

平成 12 年度 情報数学基礎 (浜口担当分)
中間試験 第 1 回 問題

[1] 対象領域が $X = \{a, b, c\}$ であるような変数 x, y を含む述語関数 $L(x, y)$ に関して, その真偽 (それぞれ T, F であらわす) を下の表のように定めたとする.

(a) 次の命題 P と Q の真偽はそれぞれどうなるか.

$$P = (\exists x \in X)[(\forall y \in X)L(x, y)]$$

$$Q = (\forall x \in X)[(\exists y \in X)L(x, y)]$$

(b) (a) の P と Q がともに真になるように L を適当に変更せよ.

(c) 変更前の L に関して, 次のように関係 $R \subseteq X \times X$ を定める.

$$xRy \Leftrightarrow L(x, y) = T$$

x	y	$L(x, y)$
a	a	T
a	b	T
a	c	F
b	a	T
b	b	T
b	c	F
c	a	F
c	b	F
c	c	T

この R が順序関係でないことを示せ.

(d) 関係 $R \subseteq X \times X$ が同値関係である条件を, 一般的に論理式を使って示せ. 例えば, 反射性のみを表現すれば $(\forall x \in X)xRx$ と書くことができる.

(e) (d) で求めた論理式に基づいて, (c) で定めた R が同値関係かどうか判定せよ.

(f) $X = \{a, b, c\}$ 上の同値関係 $R' \subseteq X \times X$ と, R' に対して定まる同値類系 (商集合) X/R' について, 考えられる同値類系 (商集合) X/R' を全て示せ. X/R' の一例としては, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ がある.

[2] ある集合 $X = \{a, b, c\}$ 上の 2 つの同値関係 $R \subseteq X \times X$ と $R' \subseteq X \times X$ を考えた時, 和集合 $S = (R \cup R')$ が同値関係にならないような R と R' を見つけ, その同値類系 X/R と X/R' を示せ. また, そのような R と R' に対して, なぜ S が同値関係にならないかを述べよ.

[3] 集合 $X = \{A, B, C, D\}$ を考える. 次のハッセ図で表現される順序関係を考える.

(a) $U = \{B, C\}$ および $V = \{A, D\}$ の上界, 最大元, 極大元, 上限をそれぞれ示せ (存在しないものもあり得る).

(b) 極大元は存在するが最大元は存在せず, かつ最小元は存在するような X の部分集合を 1 つ示せ.

(c) 最大元と最小元がともに存在するような部分集合を 全て 示せ.

