# K－１６　動標構による包絡線、包絡面

機構学では力学と異なり運動の軌跡そのものの重要性は低い。運動の結果生じた奇跡が作り出す曲線群、曲面群などから包絡線、包絡面を求めることが重要な作業である。これらを求める方法は、一般には微分幾何の公式として関数形で求めている。ここでは一貫して動標構を使って求める。

## １．平面曲線の包絡線

物体の運動で曲線族ができる。その曲線族の包絡線を求める。本書では物体の運動を動標構で表現する。そのために動標構によってできた曲線族の包絡線はそれに対応することが必要である。結果の包絡線は当然動標構の表現になる。
一般に平面曲線族は関数表示または径数表示のベクトルで表現される。
この場合の包絡線の求め方は、関数表示で包絡線を求める。径数表示の場合も関数形に変換してから包絡線を求めている。
それに対して、曲線族が動標構で表示された場合は実に簡単である。もし径数表示のベクトルで曲線族が与えられた場合は動標構での表現に変換してから動標構の手法を使えばよい。

### １．１　曲線族が動標構で与えられた場合の包絡線の求め方。

物体の運動を動標構で求めた場合、その運動でできる曲線族の包絡線を求めるには動標構による方法が必要である。曲線族の包絡線を動標構の表現で求める。
曲線族は動標構の変換行列$\bar{\mathrm{U}}$により容易に求められる。同時に相対変位行列$\{\bar{\Omega}\}$も変換行列$\bar{\mathrm{U}}$から容易に得られる。
$\{\bar{\Omega}\}$の$\omega_2$を$\omega_2 = 0$と置くことで包絡線の条件が得られ、パラメータが確定して包絡線が求まる。これだけのことであり、非常に単純である。事例でその実態を把握するのがよい。事例はファイル K-18, K-20 などにある。

### １．２　曲線族が径数表示ベクトルの場合の包絡線を動標構の方法で求める。

平面上の曲線族が径数表示で与えられた場合について包絡線を求める

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(t, \alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1)$$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(t, \alpha)$

t を変数として曲線が得られ、$\alpha$ をパラメータとすることで曲線族が得られる。

これをフルネー標構で表現する。

$$R = \bar{U} R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & d\phi \\ 0 & -d\phi & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (1.3)$$

$\omega_1 = d\,\mathbf{x}_1 \cos\phi + d\,\mathbf{x}_2 \sin\phi$

$\omega_2 = -d\mathbf{x}_1 \sin\phi + d\mathbf{x}_2 \cos\phi$

フルネー標構であるための条件は次の式で与えられる。

$\omega_2 = 0$

$$\omega_2 = -d\mathbf{x}_1 \sin\phi + d\mathbf{x}_2 \cos\phi = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.4)$$

