K－２２　平歯車の歯形解析

平歯車の曲面創成を動標構を使って論ずる。その得られた歯形の解析も動標構を使って行う。いずれも見通しよく、容易な作業である。

関連する次項としてラック工具の切り下げ問題も扱っている。

１．　ラックにより歯切りされた歯形曲線の解析

基本的な考え方と手順 : 歯車の素材を A 面、ラック本体を B 面とする。空間固定の標構 R_0 の原点 P_0 を中心にして A 面を一定角速度で回転する。反時計回りを正とする。一方 B 面を左方(x_1 の負の方向)に一定速度で平行移動する。その移動速度は A 面のピッチ点での回転速度と等しくとる。すなわち A 面と B 面の相対関係はこのピッチ点での速度が同じことである。

この条件のもとで B 面のラックの歯面が A 面上に直線族を描く。この A 面上の直線族の包絡線が歯面になる。

１．１　歯形創成：

上記手順を数式で表現すると次のようになる。

ラックを図１のようにとり、左方に v の速度で移動するものとし、ワーク(歯車となる素材)に固定した標構を R とし、基準空間に固定した標構を R_0 とする。それぞれの標構の間に次の関係式が成立する。

記号説明：

R_0 ：空間固定の標構

R_1 ：ラック表面の点 P_1 での標構（$e^1{}_1$, $e^1{}_2$）

R_2 ：ラック面の直線表示の標構

R ：歯形素材に固定の標構

θ ：歯形素材の回転角

α, β ：ラック面の傾斜角。α は圧力角に相当。

$R_1 = \bar{U}_1 R_0$,　$R_2 = \bar{U}_2 R_1$,　$R = \bar{C} R_0$

以上から、

$$R_2 = \bar{U}_2 \bar{U}_1 \bar{C}^{-1} R_0 \overset{\triangle}{=} \bar{U} R \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\bar{U} \overset{\triangle}{=} \bar{U}_2 \bar{U}_1 \bar{C}^{-1}$$

R 系を基本標構として考えるので、dR = 0 として

$$d\,R_2 = d\bar{U}\bar{U}^{-1}R_2 \triangleq \{\bar{\Omega}\}R_2,\quad \{\bar{\Omega}\} \triangleq d\bar{U}\bar{U}^{-1}$$

ラックの移動速度は v とすると、ラックのピッチ点の位置は初期位置を v_0 とすると t 時間後には v_0-vt である。一方この点では A 面のピッチ点の移動距離は $r_1\theta = vt$ の関係があるから $v_0-vt \Rightarrow v_0-r_1\theta$ としてよい。

このことを踏まえて、$\bar{U}_1$,$\bar{U}_2$,C はそれぞれ次の通りである。

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & v_0-r_1\theta & r_1 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\theta, r_1) \\ 0 & U_1 \end{pmatrix},\quad \bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

