0.10 ジュニア版　　逆行列

　行列計算の中心的な役割をになっている逆行列の計算とその簡単な利用例をここでは見ます。一般的な連立一次式の係数行列からその解を求めるクレーマーのルールと、その中でも非負行列という特殊な例としての産業連関表計算を簡単明瞭に説明します。産業連関表を計量経済学の一分野として取り上げるのは私の本意ではありませんが、行列計算、特に GAUSS の演算の中心に位置する逆行列のアプリケーションとして扱うことにします。

GAUSS における逆行列計算

　通常の１行１列の数値の計算では、その数に何かをかけて結果が（乗法の単位元である）１になるその何かのことを「逆元」と呼びます。つまり、この場合

$$x \times a = a \times x = 1$$

となるｘを見つけ出すことが逆元の計算です。この計算は、ｘ＝１÷ａの計算でできます。同様のことを○行△列の行列に対しても考えることができます。２行２列の行列の場合

$$A \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{となるような} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

を見つけることが逆行列の計算になります。難しい逆行列の計算はさておいて、「GAUSS においては数値も行列も区別はない」仕組みになっていますから、

$$x = I / A$$

によって計算できます。このＩ／Ａのことを「逆行列」と考えることができます。実際、

$$x = A^{-1}$$　（　GAUSS では組込み関数を用いてｘ＝inv(A)と表す　）

の結果と上のＩ／ａの計算結果は全く同じになるはずです。１行１列の数値計算の１を元の行列と同じディメンションの単位行列Ｉに変更しただけの違いになります。単位行列Ｉも対角成分以外は０なのですが、１行１列の特殊な場合を考えると１だけしかありません。これからは、この A に対する逆行列のことを GAUSS では inv(A)としましょう。実際のプログラム例は以下のようになります。前半は１行１列の数値計算における「逆元」計算を示し、後半は行列計算における「逆行列」計算を示しています。

プログラム

```
new;
cls;
a=2;
/* Solve a*x=1 for x. */
    x=1/a;
    print x;

A={1 -3,
    5   2};
I=eye(2);
/* Solve A*x=I for x. */
    x=I/A;
    print x;
    print inv(A);
```

画面表示

```
       0.50000000

       0.11764706        0.17647059
      -0.29411765       0.058823529

       0.11764706        0.17647059
      -0.29411765       0.058823529
```

上のような意味で「／」の記号は使われますから、１行１列の数値の場合にはそのまま割り算として使えますが、それよりもディメンションの大きい行列計算では「／」の記号は割り算ではなくて、逆行列をかける(すなわちＩ／Ａをかける)計算になってしまいます。行列やベクトルにおいて要素と要素を１対１で割る際には「要素対要素」の意味でドットを「／」の記号の前において「.／」としてこの両者を区別します。行列ベクトルの掛け算の際にも「要素対要素」の場合は「.＊」となりますが、割り算のドットがあるかないかは特に重要な違いになります。

クレーマーのルール（クラメールの公式）

　まず、例えば一次式（２乗や３乗それに２つ以上の変数からなる交差項がないもの）の連立方程式を考えます。例えば、

$$x_1 - 3x_2 = 2$$
$$5x_1 + 2x_2 = 1$$

という連立１次方程式を考えます。行列の計算において、その掛け算は「行かける列の和」「行かける列の和」を何度も繰り返すことで計算できますから、

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

というふうに書きなおすことができます。すなわち、「行かける列の和」ですから、

$1 \times x_1 - 3 \times x_2$ が２
$5 \times x_1 + 2 \times x_2$ が１

となるわけです。行列の積は「行かける列の和」の集まりを計算するわけですから、当然のことながら「かける側のそれぞれの行に含まれる列の数」と「かけられる側のそれぞれの列に含まれる行の数」は一致する必要があります。上の場合、

$$(2 \times 2) \times (2 \times 1) = (2 \times 1)$$

を計算しているわけで、確かにかける側の列数とかけられる側の行数は一致しています。また、行列の積によってできる結果行列は「行かける列」の集まりの計算なのですからそれぞれの起点となる「かける側の行数」と終点の「かけられる側の列数」のディメンションになります。上では、外側の数どおしの２×１になっています。この連立方程式の行列表現への書き換えは GAUSS をはじめとするマトリクス言語において特に重要な基本中の基本となる概念です。対応関係をよく理解してください。