この方程式からパラメータ $\alpha$ を求めて式(1.1)に代入すると包絡線が得られる。

$\alpha$ は t の関数として $\alpha = \alpha(t)$ と求まる。$\phi$ は次式より求まる。

$$\tan\phi = \frac{d\mathbf{x}_2}{d\mathbf{x}_1}$$

この $\phi$ と $\alpha$ を(1.3)式に代入すれば、包絡線の動標構表示は(1.2)式で得られる。

**証明**

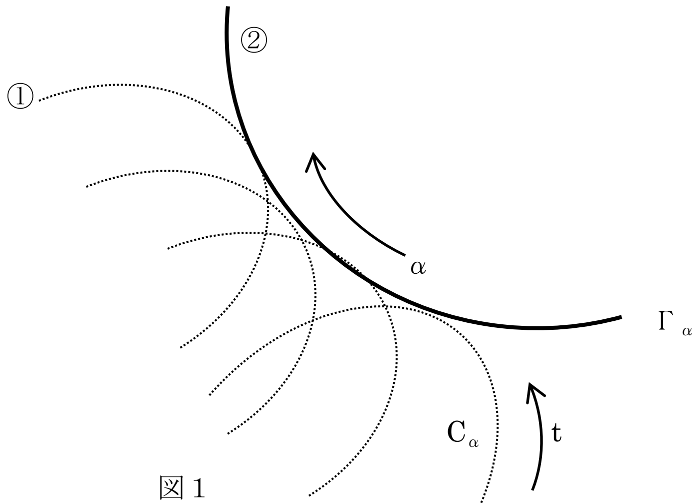


図 1

$\omega_2 = 0$ が包絡線の条件であることは次のようにして確かめられる。

曲線①はある $\alpha$ に対して $\alpha$ を定数として、

$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(t, \alpha)$

曲線②は、曲線①との接点では $t = \tau(\alpha)$ の関係にあり、

$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(\tau(\alpha), \alpha)$

曲線①では　$d\mathbf{x}_1 = (f_1)_t\,dt$,　$d\mathbf{x}_2 = (f_2)_t\,dt$,　$(f_i)_t = df_i / dt$ を表す。

曲線②では

$d\mathbf{x}_1 = (f_1)_\tau(\tau)_\alpha d\alpha + (f_1)_\alpha d\alpha$,　　　　　（備考参照）

$d\mathbf{x}_2 = (f_2)_\tau(\tau)_\alpha d\alpha + (f_2)_\alpha d\alpha$　　　　　··········(1.5)

$$(f_1)_\tau = \frac{\partial f_i}{\partial \tau}, \quad (f_1)_\alpha = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}, \quad (\tau)_\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$$

これらを(1.4)式に代入すると、

曲線① では

$-(f_1)_t \sin\phi + (f_2)_t \cos\phi = 0$　　　　　··········(1.6)

曲線②では $d\alpha$ を省略して、

$-\{(f_1)_\tau(\tau)_\alpha + (f_1)_\alpha\}\sin\phi + \{(f_2)_\tau(\tau)_\alpha + (f_2)_\alpha\}\cos\phi = 0$

整理して、

$\{-(f_1)_\tau \sin\phi + (f_2)_\tau \cos\phi\}(\tau)_\alpha - (f_1)_\alpha \sin\phi + (f_2)_\alpha \cos\phi = 0$

式(1.6)を使って整理すると、

$-(f_1)_\alpha \sin\phi + (f_2)_\alpha \cos\phi = 0$　　　　　··········(1.7)

(1.6), (1.7)において $\phi$ の存在する条件から、

$$\begin{vmatrix} (f_1)_t & (f_2)_t \\ (f_1)_\alpha & (f_2)_\alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.8)$$

一般の径数表示の曲線族の包絡線の式と同じである。

これをまとめて、

$$\left|\ \partial\mathbf{x}/\partial t \quad \partial\mathbf{x}/\partial\alpha\ \right| = 0$$

これより、$G(t, \alpha) = 0$ をえる。これを解いて $\alpha = \alpha(t)$ を得る。

これを初めの式に代入して包絡線が得られる。

**備考**：

$d\mathbf{x}_1 = (f_1)_\tau(\tau)_\alpha d\alpha + (f_1)_\alpha d\alpha$

これは通常の書き方では次のようになる。

$$d\mathbf{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}d\alpha$$

**参考：関数形で与えられ場合の一般の包絡線の求め方**

一般の方法の場合は曲線族の与えられ方が　$f(x_1,x_2\,;\,t)=0$ のように関数で与えられる。参考として、この場合の包絡線の求め方の結果のみを示す。

$$f(x_1,x_2\,;\,t)=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial t}(x_1,x_2\,;\,t)=0$$

この連立方程式で与えられる。

## １．３　包絡線事例

**事例１**．直交座標軸により切り取られた部分の長さが a であるような直線の包絡線の方程式を求める。任意の直線族は次のようになる。

$R_t = U_t R_\alpha$ ,　$R_\alpha = U_\alpha R_0$ ,　$R_t = U_t U_\alpha R_0 = \bar{U} R_0$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - t\sin\theta & t\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

t を含む変換行列は等質空間としての直線を表す。

$x_1 = \alpha - t\sin\theta$　,　$x_2 = t\cos\theta$　, これが直線族の式である

題意の条件から

$t = a$ にて：

$\alpha - a\sin\theta = 0$ ,　$a\cos\theta = \beta$

よって、

$$\begin{cases} x_1 = a\sin\theta - t\sin\theta = (a-t)\sin\theta \\ x_2 = t\cos\theta \end{cases}$$

