K－１７　すべり運動、転がり運動の条件

２物体が接して運動している場合、接触点での相対運動の条件として**滑り接触**と**転がり接触**がある。この接触条件はフルネーの動標構および微分形式を活用することで容易に得られる。

これらは運動の効率、耐久性、安定性等の評価にとって重要な特性である。

１．１　平面曲線の滑り条件

平面曲線の場合について滑り接触条件を求める。接触する２物体を A,B とし、空間は次の３つを考える。固定空間(基準空間)を K 平面に基準点と基準標構をそれぞれ P_0,R_0 とし、A および B の属する平面をそれぞれ A 面、B 面とする。A 物体に固定の標構を R_{A0} として、その基準点を P_0 と同じくとる。

その輪郭 Γ_A をフルネー標構表示で R_A とする。B 物体に固定の標構を R_{B0} として、その基準点を P_{B0} にとる。その輪郭 Γ_B をフルネー標構表示で R_B とする。

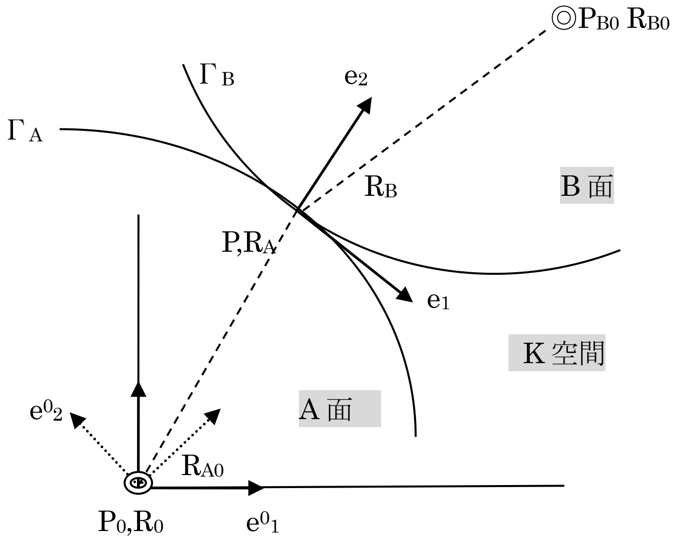

図１

記号：標構を次のように定める。

P_0 , R_0　：固定空間の基準点とその固定空間の基準標構

R_{A0} , P_A：物体 A に固定の標構、原点は P_A であるが P_0 と同じ

R_A　　　：A の輪郭 Γ_A のフルネー標構

R_{B0} , P_B：物体 B に固定の標構とその原点は P_B

R_B　　：B の輪郭 Γ_B のフルネー標構

Γ_A, Γ_B : A の輪郭 Γ_A , B の輪郭 Γ_B

$\bar{C}_A, \bar{C}_B$　：変換行列

1.1.1　場合１：A, B それぞれの回転中心と B の輪郭が与えられた場合の滑り接触する A の輪郭を求める

A ,B は基準面 K 面に対してそれぞれ P_0 ,P_{B0} を中心として回転運動をしている。

その関係は、$\bar{C}_A, \bar{C}_B$ を変換行列として、

$R_{A0} = \bar{C}_A R_0$,　$R_{B0} = \bar{C}_B R_0$

$R_B = \bar{U}_{B0} R_{B0} = \bar{U}_{B0} \bar{C}_B R_0 = \bar{U}_B R_0$ と置く。

この運動する Γ_B を A 面上(R_{A0} 標構)で見ると次のようになる。

$R_B = \bar{U}_B \bar{C}_A^{-1} R_{A0} = \bar{Q} R_{A0}$ と置く、

これは A 面に描かれた輪郭 Γ_B の無数の曲線族である。この包絡線が Γ_B に接触して運動する A の輪郭になる。その条件は

滑り接触の条件として、$R_B = \bar{Q} R_{A0}$ の相対成分$\{\bar{\Omega}\}$を求める。R_{A0} で見ての相対成分であるから $dR_{A0} = 0$ として、

$$dR_B = d\bar{Q}\bar{Q}^{-1} R_B = \{\bar{\Omega}\} R_B$$

$$\{\bar{\Omega}\} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

法線方向の相対速度は 0 すなわち

$\omega_2 = 0$,　ω_1 は不問　　　　　・・・・・・・・・・・・・(1.1)

