K－２０　平面リンク

機構学においてリンク機構は最も重要な位置を占める。タイプもさまざまでありどれが代表的と特定できない。ここでは動標構の特性を最もよく発揮する事例として、リンク運動の結果として創成される曲線を求める事例を取り上げる。

１．　平面４節リンクの中間接直線の包絡線

平面４節機構の中間節上の点によって描かれる曲線が指定された曲線の近似として要求されることがある。これをさらに中間節上の直線の包絡線として創成された曲線が指定された曲線の近似として表現することもある。この解析に動標構の方法を適用して求める曲線をフルネーの標構で求める。容易に求められることを見ることができる。

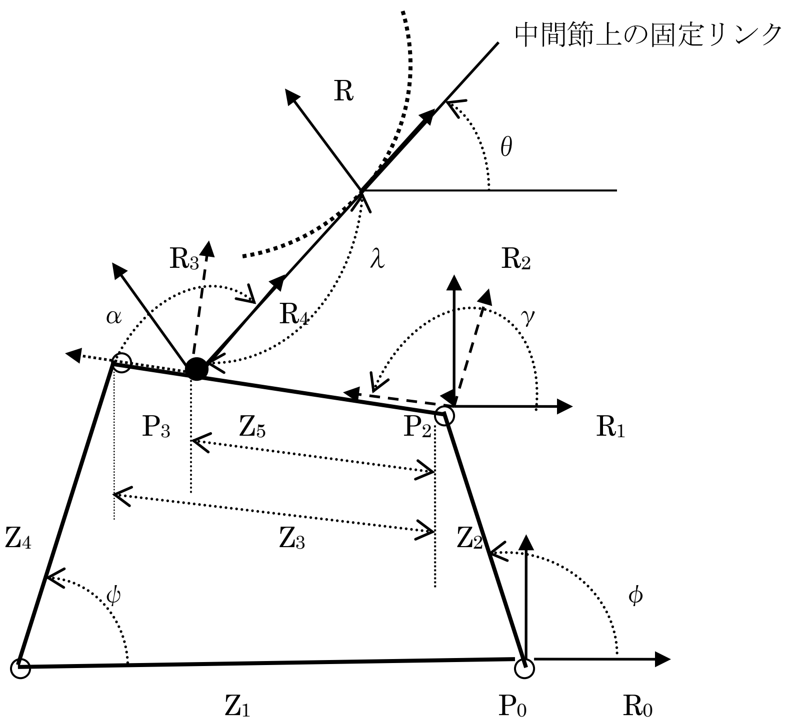

図　1

記号：

Z_i ：リンク i

$\theta, \phi, \gamma, \alpha$ ：リンク角度

λ　：中間節上から延びたリンクの P_3 点からの距離

R_i ：リンクに固定の各標構

ϕ　：図示角度であるが、リンクが閉じる条件を求めるときに計算途中で使用するが最終的には表に出ない。

$R_1 = \bar{U}_1 R_0$,　$R_2 = \bar{U}_2 R_1$,　$R_3 = \bar{U}_3 R_2$,　$R_4 = \bar{U}_4 R_3$,　$R = \bar{U}_5 R_4$

$$R = \bar{U}_5\bar{U}_4\bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1 R_0 \overset{\triangle}{\equiv} \bar{U} R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\bar{U} \overset{\triangle}{\equiv} \bar{U}_5\bar{U}_4\bar{U}_3\bar{U}_2\bar{U}_1$$

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z_2\cos\phi & Z_2\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (u)_1 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma-\pi/2) & \sin(\gamma-\pi/2) \\ 0 & -\sin(\gamma-\pi/2) & \cos(\gamma-\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\gamma & -\cos\gamma \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Z_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (Z)_5 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2-\alpha) & \sin(\pi/2-\alpha) \\ 0 & -\sin(\pi/2-\alpha) & \cos(\pi/2-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{U}_5 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

以上から $\bar{U}$ を求めると

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos(\gamma-\alpha) & \sin(\gamma-\alpha) \\ 0 & -\sin(\gamma-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x_1 = Z_2\cos\phi + Z_5\cos\gamma + \lambda\cos(\gamma-\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-a})$$

$$x_2 = Z_2\sin\phi + Z_5\sin\gamma + \lambda\sin(\gamma-\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-b})$$

$$dR = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \{\bar{\Omega}\}R, \quad \{\bar{\Omega}\} = d\bar{U}\bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3),(4)$$

$\omega_1 = Z_2 \sin(\phi + \alpha - \gamma)\cdot d\phi + Z_5 \sin\alpha \cdot d\gamma - d\lambda$

$\omega_2 = Z_2 \cos(\phi + \alpha - \gamma)\cdot d\phi + Z_5 \cos\alpha \cdot d\gamma + \lambda\, d\gamma$

$\omega_{12} = d\gamma$

包絡線の条件　$\omega_2 = 0$ からλが次のようにもとまる。

$$\lambda = -Z_2 \cos(\phi + \alpha - \gamma)\cdot \frac{d\phi}{d\gamma} - Z_5 \cos\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

リンクが閉じる条件は標構R_0をリンクに沿って一巡するとR_0に戻ることで得られる。これを整理すると

$$Z_1Z_2 \cos\phi + Z_1Z_3 \cos\gamma + Z_2 Z_3 \cos(\phi - \gamma) + \frac{1}{2}(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2) = 0 \quad \cdot\cdot(6)$$

この式から　$\phi = F(\gamma)$ の関係および $\dfrac{d\phi}{d\gamma}$ が得られる。

$$\frac{d\phi}{d\gamma} = -\frac{Z_3}{Z_2}\cdot \frac{Z_1 \sin\gamma + Z_2 \sin(\gamma - \phi)}{Z_1 \sin\phi - Z_3 \sin(\gamma - \phi)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

これを式(2.a),(2.b)に代入して、

$$x_1 = Z_2 \left\{\cos\phi - \cos(\theta - \phi)\cos\theta \frac{d\phi}{d\gamma}\right\} - Z_5 \sin\alpha \sin\theta \qquad \cdots\cdots(8\text{-a})$$

$$x_2 = Z_2 \left\{\sin\phi - \cos(\theta - \phi)\sin\theta \frac{d\phi}{d\gamma}\right\} + Z_5 \sin\alpha \cos\theta \qquad \cdots\cdots(8\text{-b})$$

$$ds = \omega_1 = Z_2 \sin(\phi + \alpha - \gamma)\cdot d\phi + Z_5 \sin\alpha \cdot d\gamma - d\lambda \quad \cdots\cdots\cdots\cdot(9)$$

$$\kappa\, ds = \omega_{12} = d\gamma \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(10)$$

$$R = \bar{U} R_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(1)$$

$$\begin{pmatrix} P \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ e^0{}_1 \\ e^0{}_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot(1\text{-a})$$

$\theta = \gamma - \alpha$

求める包絡線は式(8)であるが、これは式(6),(7)と連立することで完全にもとまる。

更に式(1)の表現と式(5)(9)(10)などから曲線の様々な特性が解析できる。

フルネー標構で表現されているので解析に便利である。このことから求める曲線を近似的に得ることが可能となる。

備考１．式(6)はどの角を使うかで形が変わる。

２．　４節リンクの閉じる条件

リンクが閉じる条件は標構 R_0 をリンクに沿って一巡すると R_0 に戻ることで得られる。

１巡の方法は、e_1 軸をリンクに一致させ、e_1 方向に次の接点まで移動し、という具合にして１巡する。このことで方程式が２つできる。それを整理することで求める関係式が得られる。

単純な計算に過ぎないので省略する。