K－１５　瞬間回転中心、随伴曲線

運動の解析で重要は概念に瞬間回転中心がある。その瞬間中心の軌跡としての随伴曲線を求めることは機構学解析の重要は作業である。動標構を使えば平面運動、空間運動でのこれらの特性の取り扱いも容易である。

１．　平面運動の回転中心

１．１　随伴曲線

平面曲線 C に対し一定の関係を保った曲線を随伴曲線といい Γ とする。

その関係としては様々あるが瞬間回転中心および伸開線、縮閉線を求める。

特定条件としては、曲線 C をフルネー標構 R で表現して,

$R = \bar{U}R_0$,　$dR = \{\bar{\Omega}\}\,R$

$$\{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ds & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\, ds \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(1.1)$$

この場合は特に $\bar{U}$ を明示する必要はないが参考までに、

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

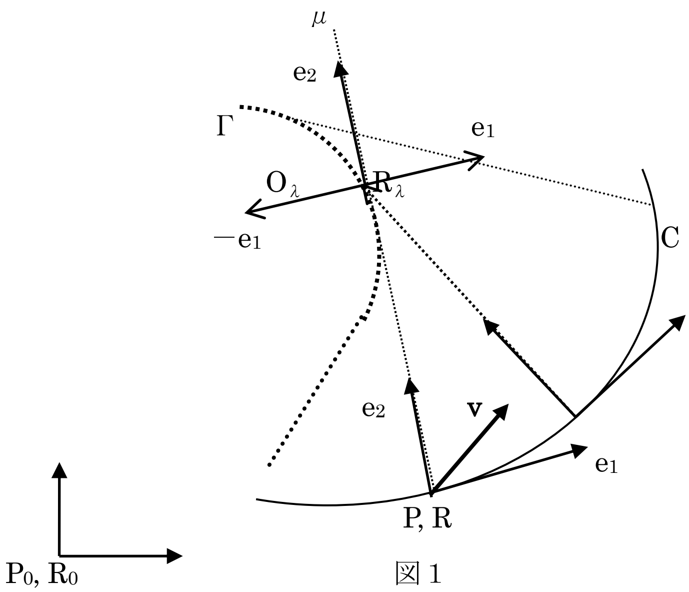

図１

$R_0 = (P_0, e^0{}_1, e^0{}_2)^T$,　$R = (P, e_1, e_2)^T$　,　$R_\lambda = (O_\lambda, e_1, e_2)^T$

標構 R の(e_1, e_2)方向へ(u_1, u_2)の平行移動を標構変換$\bar{U}_\lambda$で表わし標構 R に作用する。標構の回転はない。

$$R_\lambda = \bar{U}_\lambda R = \bar{U}_\lambda \bar{U} R_0, \quad \bar{U}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\}_\lambda = d(\bar{U}_\lambda \bar{U})(\bar{U}_\lambda \bar{U})^{-1} = d\bar{U}_\lambda \bar{U}_\lambda^{-1} + \bar{U}_\lambda \{\bar{\Omega}\} \bar{U}_\lambda^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & du_1 & du_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ds - u_2\kappa\, ds & u_1\kappa\, ds \\ 0 & 0 & \kappa\, ds \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \omega^\lambda{}_1 & \omega^\lambda{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^\lambda{}_{12} \\ 0 & -\omega^\lambda{}_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega^\lambda{}_1 = du_1 + ds - u_2\kappa\, ds$$

$$\omega^\lambda{}_2 = du_2 + u_1\kappa\, ds$$

$$\omega^\lambda{}_{12} = \kappa\, ds$$

１．２　不動の条件

R_λ の原点 O_λが不動の条件すなわち 1 点に縮退する場合は次の条件で与えられる。

$$\begin{cases} 0 = \omega^\lambda{}_1 = du_1 + ds - u_2\kappa\, ds \\ 0 = \omega^\lambda{}_2 = du_2 + u_1\kappa\, ds \end{cases}$$

これより、u_1, u_2 を求める。

$$\frac{du_1}{ds} + 1 - u_2\kappa = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.2)$$

$$\frac{du_2}{ds} + u_1\kappa = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.3)$$

これより、u_1, u_2 が求まる。

１．３　瞬間回転中心

瞬間回転中心はu_1, u_2を定数とした場合の R_λ の原点で、それは随伴曲線Γの上にある。式(1.2),(1.3)に $\dfrac{du_1}{ds} = 0$, $\dfrac{du_2}{ds} = 0$ を代入して、