この条件から得られた包絡線は Γ_A であり、Γ_B と滑り接触をする。

包絡線の求め方については別途包絡線の項(K-16)にある。

備考：１． $\omega_2 = 0$ から求めるものは、

R_B の輪郭表示にはパラメータが含まれる。このパラメータが曲線族を生む。

$\omega_2 = 0$ はそのパラメータ決定の条件である。具体的にはカム輪郭の事例参照。

備考: ２. ここでの考え方は運動するA面に立ってB面上の形状の運動を見る、または B 面上の運動を B 面に相対運動する A 面上に投影してその軌跡を見るものである。

1.1.2　場合２．　２物体のそれぞれの輪郭および回転中心が与えられた

場合の滑り接触の満たすべき条件を求める

図１を参照して、物体の輪郭Γ_A, Γ_Bはフルネー標構で次のように表現できる。

$R_A = \bar{U}_{A0}R_{A0} = \bar{U}_{A0}\bar{C}_A R_0 \equiv \bar{U}_A R_0$ と置く

$R_B = \bar{U}_{B0}R_{B0} = \bar{U}_{B0}\bar{C}_B R_0 \equiv \bar{U}_B R_0$ と置く

$dR_A = d\bar{U}_A\ \bar{U}_A^{-1}R_A = \{\bar{\Omega}\}_A R_A$

$dR_B = d\bar{U}_B\ \bar{U}_B^{-1}R_B = \{\bar{\Omega}\}_B R_B$

これより相対成分は　$\{\bar{\Omega}\}_A = d\bar{U}_A\bar{U}_A^{-1}$　, $\{\bar{\Omega}\}_B = d\bar{U}_B\bar{U}_B^{-1}$

$$\{\bar{\Omega}\}_A = \begin{pmatrix} 0 & \omega^A{}_1 & \omega^A{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^A{}_{12} \\ 0 & \omega^A{}_{21} & 0 \end{pmatrix},\quad \{\bar{\Omega}\}_B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^B{}_1 & \omega^B{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^B{}_{12} \\ 0 & \omega^B{}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

フルネー標構であるから$\omega^A{}_2 = \omega^B{}_2 = 0$ である。

A,B が接するという条件は

$R_B = R_A$ すなわち$\bar{U}_A = \bar{U}_B$　　・・・・・・・・・・(1.2)

法線方向の相対速度は 0 , すなわち、法線方向速度は等しい

$\omega^A{}_2 = \omega^B{}_2$　　・・・・・・・・・・・・(1.3)

$R_B = R_A$ を考慮すると当然であり、共にフルネー標構を採用しているから

$\omega^A{}_2 = 0$, $\omega^B{}_2 = 0$　　・・・・・・・・・・・・(1.4)

$\omega^A{}_1$, $\omega^B{}_1$ は不問である。

参考：２物体が滑り運動をしている場合は２物体 A, B は基準面 K 面に固定のそれぞれ P_0 , P_{B0} を中心として回転運動をしていることが要求される。

平行運動の場合は回転中心は無限遠点にある。

１．２　滑り率について

$$\mu^A = \frac{\omega^A{}_1 - \omega^B{}_1}{\omega^A{}_1} \qquad \mu^B = \frac{\omega^B{}_1 - \omega^A{}_1}{\omega^B{}_1}$$