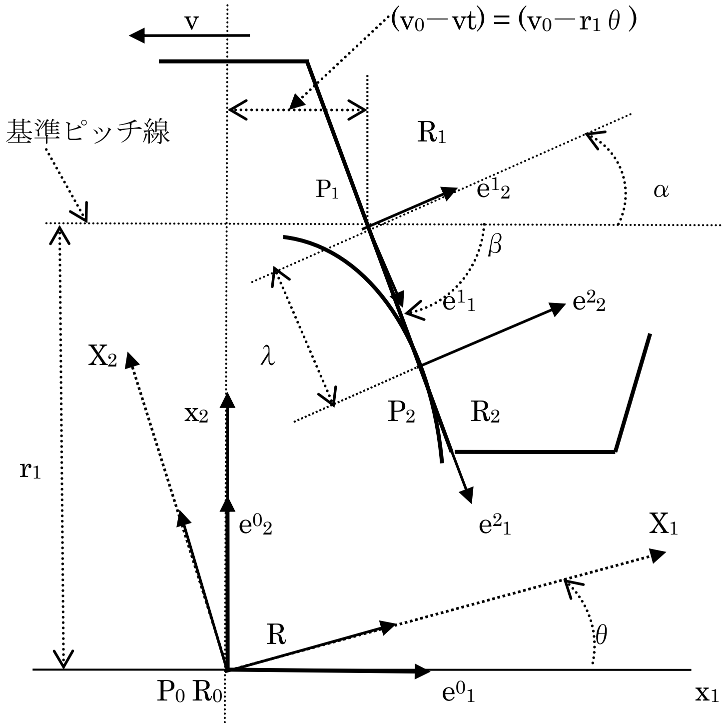


図 1

図 1 において、

1) $\alpha+\beta=\pi/2$

2) $r_1\theta = v\,t$, t は時間

3) $t = 0$ のとき $\theta = 0$, $x_1 = v_0$, $v_0 = t_0/4$

以上の計算を忠実に実行すると、

$$\bar{U}=\begin{pmatrix}1 & X_1 & X_2\\ 0 & \cos(\beta+\theta) & -\sin(\beta+\theta)\\ 0 & \sin(\beta+\theta) & \cos(\beta+\theta)\end{pmatrix},\quad \{\bar{\Omega}\}=d\bar{U}\bar{U}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & \omega_2\\ 0 & 0 & \omega_{12}\\ 0 & -\omega_{12} & 0\end{pmatrix}$$

$X_1=(v_0-r_1\theta)\cos\theta+r_1\sin\theta+\lambda\cos(\beta+\theta)$

$X_2=-(v_0-r_1\theta)\sin\theta+r_1\cos\theta-\lambda\sin(\beta+\theta)$

$\omega_1=ds=(v_0-r_1\theta)\sin\beta\, d\theta+d\lambda$

$\omega_2=-(v_0-r_1\theta)\cos\beta\, d\theta-\lambda\, d\theta$

$\omega_{12}=-d\theta$

滑り接触の条件 $\omega_2=0$ より λ を求めて、

$\lambda=-(v_0-r_1\theta)\cos\beta$

これを X_1, X_2, ω_1 に代入して

$X_1=(v_0-r_1\theta)\sin\beta\sin(\beta+\theta)+r_1\sin\theta$ ···············(1.2)

$X_2=-(v_0-r_1\theta)\sin\beta\cos(\beta+\theta)+r_1\cos\theta$ ···············(1.3)

$\omega_1=ds=\{(v_0-r_1\theta)\sin\beta+r_1\cos\beta\}d\theta$

この X_1, X_2 が歯形を与える直交座標表示である。さらに基礎円を求めてみる。

曲率半径 ρ は曲率 κ より

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{ds}{\kappa\, ds}=\frac{\omega_1}{\omega_{12}}=-\{(v_0-r_1\theta)\sin\beta+r_1\cos\beta\}$$

この ρ を用いて直ちに基礎円を求めることが出来る。

$R_2=\bar{U}R$ に $\bar{U}_\rho$ の平行移動を行うと(R の原点を曲率中心位置に移動する)

$\bar{R}_2=\bar{U}_\rho R_2=\bar{U}_\rho\bar{U}R\triangleq\bar{Q}R$

$$\bar{U}_\rho=\begin{pmatrix}1 & 0 & \rho\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\bar{Q}$ を計算することにより基礎円の R 系における座標 $\bar{X}_1\bar{X}_2$ は次のように求まる、