式(1.2)から　$\dfrac{du_1}{ds} = u_2\kappa - 1 = 0$,　$u_2 = \kappa^{-1}$

式(1.3)から $\dfrac{du_2}{ds} = -u_1\kappa = 0,\quad u_1 = 0$

$u_2 = \kappa^{-1} = r$　とする。 $r =$ 曲率半径

回転中心は （0 , r）である。

標構 R が曲線 C 上を移動すると瞬間回転中心はΓ上を移動する。

１．４　曲線 C の縮閉線Γ：直線μ(e_2 の延長線)の包絡線

e_2 がΓの接線である条件は、

$\omega^{\lambda}{}_1 = 0,\ \omega^{\lambda}{}_2$ は不問である。すなわち

$\omega^{\lambda}{}_1 = du_1 + ds - u_2\kappa\, ds = 0$ より

$$\frac{du_1}{ds} = u_2\kappa - 1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0,\quad u_2 = \kappa^{-1} = r$$

$\omega^{\lambda}{}_2 = du_2 + u_1\kappa\, ds = dr = ds$

標構 R_λ を標準的なフルネー標構にするためには標構を(π／2)回転し e_1 を接線方向にする。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}$$

見方を変えて、曲線 C 上の標構の瞬間回転中心はΓ上にある。先の $\bar{U}_\lambda$ において $u_1 = 0$ と置いたものを $\bar{U}_\mu$ とする。その標構を R_μ として、

$$R_\mu = \bar{U}_\mu R,\quad \bar{U}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この R_μ はμ**直線族**をあらわす。曲線Γはこの**直線族の包絡線**である。

包絡線の条件は $\omega^{\mu}{}_1 = 0$ である（詳しくは K-16 にあり)。

$\omega^{\mu}{}_1$ は次の式である。

$d R_\mu = \{\bar{\Omega}\}_\mu R_\mu$

$$\{\bar{\Omega}\}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & ds - u_2\kappa\, ds & du_2 \\ 0 & 0 & \kappa\, ds \\ 0 & -\kappa\, ds & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{\mu}{}_1 & \omega^{\mu}{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^{\mu}{}_{12} \\ 0 & -\omega^{\mu}{}_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$\omega^{\mu}{}_1 = ds - u_2\kappa\, ds = 0,\quad u_2 = \kappa^{-1} = r$

このΓ曲線をフルネー標構表示するには更に回転を行って求めることが出来る。

この場合、曲線Γが曲線Cの縮閉線といい、CがΓの伸開線という。

参考：Rがフルネー標構でない場合

Rに$\bar{U}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$の変換を行いフルネー標構であるための条件

$\omega_2 = 0$ からαを求めて、その後に上記操作を行う。

備考： κ は定数でないから積分時に注意すること

１．５　ベクトルの平行移動

ベクトル**v**の平行移動について。

ベクトル**v**は動標構で表現され、曲線Cに沿って移動するとき回転運動を行う。例えば、その曲線の接ベクトルとしてもよい。それを逆の方向に回転することでベクトル**v**の回転を打ち消して平行移動とすることができる。

$\mathbf{v} = (v)(e) = (v_1, v_2)(e_1, e_2)^T$

$(e)_s = U_s(e) = U_sU(e)_0$

$U_s = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

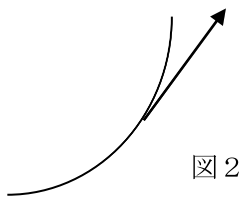

図２

$d(e)_s = \{ dU_sU_s^T + U_s[\Omega]U_s^T \}(e) = [\Omega]_s(e)$

$$[\Omega]_s = dU_sU_s^T + U_s[\Omega]U_s^T = 0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