または、$x_1 / \sin\theta + x_2 / \cos\theta = a$

$\cdots\cdots\cdots\cdots(1.9)$

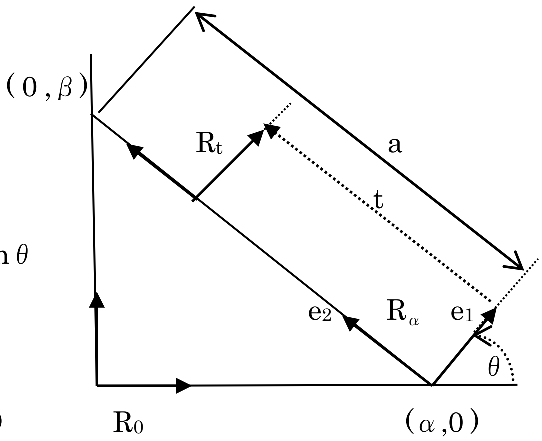


図２

この式が直線族を表わす。t が直線を表す変数、θ が直線族を表すパラメータ。

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & (a-t)\sin\theta & t\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\,,\quad \{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega_1 = (a\cos^2\theta - t)\,d\theta$

$\omega_2 = dt - a\cos\theta\sin\theta\,d\theta$

$\omega_{12} = d\theta$

この場合の包絡線条件は $e_1$ 軸が法線方向であるから $\omega_1 = 0$ とすべきである。

( 通常のフルネー標構とは異なり（$\pi/2$)だけ回転している)

$\omega_1 = (a\cos^2\theta - t)\,d\theta = 0$ より $t = a\cos^2\theta$

これを式(1.9)に代入して包絡線が得られる。

$x_1 = a(\sin\theta)^3$,　$x_2 = a(\cos\theta)^3$

先の式に代入して $\theta$ を消去して、書き直して

$x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = a^{2/3}$

線素 ds は

$ds = \omega_2 = dt - a\cos\theta\sin\theta\,d\theta = -3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

t を $\theta$ で表現することで $\theta$ を変数とする包絡線を得る。

**備考：**この場合は、直線は包絡線の接線になっており、その接点を与えるのがこの t である。t を与えることで接点の座標が決まる。

**事例２.**

太陽の光線が半球面に当たって反射するとき、球の中心と交線の方向とで決まる平面内でその反射光の包絡線を求む。

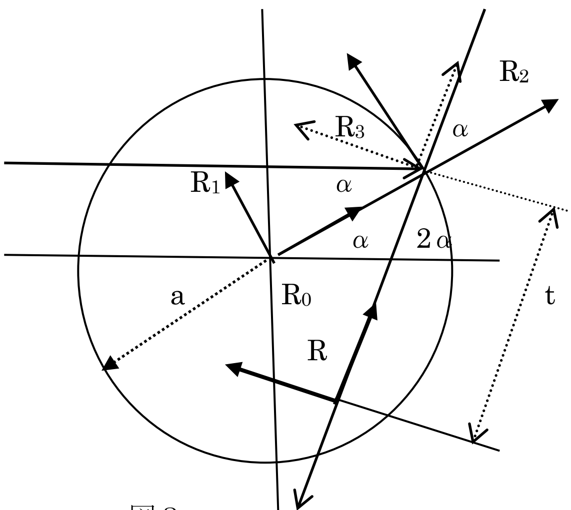


図３

$R = \bar{U}R_0$,　$\bar{U} \triangleq \bar{U}_4\bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1$

a：半径

$\alpha$：パラメータ

t：直線表示のパラメータ

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{U}_3 = \bar{U}_1, \quad \bar{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = a\cos\alpha + t\cos 2\alpha$ , $x_2 = a\sin\alpha + t\sin 2\alpha$

$\omega_1 = dx_1\cos 2\alpha + dx_2\sin 2\alpha$ , $\omega_2 = -dx_1\sin 2\alpha + dx_2\cos 2\alpha$

包絡線条件 $\omega_2 = 0$ より

$$t = -\frac{a}{2}\cos\alpha$$

この $t$ を $x_i$ に代入して整理し、

$$x_1 = \frac{1}{2}a\cos\alpha\{1 + 2\sin^2\alpha\}, \quad x_2 = a\sin^3\alpha$$