$\bar{X}_1=X_1+\rho\sin(\beta+\theta)=-r_1\sin\beta\cos(\beta+\theta)$

$\bar{X}_2=X_2+\rho\cos(\beta+\theta)=-r_1\sin\beta\sin(\beta+\theta)$

$\therefore\ (\bar{X}_1)^2+(\bar{X}_2)^2=(r_1\sin\beta)^2$

これは基礎円の半径を r_g とすると、

$r_g=r_1\sin\beta=r_1\cos\alpha$

一般の歯車の工具圧力角αに直すためには$\alpha+\beta=\pi/2$を用いて書き直せば得られる。

また、ρを微分して、

$d\rho = r_1 \sin\beta\, d\theta = r_g\, d\theta$

これは歯形が基礎円の伸開線であることを表している。すなわち**インボリュート歯形**である。

以上の手法は他の歯形にも応用できる。

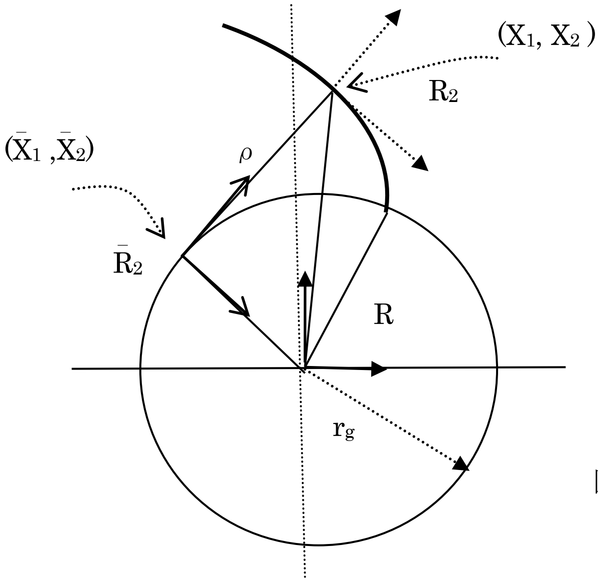


図２

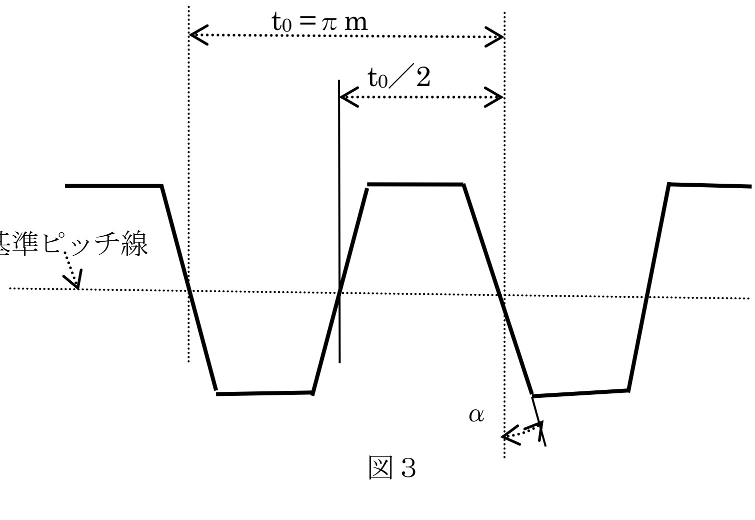


図３

２．　ラック形工具の切り下げ

上記の場合は工具が直線の場合であったが、ここでは円弧の場合として、ラック形工具の角が半径γの場合の歯車の歯元の切り込みについて解析する。これは歯車の切り下げ量の解析に応用できるものである。

解法は２通りが考えられる。その一つは、ラックの輪郭上に直接標構を設定して解く方法で、他の方法はまず円弧の中心 O_2 の軌跡を求め、距離γの平行曲線を求める方法である。その１では前者を、その２で後者を用いて解析する。