を満たすU_sが平行移動の条件である。

この方程式を解くには、これを展開して解を求めてもよいが次のようにしてもえられる。式(1.4)の左側及び右側にそれぞれU_s^T, U_sを掛けて

$U_s^T dU_s + [\Omega] = 0$

転置をとって、$dU_s^T U_s = -[\Omega]^T = [\Omega]$

両辺をdsで割った上で、解を求めると、$\dfrac{dU_s^T}{ds} U_s = [\Omega']$として、

$U_s^T = \exp\{ \int_a^s [\Omega'] ds \} U_s(a)^T$

[Ω]に含まれている k が s の関数であるから。

「注：詳しくはファイル S-13 による。

$$X(t) = e^{H(t)} X(a)\ ,\quad H(t) = \int_a^s [\Omega'\ ]ds \quad 」$$

U_s を求める操作は曲線 C に沿って標構を平行移動させることである。

備考：平行移動 ＝ 回転なしはファイル G-23 および G-26 参照のこと

２．１　瞬間回転中心

平面上では、剛体の運動は平行移動と回転で与えられる。瞬間的に１点の回りの回転運動のみまたは平行移動のみで表現できる。また、同一剛体の２位置が与えられた場合それらは一回転運動または平行移動のどちらかで重ねることができる。この場合、回転運動で与えられる場合はその２位置を限りなく接近させた場合の回転中心が瞬間回転中心となる。

剛体上の２点の速度が与えられた場合は瞬間回転中心が与えられて１点の回りの回転運動として表現できる。瞬間回転中心には速度の瞬間回転中心と加速度の瞬間回転中心がある。以上さまざまな条件の与えられた剛体運動の速度の瞬間回転中心を求める式を導く。

1)　剛体運動が剛体に固定された標構 R で表された場合。

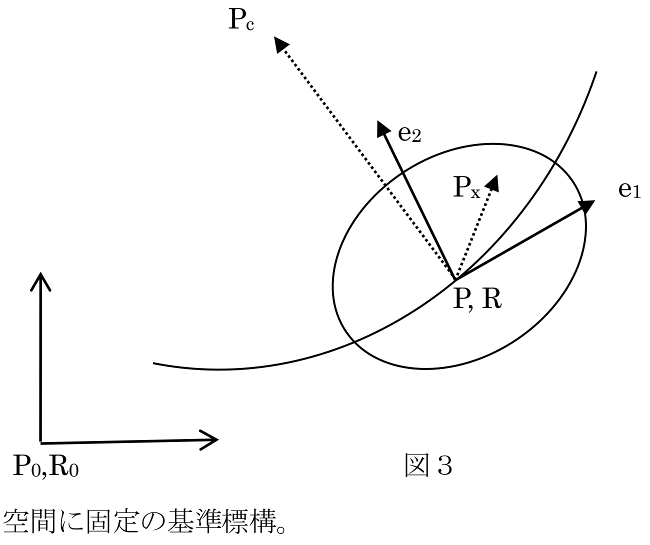

図３

R_0　：空間に固定の基準標構。

R　：剛体に固定した標構で、剛体の運動を表す。

$$R=\bar{U}R_0\ ,\quad \bar{U}=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

これより標構 R の原点 P の速度と標構の回転速度は次のように得られる。

$$dR=\{\bar{\Omega}\}R\ ,\quad \{\bar{\Omega}\}=d\bar{U}\bar{U}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & \omega_2\\ 0 & 0 & d\theta\\ 0 & -d\theta & 0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

$$\begin{cases}\omega_1=dx_1\cos\theta+dx_2\sin\theta\\ \omega_2=-dx_1\sin\theta+dx_2\cos\theta\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

点 P の速度は　$\mathbf{v}=\omega_1e_1+\omega_2e_2$

瞬間回転中心は剛体の剛体に固定の標構 R に変換を施して速度が 0 の点を求めればよい。

その変換は$\bar{U}_\alpha$として、

$$\bar{U}_\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & u_2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -u_2\sin\alpha & u_2\cos\alpha\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$R_\alpha=\bar{U}_\alpha R=\bar{U}_\alpha\bar{U}R_0$$

$$dR_\alpha=d(\bar{U}_\alpha R)=(d\bar{U}_\alpha)R+\bar{U}_\alpha dR=(d\bar{U}_\alpha)R+\bar{U}_\alpha\{\bar{\Omega}\}R$$

$$=\{(d\bar{U}_\alpha)\bar{U}_\alpha{}^{-1}+\bar{U}_\alpha\{\bar{\Omega}\}\bar{U}_\alpha{}^{-1}\}R_\alpha$$

