_4 + (\Omega)_{31} U_4{}^T = (\tilde{\omega}_{23}, -\tilde{\omega}_{31}, \tilde{\omega}_{12})$

これを求めると、

$-\tilde{\omega}_{31} = \omega_{31} \cos\alpha + \omega_{21} \sin\alpha = 0$

$$\tan\alpha = \frac{-\omega_{31}}{\omega_{12}} = \frac{d\eta}{\cos\eta \ d\phi}$$

空間曲線 x が $x = (x_1 . x_2, x_3)$と表された場合の**フルネー標構**は

$\tilde{R} = \bar{U}_{41} R_0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, $\tilde{\omega}_{31} = 0$

具体的に書くと、次の連立方程式の形になる

$$\tilde{R} = \bar{U}_{41} R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

$$\tan\phi = \frac{dx_2}{dx_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

$$\tan\eta = \frac{dx_3}{dx_1 \cos\phi + dx_2 \sin\phi} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

$$\tan\alpha = \frac{d\eta}{\cos\eta \ d\phi} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

ここで次の関係がある

$\tilde{\omega}_1 = ds$ $, \tilde{\omega}_2 = 0$, $\tilde{\omega}_3 = 0$, $\tilde{\omega}_{12} = \kappa\, ds$, $\tilde{\omega}_{13} = 0$, $\tilde{\omega}_{23} = \tau\, ds$

$$\{\bar{\Omega}\}_{41} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_{12} & \tilde{\omega}_{13} \\ 0 & \tilde{\omega}_{21} & 0 & \tilde{\omega}_{23} \\ 0 & \tilde{\omega}_{31} & \tilde{\omega}_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\, ds & 0 \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 & \tau\, ds \\ 0 & 0 & -\tau\, ds & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = 0$, $\tilde{\omega}_3 = 0$

$\tilde{\omega}_{31} = 0$

$\tilde{\omega}_{21} = \omega_{31} \sin\alpha + \omega_{12} \cos\alpha$

$\tilde{\omega}_{31} = \omega_{23} + d\alpha$

$d\tilde{R} = \{\bar{\Omega}\}_{41} \tilde{R}$ は**フルネーセレーの公式**である。

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} P \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix}$$

$\tilde{e}_1$ は接線、($\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$)を含む平面が「接触平面」、$\tilde{e}_2$ は主法線、$\tilde{e}_3$ が接触平面法線(従法線)

$\kappa = 0$, $\tau = 0$ は変曲点

全ての点が変曲点であればそれは直線であり、 $\tau = 0$ は平面曲線になる。

これらの幾何学的関係の図示はファイル K-11 ,R-40 にあり。

２． １　空間曲線の事例

常螺旋

$x_1 = a \cos t$.　$x_2 = a \sin t$,　$x_3 = bt$ の場合の動標構表示を求める。

$$\tan\phi = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

これより、

$\sin\phi \ \sin t + \cos\phi \ \cos t = 0 \ \Rightarrow \ \cos(\phi - t) = 0$

$\phi = t + (\pi／2) + n\pi$

$$\tan\eta = \frac{dx_3}{d\,x_1 \cos\phi + d\,x_2 \sin\phi} = \frac{b}{a}$$

η は定数となり、$d\,\eta = 0$ である。

これより、$\sin\eta = \dfrac{b}{c}$,　$\cos\eta = \dfrac{a}{c}$,　$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ となる。

$$\tan\alpha = \frac{d\eta}{\cos\eta \ d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

この $\alpha = 0$ ということは$\bar{U}_4$ = E(単位行列)であるから $\bar{U}_{41} = \bar{U}_{31}$を意味する。

すなわち,$\tilde{R} = \bar{U}_{41} R_0$ は $R = \bar{U}_{31} R_0$となる。

以上から、

$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\Sigma(dx_i)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = ds$,　　$s = \sqrt{a^2 + b^2}\ t$

$\bar{U}_{31}$ を求めると

$$\bar{U}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & & & \\ 0 & & U_{31} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$U_{31} = \begin{pmatrix} -\cos\eta\,\mathrm{sint} & \cos\eta\,\mathrm{cost} & \sin\eta \\ -\mathrm{cost} & -\mathrm{sint} & 0 \\ \sin\eta\,\mathrm{sint} & -\sin\eta\cos t & \cos\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\,\mathrm{sint} & \frac{a}{c}\,\mathrm{cost} & \frac{b}{c} \\ -\mathrm{cost} & -\mathrm{sint} & 0 \\ \frac{b}{c}\,\mathrm{sint} & -\frac{b}{c}\cos t & \frac{a}{c} \end{pmatrix}$$

$(e) = U_{41}(e)_0$,　$d(e) = dUU^T(e) = [\Omega](e)$

$$[\Omega] = \begin{pmatrix} 0 & \cos\eta\,dt & 0 \\ -\cos\eta\,dt & 0 & \sin\eta\,dt \\ 0 & -\sin\eta\ \ dt & 0 \end{pmatrix}$$

これより、

$$\kappa\,ds = \cos\eta\,dt \quad \Rightarrow \quad \kappa = \cos\eta\ \frac{dt}{ds} = \frac{a}{c}\frac{1}{c} = \frac{a}{c^2}$$ ：曲率

$$\tau\,ds = \sin\eta\,dt \quad \Rightarrow \quad \tau = \sin\eta\ \frac{dt}{ds} = \frac{b}{c}\frac{1}{c} = \frac{b}{c^2}$$ ：捩率

２．２　上記事例を直接動標構で求める。

$R = \bar{U}_{31}R_0$,　$\bar{U}_{31} \stackrel{\triangle}{=} \bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1$

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{cost} & \mathrm{sint} & 0 \\ 0 & -\mathrm{sint} & \mathrm{cost} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (0) & U \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & bt \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a) \\ (0) & E \end{pmatrix}, \quad (a) = (a, 0, bt)$$

$$\bar{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (0) & U_3 \end{pmatrix}$$

これは e_2 が曲線の接ベクトルである。先の 2.1 の事例の場合は e_1 が接ベクトルであった。そこで e_1 が接ベクトルとなるように e_3 軸周りに(π ／2)の回転を与える。それは次の回転行列 $\bar{U}_4$ を作用すればよい

$$\bar{U}_4\bar{U}_{31} \triangleq \bar{U}_4\bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1 \triangleq \bar{U}_{41}$$

この $\bar{U}_{41}$ と同じ結果になる。

ただし、これはまだフルネー標構ではない。フルネー標構にするためにはさらに e_1 軸周りに β の回転を行い、その結果にフルネー条件を入れて β を決定して得られる。

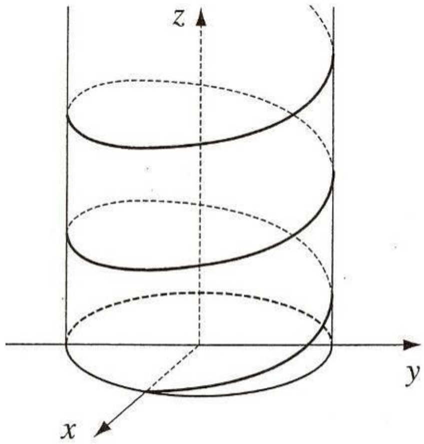


図６