２．１　方法１

記号の定義や説明は前記と同様であるので関係式と結果のみを説明をする

図４に示すそれぞれの標構に次の関係が成立する。

$R_1 = \bar{U}_1 R_0$,　$R_2 = \bar{U}_2 R_1$,　$R = \bar{C} R_0$

　∴　$R_2 = \bar{U}_2 \bar{U}_1 \bar{C}^{-1} R_0 = \bar{U} R$

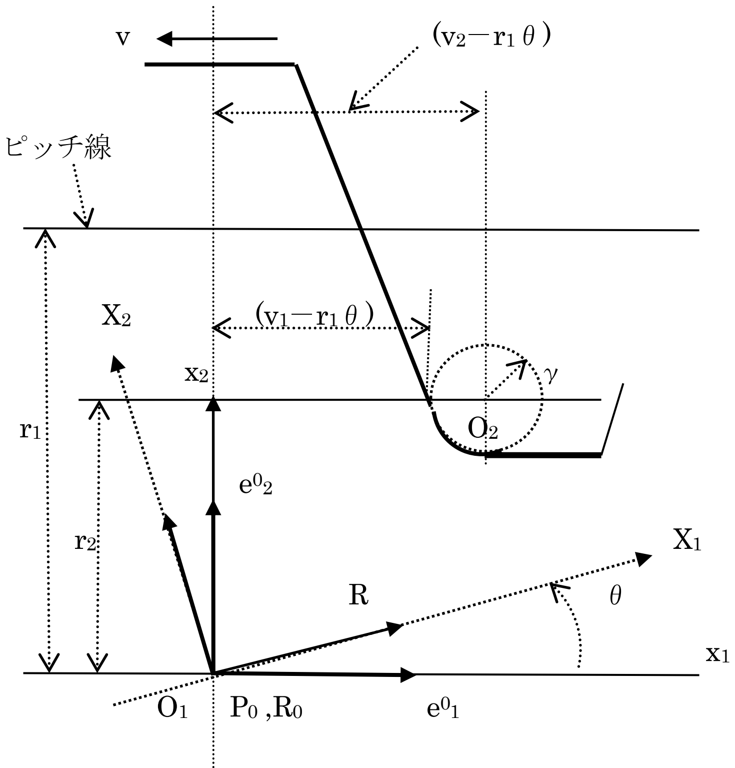


図 4(a)

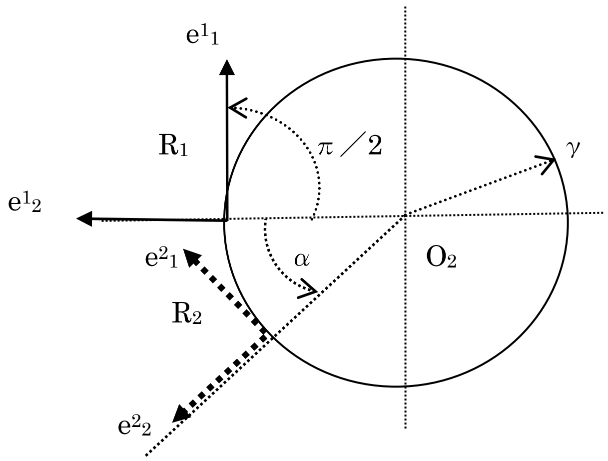


図 4(b)

1)　$v_2 = v_1 + \gamma$　,　2)　$r_1\theta = v\,t$

$$d R_2 = d\bar{U}\bar{U}^{-1}R_2 = \{\bar{\Omega}\}R_2$$

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & v_1 - r_1\theta & r_2 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ 0 & -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix},\ \bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\sin\alpha & -\gamma(1-\cos\alpha) \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_2\bar{U}_1\bar{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & \cos(\theta-\alpha) & \sin(\theta-\alpha) \\ 0 & -\sin(\theta-\alpha) & \cos(\theta-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (v_2 - r_1\theta)\cos\theta + r_2\sin\theta - \gamma\cos(\theta-\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

$$X_2 = -(v_2 - r_1\theta)\sin\theta + r_2\cos\theta + \gamma\sin(\theta-\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

$$\omega_2 = \{(v_2 - r_1\theta)\cos\alpha + (r_1 - r_2)\cos\alpha\}\,d\theta$$

滑り接触の条件　$\omega_2 = 0$ より

$$\tan\alpha = -\frac{r_1 - r_2}{v_2 - r_1\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

歯元の形状はこの α を X_1 , X_2 に代入して得られる。

２．２　方法２

考え方は、まず O_2 の軌跡を求め、角の円弧を平行曲線として修正する。

図および記号は方法１による。まず初めに O_2 が R 上に描く軌跡を R 標構で求める。図５(a) において各標構の間に次の関係式が成立する。

$$R_1 = \bar{U}_1 R_0\,,\quad R = CR_0\,,\quad \therefore\quad R_1 = \bar{U}_1 C^{-1} R_0 = \bar{U} R$$

$$\bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & v_2 - r_1\theta & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$dR_1 = d\bar{U}\bar{U}^{-1} R_1 = \{\bar{\Omega}\} R_1\,,\quad \{\bar{\Omega}\} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

以上を忠実に計算すると

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = (v_2 - r_1\theta)\cos\theta + r_2\sin\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

$$Y_2 = -(v_2 - r_1\theta)\sin\theta + r_2\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

$$\omega_1 = -(r_1 - r_2)\,d\theta\quad,\quad \omega_2 = -(v_2 - r_1\theta)\,d\theta$$