瞬間回転中心を求めるのであるから$\bar{U}_\alpha$は時間に関係のない定行列として、

$$\bar{U}_\alpha\{\bar{\Omega}\}\bar{U}_\alpha{}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \varpi_1 & \varpi_2\\ 0 & 0 & d\theta\\ 0 & -d\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$\varpi_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha-u_2\,d\theta=0$$

$$\varpi_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha=0$$

これより

$$u_2=\frac{\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha}{d\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

これより u_2、α を求めて $\bar{U}_\alpha$ に代入し、R_α を求めれば、$R_\alpha = \bar{U}_\alpha R = \bar{U}_\alpha \bar{U} R_0$，として R より見た場合と R_0 から見た場合の瞬間回転中心の位置が求まる。

回転体に固定した標構 R から見た瞬間回転中心の軌跡はその標構を R_B とするならば、

$$R_\alpha = \bar{U}_\alpha R_B$$

一方、空間に固定の標構 R_0 から見るならば、$R = \bar{U} R_0$,の関係を代入して次のようになる、

$$R_\alpha = \bar{U}_\alpha R = \bar{U}_\alpha \bar{U} R_0$$

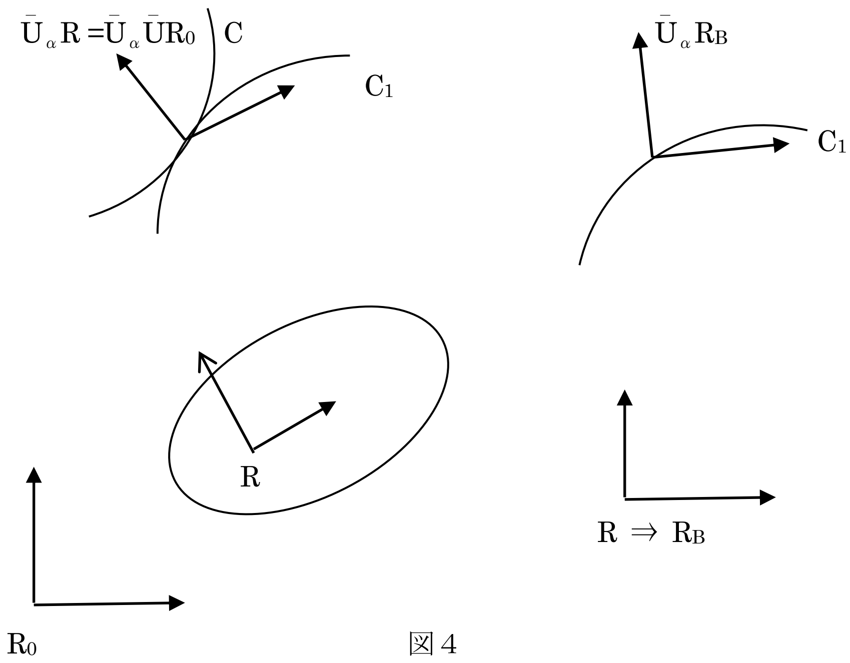

図４

備考 : 今回は瞬間回転中心を求めるだけであるから、$\bar{U}_\alpha$ に関しては次のようにさまざまにとることができる。

$$\bar{U}_{\alpha 1} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{U}_{\alpha 2} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\bar{U}_{\alpha 1}$はR 標構での座標が(u_1 ,u_2) であり、条件は、

$$\omega_1 = \omega_1 - u_2\omega_{12} = 0\,,\quad \omega_2 = \omega_2 + u_1\omega_{12} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

u_1, u_2が得られる。$\bar{U}_{\alpha 2}$からは同様にして同じ結果になる。u_1, u_2を求めるだけであるから、αは必要としない。 $\alpha = 0$ と置けば$\bar{U}_{\alpha 1}$の場合になる。$\bar{U}_{\alpha 1}$が最も簡単である。

(2.3)式を具体的に展開すると、(2.2)式を(2.5)式に代入して、

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{\omega_2}{\omega_{12}} = \dfrac{dx_1 \sin\theta - dx_2 \cos\theta}{d\theta} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6) \\[3ex] u_2 = \dfrac{\omega_1}{\omega_{12}} = \dfrac{dx_1 \cos\theta + dx_2 \sin\theta}{d\theta} \end{cases}$$