μ^A, μ^Bはそれぞれ A ,B の滑り率である。

$\omega^A{}_1$, $\omega^B{}_1$ はそれぞれ dt 時間当たりの移動距離で ds^A , ds^Bである。

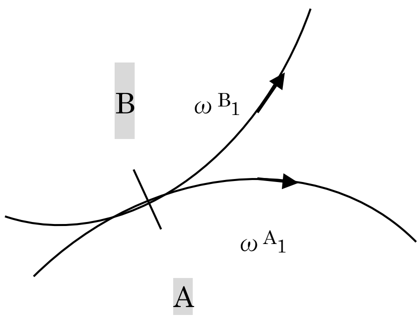

図　2

２．　平面曲線の転がり条件

転がり接触をする場合の基本的な関係式を求める。

２物体 A ,B が軸 P_0(=P_A) ,P_B を回転中心として転がり運動をしている場合の転がりの条件は、

条件１． $\omega^{A}{}_{2} = \omega^{B}{}_{2}$ ・・・・・・・・・・(2.1)

これは接触点における上記すべりの条件（接触条件）である。転がり接触の場合は更に次の条件を満たす必要がある。

条件２． $\omega^{A}{}_{1} = \omega^{B}{}_{1}$ ・・・・・・・・・・(2.2)

フルネー標構であればこれは線素 ds であるから、$ds^A = ds^B$ ということである。

２物体がそれぞれ空間固定の回転中心を軸に回転運動をしている場合の転がり条件として具体的に展開する。様々な方法があるが動標構の方法で行う。

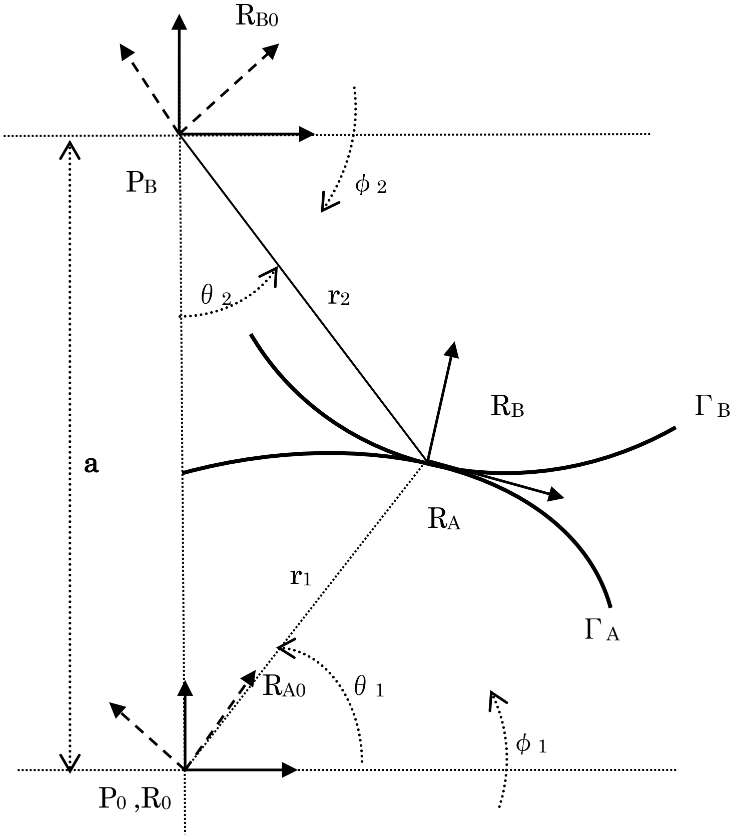

図　３

標構を次のように定める。

P_0 , R_0 : 固定空間の基準点とその固定空間の基準標構

R_{A0}, P_A :　物体 A に固定の標構、原点は P_A であるが P_0 と同じ。

R_A　　: Aの輪郭Γ_Aのフルネー標構

R_{B0} ,P_B : 物体Bに固定の標構とその原点はP_B

R_B　　: Bの輪郭Γ_Bのフルネー標構

物体Aの座標は、Aの標構で(x_1 ,x_2)とする 。

$x_1 = r_1 \cos\theta_1$,　$x_2 = r_1 \sin\theta_1$ ············(2.3)