　上の連立一次方程式から行列表現への変換がわかった上で、次の話に移ります。今、ｘベクトル（x_1 と x_2 からなる）を　求めるために、前にかかっている係数の行列を反対側に移行して計算したいわけです。それには、前に述べた逆行列の考え方を使って、inv(A)を反対側のベクトルにかければよいわけです。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするときに、

$x = A^{-1}b$　　（ GAUSS ではｘ＝inv(A)*b ）

を計算することになります。

英語名クレーマーズルール（いわゆるクラメールの公式）は、早い人では中学受験の際に遅い人でも大学の経済数学等の授業で習ったと思います。上とまったく同じ例で解説しますと、

$$x_1-3x_2=2$$
$$5x_1+2x_2=1$$

の計算で

$$\begin{bmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

と表現して

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}}$$

を計算するものです。２つの式の分母は係数行列の行列式（デターミナント）になっています。いわゆる「たすきがけをしたものを引く」わけで、

$$1\times2-(-3)\times5=17$$

となります。x_1の分子は第１列目のすべてを反対側の２と１からなる列ベクトルと交換した行列式（デターミナント）を計算することになります。同様にして、x_2の分子は第２列目のすべてを反対側の２と１からなる列ベクトルと交換した行列（デターミナント）を計算することになります。実際、

$$x_1=(2\times2-(-3)\times1)\div17$$
$$x_2=(1\times1-\qquad 2\times5)\div17$$

の計算となります。一方、厳密な意味での「逆行列」の定義は、

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}{|A|},\quad \text{ここで}A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad \text{であって}$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\ x_2\end{bmatrix}=A^{-1}b=\frac{adjA}{|A|}b=\frac{\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}2\times2+3\times1\\ 2\times(-5)+1\times1\end{bmatrix}}{|A|}$$

となり、クレーマーのルールと分子計算と全く同じ結果となることがわかると思います。つまり、連立一次方程式の概念から言うと、「行列式（デターミナント）」というものは、

クレーマーのルールで言うところの「係数のたすきがけの差」であって、「余因子(adj)」というのは反対側の係数と逆行列との行列のかけ算をするために「行かける列の和」における調整をするために対角要素（ダイアゴナル）を交換し、非対角要素（オフダイアゴナル）の符号を逆転させたものとなっているのです。

プログラム

```
new;
cls;
/*
**   1*x1 - 3*x2 = 2
**   5*x1 + 2*x2 = 1
*/
A={1 -3,
   5   2};
b={2,
   1};
/* Solve A*x=b for x */
x=inv(A)*b;
print x;
```

画面表示

```
      0.41176471
     -0.52941176
```

ミニ産業連関表

プログラム

```
new;
cls;
B={500 1000,
   800 4000};
d={3500,
   5200};
X={5000,
   10000};
A=B./X';
/*   B+d=X   ->   A*X+d=X   ->   (I-A)*X=d   ->   X=inv(I-A)*d   */
I=eye(2);
```

```
invI_A=inv(I-A);
resultX=invI_A*d;
V=(X-sumc(B))';
/* Display each matrix */
print "                              B                              d                    X";;
print B~d~X;
print "V=";print V;
print "X=";print X';
print;
print "Coefficients:";
print "A=" A;
print "inv(I-A)=" invI_A;
print "X=" resultX;
```

画面表示

```
                        B                            d                    X
        500.00000          1000.0000          3500.0000          5000.0000
        800.00000          4000.0000          5200.0000          10000.000
V=
        3700.0000          5000.0000
X=
        5000.0000          10000.000

Coefficients:
A=
       0.10000000         0.10000000
       0.16000000         0.40000000
inv(I-A)=
        1.1450382         0.19083969
       0.30534351          1.7175573
X=
        5000.0000
        10000.000
```

ミニ産業連関表（移輸入を考慮したケース）

プログラム

産業連関表

プログラム