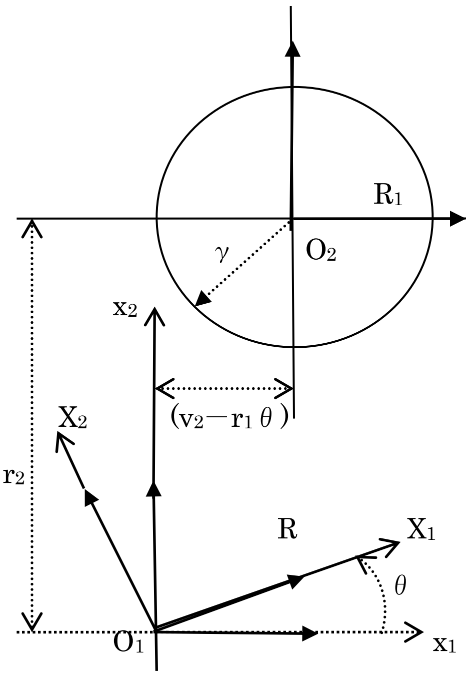
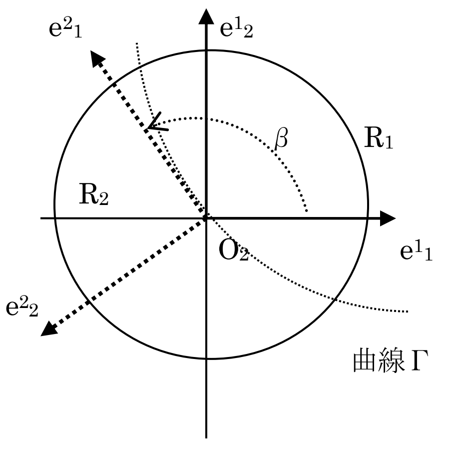


図 5(a)



曲線Γは O_2 が R 標構上で描く軌跡

図 5(b)

図５(b) によって、曲線Γのフルネー標構を求めると,ファイル K-13 を参照して(ただし、ここではφの代わりにβを用いた)

$$R_2 = \bar{U}_\beta R_1 = \bar{U}_\beta \bar{U} R \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

$$\bar{U}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Omega}\}_2 = d(\bar{U}_\beta \bar{U})(\bar{U}_\beta \bar{U})^{-1} = \bar{U}_\beta \{\bar{\Omega}\} \bar{U}_\beta \ , \quad \{\bar{\Omega}\}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_1 & \omega'_2 \\ 0 & 0 & \omega'_{12} \\ 0 & -\omega'_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

フルネー標構にするには、このω'_2を 0 とすることである。よって、

$$\tan\beta = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{v_2 - r_1\theta}{r_1 - r_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.7)$$

このΓ曲線の距離γの点の**平行曲線**を求めるためにはR_2にe^2_2方向への移動を行えばよいので、求める曲線を$\bar{R}_2$とすると、移動を$\bar{U}_2$ として、

$\bar{R}_2 = \bar{U}_2 \bar{U}_\beta \bar{U} R = QR$ と置く

$$\bar{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{Q} = \bar{U}_2 \bar{U}_\beta \bar{U}$ 　を求めると、

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & \cos(\theta - \beta) & -\sin(\theta - \beta) \\ 0 & \sin(\theta - \beta) & \cos(\theta - \beta) \end{pmatrix}$$

$$X_1 = Y_1 + \gamma \sin(\theta - \beta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.8)$$

$$X_2 = Y_2 + \gamma \cos(\theta - \beta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

先に求めた式(2.3)と(2.7) を比較すると

$\tan\alpha \ \ \tan\beta = -1 \quad \therefore \ \beta - \alpha = \pi / 2$

を得る。この関係を用いると「その１」で求めた式(2,1),(2.2)とここで求めた式(2.8),(2.9)とが完全に一致する。すなわちいずれの方法で解析してもよいことが分かる。

これらの解析手法は歯車についても以上のようなものだけではなく歯車のかみ合い相手の歯形を求める場合にも有効な手段となる。