物体Bの座標はBの標構で(X_1 , X_2) とする。

$X_1 = r_2 \cos\theta_2$,　$X_2 = r_2 \sin\theta_2$

θ_1 , θ_2 : 物体A ,Bの輪郭を表すパラメータ:

ϕ_1 , ϕ_2 : 物体A , Bのそれぞれの中心軸周りの回転角度

a : P_A P_B間の距離。

物体Aの輪郭Γ_Aのフルネー標構R_A は

$R_{A0} = \bar{C}_A R_0$: 基準標構に対するAに固定の標構の関係

$R_A = \bar{U}_{A0} R_{A0} = \bar{U}_{A0} \bar{C}_A R_0 = \bar{U}_A R_0$ と置く

$$\bar{U}_{A0} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} , \quad \bar{C}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \\ 0 & -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_A = \bar{U}_{A0} \bar{C}_A = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & \cos(\phi+\phi_1) & \sin(\phi+\phi_1) \\ 0 & -\sin(\phi+\phi_1) & \cos(\phi+\phi_1) \end{pmatrix}$$

$(y_1 , y_2) = (x_1 , x_2) C_A$ であるがこれは直接使用することはない。

ϕは物体A の輪郭Γ_Aのフルネー標構を得るためのもので次のように置ける。

$\tan\phi = \dfrac{dx_2}{dx_1}$ より、$\tan\phi = \tan(\theta_1 + \alpha)$, $\tan\alpha = r_1 \dfrac{d\theta_1}{dr_1}$

(注 : これは次の(2.4)式および(2.3)式から求められる)

2. 1　手順 (要領)

1) R_Aはフルネー標構であるから相対成分は次のようになる。

A面上で見るので、$dR_{A0}= 0$であることを考慮して、$R_A = \bar{U}_{A0} R_{A0}$として相対変位を求めることで、

$$d R_A = d\bar{U}_{A0}\bar{U}_{A0}^{-1}R_A = \{\bar{\Omega}\}_A R_A ,\quad \{\bar{\Omega}\}_A = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{A}{}_1 & \omega^{A}{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^{A}{}_{12} \\ 0 & \omega^{A}{}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega^{A}{}_1 = dx_1 \cos\phi + dx_2 \sin\phi$

$\omega^{A}{}_2 = -d x_1 \sin\phi + d x_2 \cos\phi$

ここでフルネー標構であるためには $\omega^{A}{}_2 = 0$ であるから、

$\omega^{A}{}_2 = -d x_1 \sin\phi + d x_2 \cos\phi = 0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$(2.4)

2）物体 B の輪郭 Γ_B のフルネー標構 R_B を求める

$R_{B0} = \bar{C}_B R_0$

$$\bar{C}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_2 & \sin\phi_2 \\ 0 & -\sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \cos\phi_2 & \sin\phi_2 \\ 0 & -\sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}$$

3）２物体が接して運動しているから接点では常に

$R_B = R_A$　　よって、

$R_B = \bar{U}_A R_0 = \bar{U}_A \bar{C}_B^{-1} R_{B0} = \bar{Q}_B R_{B0}$　と置く。

$$\bar{Q}_B \stackrel{\triangle}{\equiv} \bar{U}_A \bar{C}_B^{-1} = \bar{U}_{A0}\bar{C}_A\bar{C}_B^{-1}$$

$$\bar{Q}_B = \bar{U}_{A0}\bar{C}_A\bar{C}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & \cos(\phi+\phi_1-\phi_2) & \sin(\phi+\phi_1-\phi_2) \\ 0 & -\sin(\phi+\phi_1-\phi_2) & \cos(\phi+\phi_1-\phi_2) \end{pmatrix}$$