分母分子を dt で割って速度の関係式とすることができる。

これらの標構は($e^{B}{}_1$,$e^{B}{}_2$) であり、

$$u_1\, e^{B}{}_1 + u_2\, e^{B}{}_2$$

物体に固定の標構から見た瞬間回転中心の軌跡 C_1である。

これを空間に固定の標構から見るには

$$\bar{U}_{\alpha 1}\bar{U}$$

から位置座標を求めればよい。

$$\bar{U}_{\alpha 1}\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & x_{C1} & x_{c2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{C1} = x_1 + u_1 \cos\theta - u_2 \sin\theta$$

$$x_{C2} = x_2 + u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta$$

これらに先の u_1 ,u_2 を代入すると、

$$\begin{cases} x_{C1} = x_1 - \dfrac{dx_2}{d\theta} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2.7) \\[3ex] x_{C2} = x_2 + \dfrac{dx_1}{d\theta} \end{cases}$$

分母分子を dt で割って速度の関係式とすることができる。

これらの標構は(e^0_1 ,e^0_2) であり、

$$x_{C1}\, e^0_1 + x_{C2}\, e^0_2$$

物体に固定の標構から見た瞬間回転中心の軌跡 C である。

結果の式(2.6)(2.7)は次の参照文献の式と一致する。

森口繁一：力学：機械学会　P111、小川文献 No[K1]P47

２）剛体上の２点の速度が与えられた場合

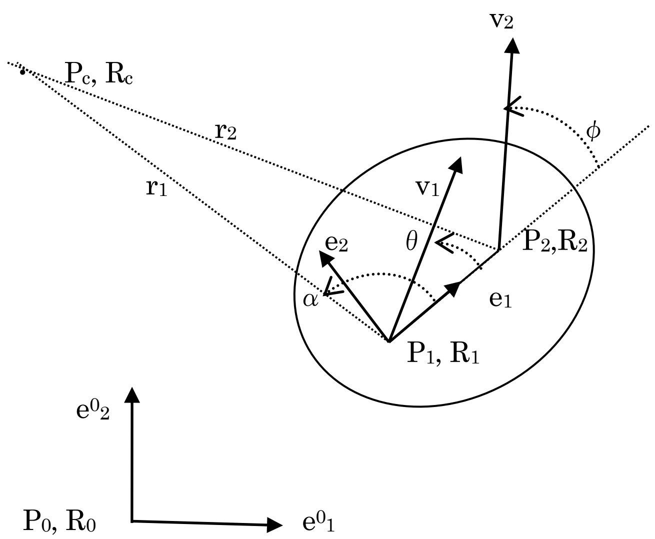

図５

１）作図による場合

瞬間回転中心 P_c は v_1 に直交する方向の軸線と、v_2 に直交する方向の軸線との交点である。P_c が瞬間回転中心であるためには次の関係を満足することが条件である。$P_2 - P_1 = L$ として、剛体の P_c を中心とした回転の角速度を ω とする。

$\omega = r_1 / v_1 = r_2 / v_2$,　$r_2{}^2 = L^2 + r_1{}^2 + 2\cos\alpha\, r_1 L$

α は v_1 の e_1 とのなす角を θ とすると $\alpha = \theta + \pi / 2$ となり、v_2 は上記の制限に従う。

以上は作図の場合は有効であるが、幾何学的な解析には好ましくない。

２）動標構を使う場合

標構を使う場合の一つの方法としては次のようなものがある。

$R_{\theta c} = \bar{U}_\theta R_1$,　$R_{\phi c} = \bar{U}_\phi R_2$,　$R_2 = \bar{U}_2 R_1$

$R_1=(P_1, e_1, e_2)^T$,　$R_2=(P_2, e_1, e_2)^T$

この $R_{\theta c}$, $R_{\phi c}$ の原点が一致することである。その点が P_c になる。

$R_{\theta c}$ は R_1 に θ の回転後に e_2 方向に r_1 の移動を行ったもの、$R_{\phi c}$ は R_2 に ϕ の回転後に e_2 方向に r_2 の移動を行ったものである。

ただし、

$$\bar{U}_\theta=\begin{pmatrix}1&0&r_1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\quad \bar{U}_\phi=\begin{pmatrix}1&0&r_2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_2=\begin{pmatrix}1&L&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

以上を整理して、

$$\begin{cases}L+r_1\sin\theta=r_2\sin\phi\\ r_1\cos\theta=r_2\cos\phi\end{cases}$$

