平成 12 年度 情報数学基礎 (浜口担当分) 中間試験 第 2 回 問題

[1] 根つき木を考える．ただし，無向の辺 1 本は有向の辺 2 本からできているとみなすこと．
(i) 図 1 の根つき木 $G=(V,E)$ に対応する接続行列を 1 つ示せ．また，すべての 2 頂点の組合せに対して，長さ 2 の経路の総数を表す行列を求めよ．どの頂点がどの行および列に対応するか明示すること．

(ii) 高さ n $(n \geq 1)$ の根付き木 T に関して，根からの深さが i である頂点の集合 V_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を考える．例えば，V_0 は要素が 根 だけからなる集合である．この V_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ から新たに次のグラフ $G' = (V', E')$ を作る．

- $V' = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$．すなわち，頂点の集合 V_i が V' の頂点になっている．
- $E' = \{(V_i, V_j) \mid u \in V_i, v \in V_j$ であるような辺 (u, v) が根付き木 T に存在する$\}$

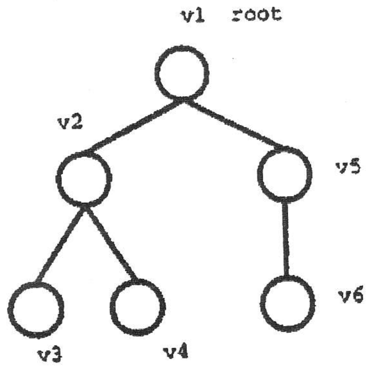

図 1

このとき，$G' = (V', E')$ がどのような (有向) グラフになるか，概略を図で示せ．(特徴がわかるように書くこと)．

(iii) 一般の根つき木に関して，根からの深さが偶数になる頂点の集合 V_0 と 深さが奇数になる頂点の集合 V_1 を考える．根付き木を，頂点の集合が $V_0 \cup V_1$ であるようなグラフであるとみなす．V_0 の頂点全てを V_1 のどの頂点よりも，先に来るように並べて接続行列を作ると，どのような形になるか．V_0 と V_1 に対応して定まるブロック $B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}$ を用いて示せ．それぞれのブロック B_{ij} は，V_i 中の頂点から V_j 中の頂点への接続関係を表している．どのブロックが零行列になるかを明示すること．

[2]
(i) 頂点の集合 $V_1 = \{v_1, v_2\}$ と $V_2 = \{v_3, v_4\}$ について，$V = V_1 \cup V_2$ とする．頂点集合が V で，辺の集合が $E_1 = V_1 \times V_1$ (すなわち，$V_1 \times V_1$ と一致する) であるような有向グラフ $G_1 = (V, E_1)$ を考える．G_1 の補グラフ $\overline{G_1} = (V, (V \times V) - E_1)$ を図で示せ．

(ii) (i) と同様に辺の集合が $E_2 = V_2 \times V_2$ であるような $G_2 = (V, E_2)$ を考える．$\overline{G_1}$ と $\overline{G_2}$ の積グラフ $\overline{G_1} \cap \overline{G_2}$ を図で示せ．(積グラフの定義は $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ に対して，$G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$)

(iii) 頂点集合 V を $V_1, V_2, \cdots, V_n$ に分割できたとする ((i)(ii) とは無関係な一般の V について考えている)．$G_i = (V, V_i \times V_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．このとき積グラフ $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \cdots \cap \overline{G_n}$ は，どのようなグラフになるか，概略を図で示せ (特徴がわかるように書くこと)．

[3] 次の (a)(b) いずれか一方のみを選択して答えよ．

(a) 長さ n $(n \geq 2)$ の巡回置換 $(x_n x_{n-1} \cdots x_1)$ が互換の積 $(x_n x_{n-1}) \circ (x_{n-1} x_{n-2}) \circ \cdots \circ (x_2 x_1)$ によって、書けることを n に関する数学的帰納法によって示せ。

(b) 無向グラフ $G = (V, E)$(少なくとも，ひとつ頂点を含む) が連結であれば，少なくとも $|V| - 1$ 本の辺が存在することを，頂点の数 n が $|V| - 1$ の場合については，すでに証明されていると仮定して，n が $|V|$ の場合を証明せよ．($|V|$ は頂点集合 V の要素数を表す)