$X_1 = -a \sin\phi_2 + x_1 \cos(\phi_1-\phi_2) - x_2 \sin(\phi_1-\phi_2)$

$X_2 = -a \cos\phi_2 + x_1 \sin(\phi_1-\phi_2) + x_2 \cos(\phi_1-\phi_2)$

R_A はフルネー標構であるから相対成分は次のようになる。

B 面上で見るので $dR_{B0} = 0$ であることを考慮して、$R_B = \bar{Q}_B R_{B0}$ として、

$$dR_B = d\bar{Q}_B\bar{Q}_B^{-1}R_B = \{\bar{\Omega}\}_B R_B ,\quad \{\bar{\Omega}\}_B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{B}{}_1 & \omega^{B}{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^{B}{}_{12} \\ 0 & \omega^{B}{}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega^{B}{}_1 = -a \cos(\phi+\phi_1)d\phi_2 + (dx_1 \cos\phi + dx_2 \sin\phi)$

$\qquad + (x_1 \sin\phi - x_2 \cos\phi)\, d(\phi_1-\phi_2)$

$\omega^{B}{}_2 = a \sin(\phi+\phi_1)d\phi_2 + \underline{(-dx_1 \sin\phi + dx_2 \cos\phi)}$

$+ (x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi) \, d(\phi_1 - \phi_2)$

式(2.4)より　$\omega^{A}{}_2 = (-dx_1 \sin\phi + dx_2 \cos\phi) = 0$

以上の準備のもとに転がり条件を求める。

1) 接触の条件はフルネー標構表示であることを考慮して

$\omega^{A}{}_2 = \omega^{B}{}_2 = 0$

$a \sin(\phi + \phi_1) d\phi_2 + (x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots\cdots$(2.5)

転がりの条件は

$\omega^{A}{}_1 = \omega^{B}{}_1$

具体的に表現すると

$-a \cos(\phi + \phi_1) d\phi_2 + (x_1 \sin\phi - x_2 \cos\phi) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots$(2.6)

以上の(2.4)(2.5)(2.6)の３式を整理し、

(2.5)$\times \sin(\phi + \phi_1) -(2.6)\times \cos(\phi + \phi_1)$ から

$a \, d\phi_2 + (x_1 \sin\phi_1 + x_2 \cos\phi_1) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots$(※1)

(2.5)$\times \cos(\phi + \phi_1) +(2.6)\times \sin(\phi + \phi_1)$ から

$(x_1 \cos\phi_1 + x_2 \sin\phi_1) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots$(※2)

(※1), (※2)式の x_1 , x_2 を式(2.3)により極座標表示にすると

$a \, d\phi_2 + r_1 \sin(\theta_1 + \phi_1) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$(2.7)

$r_1 \cos(\theta_1 + \phi_1) \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$(2.8)

第２式(2.8)から、$\phi_1 \neq \phi_2$ であるから

(2.7)$\times \cos(\theta_1 + \phi_1) -(2.8)\times \sin(\theta_1 + \phi_1)$　を作ると、

$\cos(\theta_1 + \phi_1) = 0$　これより　$\theta_1 + \phi_1 = \pi/2$

$d\phi_1 = -d\theta_1$,　$d\phi_2 = d\theta_2$

これを(2.7)式に代入して

$a \, d\phi_2 + r_1 \, d(\phi_1 - \phi_2) = 0$

書き換えて

$(a - r_1) \, d\theta_2 = r_1 \, d\theta_1$

または、 $r_1 \, d\theta_1 = r_2 \, d\theta_2$

このことはまた、接触点は２物体の回転中心点を結ぶ線上にあることになる。

備考：曲面の滑り条件、転がり条件

単に接するだけなら $\omega^{A}{}_{3}=\omega^{B}{}_{3}$ を条件とする。これは接平面の一致の条件に過ぎない。凸面、凹面によっても条件の違いが出てくる。

曲面族の包絡面は滑り接触であるが曲面をフルネー標構で表現し最大曲率最小曲率線を一致していることになる。