これより r_1, r_2 が得られる。θ, ϕ は v_1, v_2 から得られる。

剛体の角速度から、　$\omega=r_1/v_1=r_2/v_2$

備考：先に述べた「原点が一致する」は記号的には、$\pi=(1, 0, 0)$ として、

$\pi R_{\theta c}=\pi R_{\phi c}=$ であるから

$$\pi\bar{U}_\theta R_1=\pi\bar{U}_\phi\bar{U}_2R_1$$

別法：

P_1, P_2 で速度が与えられているから、これを使用する。

$\mathbf{v}_1=(v_{11}, v_{12})(e)$,　$\mathbf{v}_2=(v_{21}, v_{22})(e)$ として、

$$\{\bar{\Omega}\}_1=\begin{pmatrix}0&v_{11}&v_{12}\\0&0&\omega\\0&-\omega&0\end{pmatrix},\quad \{\bar{\Omega}\}_2=\begin{pmatrix}0&v_{21}&v_{22}\\0&0&\omega\\0&-\omega&0\end{pmatrix}$$

これに対して、１）の備考の手法を適用する。

$$\bar{U}_{\alpha 1}=\begin{pmatrix}1&r_{11}&r_{12}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \bar{U}_{\alpha 2}=\begin{pmatrix}1&r_{21}&r_{22}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\bar{U}_{\alpha 1}\{\bar{\Omega}\}_1\bar{U}_{\alpha 1}^{-1}$, $\bar{U}_{\alpha 2}\{\bar{\Omega}\}_2\bar{U}_{\alpha 2}^{-1}$ から求めた速度を０と置くことで得られる。ただし、$v_{11} = v_{21}$ であることは明らかである。

未知数は r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} のなかの３個とωの全体で４個である。r_{ij} と L の関係が存在するからである。

参考：車両に適用する場合には、横滑りがあるかないかで異なる。横滑りなしとすると v_1 を e_1 軸に一致させることで容易になる。

車両の角速度をωとすると瞬間回転速度となるから P_2 における速度は

$P_2 = (1, L, 0)R_1$

$$\frac{d}{dt}P_2 = (1, L, 0)\frac{d}{dt}R_1 = (1, L, 0)\begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}R_1 = (0, v_1, L\omega)R_1$$

$v_{21} = v_1$,　$v_{22} = L\omega$　を得る。

３）剛体の２位置が与えられた場合

剛体の２位置が与えられた場合の回転運動による重ね合わせ。

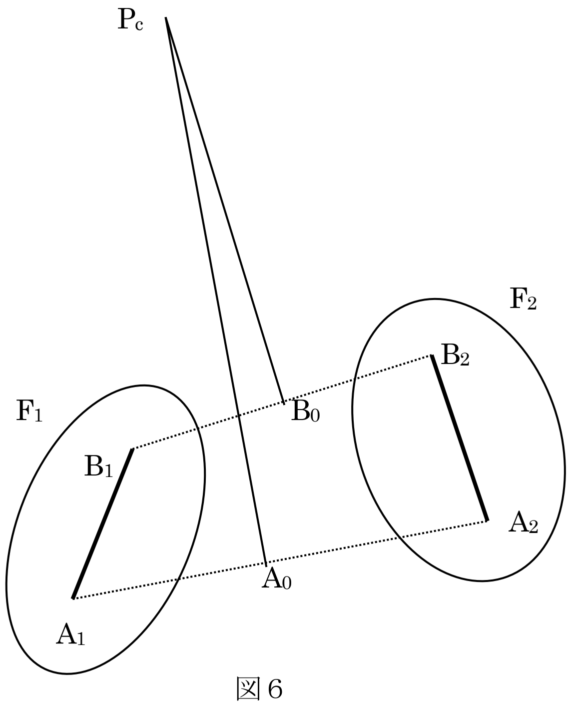

図６

剛体に固定した AB 軸が 1、２の状態にあるとき、それぞれを結ぶ線の中点 A_0 B_0 において、垂直線を立てたその交点が P_c となり、P_c を中心とした回転運動のみで剛体を重ね合わせることができる。

以上は作図の場合でのことであって、幾何学的な解析の場合はAB軸をそれぞれ標構 R_1 ,R_2 として表現することで解析的に P_c は求められる。

P_c が無限遠点の場合は平行移動となる。

剛体の２位置 F_1,F_2 を限りなく接近した極限では P_c は瞬間回転中心となる。